

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ІВАНОВ ЄВГЕН В'ЯЧЕСЛАВОВИЧ

УДК 519.7

ДИСЕРТАЦІЯ

**УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРІЯ
АБСТРАКТНИХ ПЕРЕПИСУВАЛЬНИХ СИСТЕМ**

01.05.01 — теоретичні основи інформатики та кібернетики
(113 – прикладна математика)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Є.В. Іванов

АНОТАЦІЯ

Іванов Є.В. Узагальнена теорія абстрактних переписувальних систем. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.01 «Теоретичні основи інформатики та кібернетики» (113 – Прикладна математика). — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2025.

Робота присвячена побудові теорії, що розширює та узагальнює класичні результати теорії абстрактних переписувальних систем (АПС) на випадки, що становлять інтерес з точки зору аналізу недискретних математичних моделей систем і процесів. Однією з центральних тем класичної теорії АПС є дослідження властивості Черча-Россера (або еквівалентної властивості конфлюентності), що виражає зв'язок між відношеннями конверсії та редукції та має як наслідок властивість існування не більше однієї нормальної форми у кожного елемента системи. Методи перевірки властивості Черча-Россера (конфлюентності) досліджувалися протягом тривалого періоду 20-го століття та на початку 21-го століття Тепер такі методи є добре вивченими для систем, що мають спеціальні властивості, характерні для дискретних моделей обчислень, такі як термінальність або зліченність. Подібна ситуація має місце і для інших результатів теорії АПС. Однак, визначення застосовності деяких із зазначених методів, відомих для злічених або термінальних систем, до незлічених нетермінальних систем вважається деякими провідними дослідниками з теорії переписувальних систем важливою і фундаментальною відкритою проблемою. Крім того, властивості, такі, як термінальність і зліченність не є характерними для АПС, що породжені моделями, що, в певному сенсі, поєднують недискретність і недетермінізм, які є важливими для сучасних міждисциплінарних напрямків, пов'язаних з інформатикою. У зв'язку з вищезазначеним, для теоретичних основ інформатики є актуальною побудова узагальненої теорії АПС, що розширює та узагальнює класичні результати теорії АПС на випадки, що становлять інтерес з точки зору аналізу недискретних математичних моделей.

Основні результати, отримані у дисертаційній роботі включають такі.

1. Вперше доведено повноту методу спадних діаграм ван Оострома-де Брейна

для доведення конфлюентності абстрактних переписувальних систем мінімальної незліченної потужності (попередні відомі результати: V. van Oostrom, 1994 – метод є повним для доведення конфлюентності систем, що мають властивість кофінальності; J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek, 2018 – метод з двома мітками є повним для доведення конфлюентності систем, що мають властивість кофінальності; також, загальновідомо, що властивість кофінальності може не виконуватись для конфлюентних абстрактних переписувальних систем будь-якої незліченної потужності); за припущення континуум-гіпотези, з отриманого у дисертації результату випливає, що метод спадних діаграм є повним для доведення конфлюентності довільних бінарних відношень на множині дійсних чисел, множині послідовностей дійсних чисел, індексованих натуральними числами, множині неперервних дійсних функцій, множині орієнтованих графів із фіксованою зліченною множиною вузлів і на різноманітних інших структурах, що становлять інтерес з точки зору інформатики та прикладної математики; доведення повноти було формалізовано та автоматично перевірено за допомогою відомої системи інтерактивного доведення теорем Isabelle, обсяг формального доказу перевищує 300 сторінок у форматі Archive of Formal Proofs.

2. Вперше отримано розв’язки проблем неповноти методу спадних діаграм з двома мітками та відсутності колапсу на рівні 2 ієрархії систем, що мають спадну властивість Черча-Россера (дані проблеми були сформульовані J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek у 2018 році як відкриті проблеми).

3. Вперше запропоновано узагальнення леми Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем.

4. Вперше запропоновано спеціальні принципи індукції для доведення властивостей елементів переписувальних систем, що не задовольняють припущенням про термінальність та зліченність.

5. Дістали подальшого розвитку формальні теорії для аналізу властивостей абстрактних недискретних динамічних моделей.

Дисертаційна робота складається з анотацій, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, поділених на підрозділи, висновків, списку використаних джерел, трьох додатків.

Розділ 1 присвячено першим двом основним результатам дисертаційного дослідження (доказу повноти методу спадних діаграм ван Оострома – де Брейна для доведення конфлюентності АПС мінімальної незліченної потужності і розв’язан-

ню проблем неповноти методу спадних діаграм з двома мітками та відсутності колапсу на рівні 2 ієрархії систем, що мають спадну властивість Черча–Россера). У розділі 1 досліджено застосовність методу спадних діаграм ван Оострома – де Брейна для доведення конфлюентності АПС мінімальної незліченної потужності та отримано, що даний метод є повним для доведення конфлюентності АПС мінімальної незліченної потужності, а за припущення континуум-гіпотези, він є повним і для доведення конфлюентності АПС потужності континууму, що включають АПС породжені широким колом математичних моделей, що становлять інтерес з точки зору інформатики та прикладної математики. Даний результат фундаментально відрізняється від раніше відомих результатів стосовно повноти методу спадних діаграм для спеціальних класів АПС як широтою охоплення АПС, так і тим, що він не спирається (і не міг би спиратися) на властивість кофінальності для побудови розмітки АПС в усіх випадках, яка, в загальному випадку, не виконується для АПС мінімальної незліченної потужності.

Розділ 2 присвячено узагальненню леми Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем. Одним з природних варіантів послаблення умови сильної нормалізації у лемі Ньюмана є умова строгої індуктивності: АПС $(A, \rightarrow)$ є строго індуктивною, якщо кожний непорожній ланцюг в A у сенсі передпорядку $\rightarrow^*$ має точну верхню межу. Відомий контрприклад Ньюмана не може бути використаний, щоб спростувати гіпотезу про еквівалентність умов локальної конфлюентності і конфлюентності для ациклічних строго індуктивних АПС. У розділі 2 доведено, що еквівалентність умов локальної конфлюентності і конфлюентності для ациклічних строго індуктивних АПС має місце, якщо множина незвідних елементів АПС є не більш ніж зліченною. Однак, при цьому, існує ациклічна, строго індуктивна, локально конфлюентна АПС, що не є конфлюентною. Остання АПС може розглядатись як посилення контрприкладу Ньюмана, однак вона є необхідно незліченною і суттєво відрізняється від звичайного контрприкладу Ньюмана (який є зліченим). Також, у розділі запропоноване розширення цих результатів до теореми, що узагальнює лему Ньюмана для всіх строго індуктивних АПС.

Розділ 3 присвячено побудові спеціальних принципів індукції для доведення властивостей елементів переписувальних систем і частково впорядкованих множин, що не задовольняють припущенням про термінальність та зліченність. З класичної теорії переписувальних систем відомо, що АПС є термінальною тоді і тільки тоді, коли для неї виконується принцип нетерової індукції. Даний факт є ко-

рисним для доведення універсальних властивостей елементів термінальних АПС. Однак АПС, породжені недискретними моделями часто не задовольняють умові термінальності. Тому для них принцип нетерової індукції не може бути застосовним і є актуальним пошук альтернативних принципів доведення універсальних властивостей елементів АПС, що не обов'язково є термінальними. У розділі 3 запропоновано такі принципи. У тому числі, у розділі запропоновано принцип індукції для вільних від алмазів повних частково впорядкованих множин (або ациклічних АПС, що породжують такі частково впорядковані множини) і запропоноване спільне узагальнення принципів фундової і дійсної індукції. Також, у розділі запропоновано загальний підхід до формулювання принципів індукції для різних структур.

Розділ 4 присвячено дослідженню формальних теорій для аналізу властивостей абстрактних недискретних динамічних моделей. У розділі запропоновано підхід до узагальнення абстрактних та розмічених переписувальних систем, що дозволяє формалізувати неперервні у часі процеси перетворення елементів системи (переписування), що базується на застосуванні моделі недетермінованих повних марківських систем (НПМС). У розділі запропоновано розв'язну формальну теорію, що може бути використана для формулювання та перевірки властивостей траєкторій НПМС. Також, досліджено відношення глобальної часової бісимуляції на станах розмічених НПМС та отримано необхідну і достатню умову локального характеру для того, щоб дане відношення було відношенням глобальної часової бісимуляції, запропоновано критерій для визначення, чи є множина нижньою апроксимацією множини досяжності НПМС, що спирається на локальну продовжуваність траєкторій, запропоновано узагальнення поняття EDS визначної функції Г. Фрідмана до поняття EDS визначної функції, що перетворює складноіменні дані, отримано критерії виразності часткових предикатів в алгебрі часткових предикатів з композицією предикатного доповнення.

Дисертація має теоретичний характер. Отримані результати суттєво удосконалюють розуміння меж застосовності класичних методів теорії абстрактних переписувальних систем та випадків, коли є необхідність застосування нових методів аналізу АПС.

Ключові слова: переписувальні системи, редукція, формальні методи, формальні доведення, формальна верифікація, недискретні моделі, недетерміновані моделі.

ABSTRACT

Ivanov Ie.V. Generalized abstract rewriting theory. — Qualification scientific work in the form of a manuscript.

Dissertation for obtaining the scientific degree of doctor of physical and mathematical sciences in the specialty 01.05.01 «Theoretical foundations of informatics and cybernetics» (113 — Applied mathematics). — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2025.

The work concerns development of a theory that extends and generalizes classical results of the abstract rewriting theory (ARS theory) to cases that are of interest from the perspective of analysis of non-discrete mathematical models of systems and processes. One of the central topics of the classical ARS theory is the study of the Church-Rosser property (or the equivalent confluence property) which expresses a relationship between the conversion and reduction relations and implies that every element of a system has no more than one normal form (unique normal form property with respect to reduction). Methods for checking the Church-Rosser property (confluence) were studied in the 20th century and in the early 21st century. Now such methods are well known for systems that have special properties that are typical for discrete models of computation, e.g. termination or countability. A similar situation holds for other results in the ARS theory. However, the problem of determining applicability of some of these methods known for countable or terminating systems to uncountable non-terminating systems is considered to be an important and fundamental open problem by some of the leading researchers in the rewriting theory. In addition, properties like termination and countability do not typically hold for ARS induced by models that, in a certain sense, combine non-discreteness and nondeterminism and that are important for modern interdisciplinary areas related to computer science.

For the reasons mentioned above, development of a generalized ARS theory that extends and generalizes classical results of the abstract rewriting theory to cases that are of interest from the perspective of analysis of non-discrete mathematical models of systems and processes is important for theoretical foundations of informatics.

The main results obtained in the dissertation include the following.

1. For the first time completeness of Van Oostrom-De Bruijn decreasing diagrams

method for proving confluence of abstract rewriting systems of the least uncountable cardinality has been proved (previously known results: V. van Oostrom, 1994 – the method is complete for proving confluence of systems that have the cofinality property; J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek, 2018 – the method with two labels is complete for proving confluence of systems that have the cofinality property; also, it is known that the cofinality property may not hold for confluent abstract rewriting systems of any uncountable cardinality); under the Continuum Hypothesis, from the result obtained in the dissertation it follows that the decreasing diagrams method is complete for proving confluence of arbitrary binary relations on the set of real numbers, the set of sequences of real numbers indexed by natural numbers, the set of continuous real functions, the set of directed graphs on a fixed countable set of nodes, and on various other structures of interest to informatics and applied mathematics; the proof of completeness has been formalized and automatically checked using Isabelle proof assistant, the size of the formal proof exceeds 300 pages in the Archive of Formal Proofs format.

2. For the first time solutions to the problems of incompleteness of the decreasing diagrams method with two labels and the absence of collapse of the hierarchy of decreasing Church-Rosser systems at the level 2 have been obtained (these problems were posed by J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek in 2018 as open problems).

3. For the first time a generalization of Newman's lemma for strictly inductive rewriting systems has been proposed.

4. For the first time special induction principles for proving properties of elements of rewriting systems that do not satisfy termination and countability assumptions have been proposed.

5. Formal theories for analyzing properties of abstract non-discrete dynamical models have been further developed.

The dissertation consists of the abstracts, the list of notations, introduction, four sections divided into subsections, conclusions, the list of references, three appendices.

Section 1 concerns the first two main results of the dissertation (proof of completeness of Van Oostrom–De Bruijn decreasing diagrams method for proving confluence of ARS of the least uncountable cardinality and solution of the problem of incompleteness of the decreasing diagrams method with two labels and the absence of collapse of the hierarchy of decreasing Church-Rosser systems at the level 2). In Section 1 applicability of Van Oostrom–De Bruijn decreasing diagrams method to the tasks of proving confluence of ARS of the least uncountable cardinality is investigated

and it is proved that this method is complete for proving confluence of ARS of the least uncountable cardinality, and, assuming the Continuum Hypothesis, it is also complete for proving confluence of ARS of the cardinality of the continuum that include ARS induced by a wide range of models of interest to informatics and applied mathematics. This result fundamentally differs from the previously known results on completeness of the decreasing diagrams method for special classes of ARS, both in its scope, and the fact that it does not rely on the cofinality property for constructing ARS labellings in all cases, because, in the general case, the cofinality property does not hold for ARS of the least uncountable cardinality.

Section 2 concerns a generalization of Newman's Lemma for strictly inductive rewriting systems. One of the ways of weakening the strong normalization condition in Newman's lemma is to use the strict inductivity assumption: an ARS $(A, \rightarrow)$ is strictly inductive, if every nonempty chain in A in the sense of the preorder $\rightarrow^*$ has a least upper bound. The well-known Newman's counterexample cannot be used to disprove the hypothesis about the equivalence between the local confluence condition and the confluence condition for acyclic strictly inductive ARS. In Section 2 it is proved that the equivalence between the local confluence condition and the confluence condition for acyclic strictly inductive ARS holds, if the set of irreducible elements of the ARS is at most countable. However, there exists an acyclic, strictly inductive, locally confluent ARS that is not confluent. The latter ARS can be considered as strengthening of Newman's counterexample, however, it is necessarily uncountable and significantly differs from the usual Newman's counterexample (which is countable). Also, in the section an extension of these results to a theorem that generalizes Newman's lemma to all strictly inductive ARS is proposed.

Section 3 concerns development of special induction principles for proving properties of elements of rewriting systems that do not satisfy termination and countability assumptions. From the classical rewriting theory it is known that an ARS is terminating if and only if it satisfies Noetherian induction principle. This fact is useful for proving universal properties of elements of terminating ARS. However, ARS induced by non-discrete models often do not satisfy the termination condition. For this reason, Noetherian induction principle cannot be applied to them, and it is important to investigate alternative principles for proving universal properties of elements of ARS that are not necessarily terminating. In Section 3 such principles are proposed. In particular, in the section an induction principle for diamond-free complete partially ordered sets

is proposed (it can also be used for acyclic ARS that induce such partially ordered sets) and a common generalization of the well-founded induction principle and the real induction principle is proposed. Also, in the section a general approach to formulation of induction principles for different structures is proposed.

Section 4 concerns development of formal theories for analysis of properties of abstract non-discrete dynamical models. In the section an approach to generalization of abstract and labelled rewriting systems is proposed; this approach allows one to formalize continuous time processes of element transformation (rewriting); it is based on application of the model of nondeterministic complete Markovian systems (NCMS). In the section a decidable formal theory that can be used to state and check properties of trajectories of NCMS is proposed. Also, global timed bisimulation relations on states of labelled NCMS are investigated and a local necessary and sufficient condition for a relation to be a global timed bisimulation is obtained, a criterion for checking that a set is an underapproximation of a reach set of an NCMS based on local trajectory extension is proposed, a generalization of H. Friedman's notion of an EDS definable function to the notion of an EDS definable function that transforms complex-named data is proposed, a criterion of expressibility of partial predicates in the algebra of partial predicates with the predicate complement composition is obtained.

The dissertation is theoretical. The obtained results significantly improve understanding of limits of applicability of classical methods of the abstract rewriting theory and cases when new methods of analysis of ARS are required.

Keywords: rewriting systems, reduction, formal methods, formal proofs, formal verification, non-discrete models, nondeterministic models.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Ivanov I. Completeness of the decreasing diagrams method for proving confluence of rewriting systems of the least uncountable cardinality. Leibniz international proceedings in informatics. ISSN 1868-8969. 2025. Vol. 337. P. 25:1–25:20. [**Scopus**]
2. Ivanov I. On the cofinality property in the context of the hierarchy of decreasing Church-Rosser abstract rewriting systems. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2024. Vol. 3909. P. 466–479. [**Scopus**]
3. Ivanov I. On Newman’s lemma and non-termination. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2023. Vol. 3624. P. 14–24. [**Scopus**]
4. Ivanov I. Generalized Newman’s lemma for discrete and continuous systems. Leibniz international proceedings in informatics. ISSN 1868-8969. 2023. Vol. 260. P. 9:1–9:17. [**Scopus**]
5. Ivanov I. On induction principles for partial orders. Logica Universalis. ISSN 1661-8297. 2022. Vol. 16. P. 105–147. [**Scopus**]
6. Ivanov I. On Induction Principles for Diamond-Free Partial Orders. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2021. Vol. 1308. P. 166–190. [**Scopus**]
7. Ivanov I. On induction for diamond-free directed complete partial orders. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2020. Vol. 2732. P. 70–73. [**Scopus**]
8. Ivanov I., Nikitchenko M. Expressibility in the Kleene algebra of partial predicates with the complement composition. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2020. Vol. 1175. P. 50–67. [**Scopus**]
9. Ivanov I., Nikitchenko M. Inference rules for the partial Floyd-Hoare logic based on composition of predicate complement. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2019. Vol. 1007. P. 71–88. [**Scopus**]
10. Ivanov I., Nikitchenko M. On the Kleene algebra of partial predicates with predicate complement. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2019. Vol. 2393. P. 542–551. [**Scopus**]
11. Ivanov I., Kornilowicz A., Nikitchenko M. An inference system of an extension

- of Floyd-Hoare logic for partial predicates. Formalized mathematics. ISSN 1426-2630. 2018. Vol. 26, no. 2. P. 159–164. [**Web of Science**]
12. Kornilowicz A., Ivanov I., Nikitchenko M. Kleene algebra of partial predicates. Formalized mathematics. ISSN 1426-2630. 2018. Vol. 26, no. 1. P. 11–20. [**Web of Science**]
 13. Ivanov I., Kornilowicz A., Nikitchenko M. Implementation of the composition-nominative approach to program formalization in Mizar. Computer science journal of Moldova. ISSN 1561-4042. 2018. Vol. 26, no.1 (76). P. 59–76. [**Web of Science**]
 14. Nikitchenko M., Ivanov I., Kornilowicz A., Kryvolap A. Extended Floyd-Hoare logic over relational nominative data. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2018. Vol. 826. P. 41–64. [**Scopus**]
 15. Ivanov I., Nikitchenko M. On the sequence rule for the Floyd-Hoare logic with partial pre- and post-conditions. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2018. Vol. 2104. P. 716–724. [**Scopus**]
 16. Ivanov I. On the underapproximation of reach sets of abstract continuous-time systems. Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. ISSN 2075-2180. 2017. Vol. 247. P. 46–51. [**Scopus**]
 17. Ivanov I., Nikitchenko M., Kryvolap A., Kornilowicz A. Simple-named complex-valued nominative data – definition and basic operations. Formalized Mathematics. ISSN 1426-2630. 2017. Vol. 25, no. 3. P. 205–216. [**Web of Science**]
 18. Kornilowicz A., Kryvolap A., Nikitchenko M., Ivanov I. An approach to formalization of an extension of Floyd-Hoare logic. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2017. Vol. 1844. P. 504–523. [**Scopus**]
 19. Ivanov I., Nikitchenko M., Skobelev V.G. Proving properties of programs on hierarchical nominative data. Computer science journal of Moldova. ISSN 1561-4042. 2016. Vol. 24, no. 3 (72). P. 371–398. [**Web of Science**]
 20. Ivanov I. On local characterization of global timed bisimulation for abstract continuous-time systems. Lecture notes in computer science. ISSN 0302-9743. 2016. Vol. 9608. P. 216–234. [**Scopus**]
 21. Ivanov I., Nikitchenko M., Abraham U. On a decidable formal theory for abstract continuous-time dynamical systems. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2014. Vol. 469. P. 78–99. [**Scopus**]

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

22. Ivanov I. On non-triviality of the hierarchy of decreasing Church-Rosser abstract rewriting systems. Proceedings of the 13th International Workshop on Confluence. July 9, 2024, Tallinn, Estonia. P. 30-35.
23. Ivanov I. On confluence criteria for non-terminating abstract rewriting systems. Proceedings of the 12th International Workshop on Confluence. August 23-24, 2023, Obergurgl, Austria. P. 9-13.
24. Ivanov I. On generalizations of real induction. Conference on Mathematical Foundations of Informatics. Proceedings MFOI-2020. 12-16 January 2021, Kyiv, Ukraine. P. 162-167.
25. Ivanov I. On generalized well-founded induction. Logic and its Applications. 2nd World Logic Day – January 14, 2020. Logic and its Applications, The workshop. Book of Abstracts. January 14, 2020, Kyiv. P. 7-8.
26. Ivanov I. On the partial Floyd-Hoare logic based on predicate complement. 1st World Logic Day – January 14, 2019. Logic and its Applications, The workshop. Book of Abstracts. January 14, 2019, Kyiv. P. 4-5.
27. Ivanov E.V. On inductive definitions on non-well-ordered domains and their potential applications to verification of cyber-physical systems. Прикладні системи та технології в інформаційному суспільстві : зб. тез доповідей і наук. повідомл. учасників II Міжнародної науково-практичної конференції. Київ, 1 жовтня 2018. С. 67-68.
28. Kornilowicz A., Kryvolap A., Nikitchenko M., Ivanov I. Formalization of the algebra of nominative data in Mizar. Proceedings of the 2017 Federated Conference on Computer Science and Information Systems. September 3-6, 2017, Prague, Czech Republic. P. 237-244.
29. Ivanov I., Nikitchenko M., Skobelev V.G. Properties of nominative programs specified by effective definitional schemes. Conference on Mathematical Foundations of Informatics. Proceedings MFOI-2016. Institute of Mathematics and Computer Science, July 25-30, 2016, Chisinau, Moldova. P. 222-240.
30. Ivanov I., Kornilowicz A., Nikitchenko M.S. Formalization of nominative data in Mizar. Праці Міжнародної науково-практичної конференції “Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем” ТАAPSD’2015, 23-26 листопада 2015 р., м. Київ. С. 82-85.
31. Ivanov Ie.V., Nikitchenko M.S. On nominative Glushkov algebras. Матеріали

Всеукраїнської науково-практичної конференції “В.М. Глушков – піонер кібернетики”. 11 грудня 2014, м. Київ. С. 48-49.

Праці, які додатково відображають наукові результати дисертації

32. Ivanov I. Completeness of decreasing diagrams for the least uncountable cardinality. Archive of Formal Proofs. ISSN 2150-914X. 2025. April. 319 pages.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	19
ВСТУП	21
РОЗДІЛ 1. КОНФЛЮЕНТНІСТЬ АПС МІНІМАЛЬНОЇ НЕЗЛІЧЕННОЇ ПОТУЖНОСТІ	27
1.1 Повнота методу спадних діаграм для доведення конфлюентності переписувальних систем мінімальної незліченної потужності	27
1.1.1 Попередні зауваження	27
1.1.2 Пов'язані роботи інших авторів	32
1.1.3 Позначення і терміни	32
1.1.3.1 Позначення	32
1.1.3.2 Абстрактні переписувальні системи	33
1.1.3.3 Ординали та потужність	34
1.1.3.4 Переписувальні системи зі спадною властивістю Черча-Россера	35
1.1.3.5 Ієрархія систем зі спадною властивістю Черча- Россера	37
1.1.4 Головний результат підрозділу	38
1.1.5 Структура формального доказу теореми 1.1.1	41
1.1.5.1 Загальна ідея формального доказу теореми 1.1.1	41
1.1.5.2 Формалізація скінченних рівнів DCR ієрархії	43
1.1.5.3 Розширення підполя CCR відношення	45
1.1.5.4 Аналог леми Івамури про спрямовані множини для CCR відношень	47
1.1.5.5 Побудова CCR лишку в класі DCR_2	48
1.1.5.6 Завершення доведення головної теореми підрозділу	50

1.2	Неповнота методу спадних діаграм з двома мітками та відсутність колапсу на рівні 2 ієрархії систем, що мають спадну властивість Черча–Россера	52
1.3	Властивість кофінальності в контексті ієрархії АПС зі спадною властивістю Черча-Россера	55
1.3.1	Теорема про зв’язний кофінальний підграф	55
1.3.2	Доведення теореми 1.3.1	57
1.3.3	Доведення наслідку 1.3.1	67
1.3.4	Формалізація в системі інтерактивного доведення теорем	69
1.4	Висновки до розділу 1	70
РОЗДІЛ 2. КОНФЛЮЕНТНІСТЬ СТРОГО ІНДУКТИВНИХ АПС		73
2.1	Узагальнення леми Ньюмана для ациклічних строго індуктивних систем зі зліченною множиною нормальних форм	73
2.1.1	Попередні зауваження	73
2.1.2	Терміни	75
2.1.3	Головні результати підрозділу	76
2.1.4	Формалізація у системі інтерактивного доведення теорем	89
2.2	Узагальнена лема Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем	91
2.2.1	Попередні зауваження	91
2.2.2	Допоміжні означення та факти	91
2.2.2.1	Принцип нетерової індукції для АПС	92
2.2.2.2	Принцип відкритої індукції для АПС	92
2.2.2.3	Квазі-нормальні форми	94
2.2.2.4	Квазі-локальна конфлюентність	96
2.2.3	Головний результат підрозділу	98
2.2.4	Наслідки головного результату підрозділу та приклади	99
2.2.5	Формалізація в системі інтерактивного доведення теорем	105
2.3	Висновки до розділу 2	108
РОЗДІЛ 3. ПРИНЦИПИ ІНДУКЦІЇ ДЛЯ СИСТЕМ, ЩО НЕ ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ ПРИПУЩЕННЯМ ПРО ТЕРМІНАЛЬНІСТЬ ТА ЗЛІЧЕННІСТЬ		110

3.1	Принцип індукції для вільних від алмазів повних частково впорядкованих множин	110
3.1.1	Попередні зауваження	110
3.1.2	Пов'язані роботи інших авторів	111
3.1.3	Позначення	114
3.1.4	Зворотний принцип відкритої індукції	114
3.1.5	Головні результати підрозділу	115
3.1.6	Принцип поповнення	121
3.1.7	Формалізація в системі інтерактивного доведення теорем . .	126
3.2	Узагальнені принципи індукції для частково впорядкованих множин і ациклічних АПС	128
3.2.1	Попередні зауваження	128
3.2.2	Позначення і терміни	130
3.2.3	Прямі принципи ФО індукції	133
3.2.3.1	Ідея принципів ФО індукції	133
3.2.3.2	Визначення принципів ФО індукції	134
3.2.3.3	Приклади принципів ФО індукції	142
3.2.4	Непрямі принципи ФО індукції	148
3.2.4.1	Ідея непрямих принципів індукції	148
3.2.4.2	Визначення принципів непрямой індукції	150
3.2.4.3	Приклад непрямого принципу ФО індукції	152
3.2.5	Непрямий принцип індукції для всіх частково впорядкованих множин	153
3.2.5.1	Відповідності впорядкованих множин	153
3.2.5.2	Непрямий принцип індукції	157
3.2.5.3	Доведення теореми 3.2.1	158
3.2.6	Спільне узагальнення принципів фундової і дійсної індукції та його формалізація у системі інтерактивного доведення теорем	167
3.3	Висновки до розділу 3	170

РОЗДІЛ 4. АНАЛІЗ АБСТРАКТНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ 172

4.1	Розв'язна формальна теорія для абстрактних динамічних систем з неперервним часом	172
4.1.1	Попередні зауваження	172

4.1.2	Пов'язані роботи інших авторів	174
4.1.3	Допоміжні позначення, означення, факти	175
4.1.4	Формальна мова для опису властивостей траєкторій НПМС .	177
4.1.5	Головний результат підрозділу	182
4.2	Локальна характеристика глобальної часової бісимуляції для абстрактних систем з неперервним часом	192
4.2.1	Попередні зауваження	192
4.2.2	Пов'язані роботи інших авторів	193
4.2.3	Розмічені НПМС	195
4.2.4	Часові симуляції та бісимуляції для НПМС	196
4.2.5	Головні результати підрозділу	197
4.2.6	Доведення теорем 4.2.1 та 4.2.2	198
4.3	Апроксимація множин досяжності для абстрактних систем з непе- рервним часом	248
4.3.1	Попередні зауваження	248
4.3.2	Позначення і терміни	248
4.3.3	Головний результат підрозділу	250
4.4	Узагальнені ефективні схеми визначення	252
4.4.1	Попередні зауваження	252
4.4.2	Позначення і терміни	253
4.4.3	Головні результати підрозділу	258
4.5	Виразність в алгебрі предикатів з предикатним доповненням	263
4.5.1	Попередні зауваження	263
4.5.2	Позначення і терміни	263
4.5.3	Головні результати підрозділу	267
4.5.4	Предикатне доповнення у перед- і після-умовах	269
4.5.5	Доведення теореми 4.5.1	272
4.5.6	Доведення теореми 4.5.2	279
4.5.7	Доведення теореми 4.5.3	280
4.6	Висновки до розділу 4	282
ВИСНОВКИ		284
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ		286

ДОДАТОК А. Відповідність між позначеннями, що використовуються у формалізації в Isabelle та у тексті дисертації	301
Загальні позначення	301
Позначення підпункту 1.1.5.2	302
Позначення підпункту 1.1.5.3	302
Позначення підпункту 1.1.5.4	303
ДОДАТОК Б. Інструкції щодо перевірки формальних доведень	304
ДОДАТОК В. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації	305

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\neg, \vee, \wedge$	— заперечення, диз'юнкція, кон'юнкція
$\Rightarrow, \Leftrightarrow$	— імплікація, еквівалентність
$Bool$	— множина $\{False, True\}$
$\mathbb{N}$	— множина натуральних чисел $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	— множина невід'ємних цілих чисел $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	— множина цілих чисел
$\mathbb{R}$	— множини дійсних чисел
$\mathbb{R}_+$	— множина невід'ємних дійсних чисел
$\emptyset$	— порожня множина
$\in, \subseteq$	— належність, включення
$\cup, \cap, \setminus$	— об'єднання, перетин, різниця множин
$\times$	— декартів добуток множин
2^A	— булеан множини A
$ A $	— потужність множини A
$f : A \rightarrow B$	— тотальна функція з A в B
$f : A \rightharpoonup B$	— часткова функція з A в B
$(a_i)_{i \in I}$	— індексована сім'я
$dom(f)$	— область визначення функції
$f _A$	— обмеження функції f на множину A
R^{-1}	— обернене відношення до бінарного відношення R
R^+	— транзитивне замикання бінарного відношення R
$R^=$	— рефлексивне замикання бінарного відношення R
R^*	— рефлексивно-транзитивне замикання відношення R
$\sup A$ або $\sup_{\leq} A$	— точна верхня межа множини A (в сенсі порядку $\leq$)
$\inf A$ або $\inf_{\leq} A$	— точна нижня межа множини A (в сенсі порядку $\leq$)
$[a, b]$	— замкнений проміжок у впорядкованій множині
$[a, b), (a, b]$	— напіввідкриті проміжки у впорядкованій множині
(a, b)	— упорядкована пара або відкритий проміжок
$\langle a, b \rangle$	— упорядкована пара
$\square$	— кінець доведення

$f(x) \downarrow$	— значення $f(x)$ визначене
$f(x) \uparrow$	— значення $f(x)$ не є визначеним
$f(x) \cong g(x)$	— сильна рівність: $f(x) \downarrow$ тоді і тільки тоді, коли $g(x) \downarrow$, і якщо $f(x) \downarrow$, то $f(x) = g(x)$
$f \circ g$	— функціональна композиція: $(f \circ g)(x) \cong f(g(x))$
$\mathfrak{I}$	— множина всіх проміжків в $\mathbb{R}_+$, що містять більше ніж один елемент
$f_1 \dot{=}_A f_2$	— обмеження функцій f_1, f_2 на множину A рівні
$f_1 \dot{=}_{t-} f_2$	— обмеження функцій f_1, f_2 на деякий лівий півокіл t рівні
$f_1 \dot{=}_{t+} f_2$	— обмеження функцій f_1, f_2 на деякий правий півокіл t рівні
$f \sqsubseteq g$	— графік функції f є підмножиною графіку g
$f \sqsubset g$	— графік функції f є власною підмножиною графіку g
$x \mapsto e(x)$	— функція, визначена виразом $e(x)$
АПС	— абстрактна переписувальна система
РПС	— розмічена переписувальна система
DCR	— спадна властивість Черча-Россера
НПМС	— недетермінована повна марківська система

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Теорія переписувальних систем є частиною теоретичних основ інформатики, що вивчає математичні моделі покрокового перетворення (переписування) об'єктів, які, типово, є пов'язаними з процесами обчислень або логічного виводу [5, 108, 155, 196, 133]. Історично, дана теорія походить від теорій лямбда числення та комбінаторної логіки [16]. Методи теорії переписувальних систем мають застосування у контекстах визначення операційної семантики та реалізації мов програмування [161, 129, 139, 41, 124], специфікації та верифікації програмного та апаратного забезпечення [40, 139, 124], моделювання та аналізу систем у різних галузях [139, 14, 109, 124, 41, 8]. Розробки Київської школи кібернетики, заснованої В.М. Глушковим, що стосуються застосувань теорії переписувальних систем, включають, зокрема, мову АНАЛІТИК [42, 124], систему автоматизації доведень [131], систему алгебраїчного програмування [120, 121, 124].

Теорія абстрактних переписувальних систем (АПС) охоплює базові результати, важливі для теорії переписувальних систем, що можуть бути сформульовані на абстрактному рівні, що не накладає обмежень на структуру та подання елементів системи і правил переписування [5, 108, 155, 196] (наприклад, принцип нетерової індукції для переписувальних систем, лема Ньюмана, метод спадних діаграм ван Оострома-де Брейна). Однією з центральних тем класичної теорії АПС є дослідження властивості Черча-Россера [145, 56] (або еквівалентної властивості конфлюентності), що виражає зв'язок між відношеннями конверсії (англ. convertibility) та редукції (англ. reduction) та має як наслідок властивість існування не більше однієї нормальної форми у кожного елемента системи [108] (єдиність нормальної форми відносно редукції, англ. unique normal form property with respect to reduction [108]). Остання властивість може бути інтерпретована таким чином: хоча недетермінована система може допускати багато виконань, неможливо, щоб два таких виконання починалися в одному стані, але завершилися у різних станах.

Методи перевірки властивості Черча-Россера (конфлюентності) досліджувалися протягом тривалого періоду 20-го століття та на початку 21-го століття як на абстрактному рівні (характерному для теорії абстрактних переписувальних си-

стем), так і на рівнях теорій переписувальних систем спеціального вигляду (наприклад, систем переписування термів). Зокрема, такі методи вивчалися у роботах М.Н.А. Newman, J.R. Hindley, B.K. Rosen, N.G. de Bruijn, G. Huet, R. Nederpelt, J.W. Klop, V. van Oostrom [145, 52, 176, 25, 56, 143, 107, 202] та інших дослідників; пов'язані дослідження проводили А.В. Анісімов, В.Г. Боднарчук, А.Ю. Дорошенко, Г.М. Жолткевич, О.А. Летичевський, О.О. Летичевський, М.С. Львов, О.В. Лялецький, В.С. Песчаненко та інші дослідники [204, 42, 29, 187, 27, 26, 214, 122, 126, 125, 153, 152, 130].

Тепер методи доведення конфлюентності є добре вивченими для систем, що мають спеціальні властивості, характерні для дискретних моделей обчислень, такі як термінальність або зліченність [5, 108, 155, 196]. Подібна ситуація має місце і для інших результатів теорії АПС (наприклад, принцип нетерової індукції застосовний до термінальних АПС). Однак, визначення застосовності деяких із зазначених методів, відомих для злічених або термінальних систем, до незлічених нетермінальних систем вважається деякими провідними дослідниками з теорії переписувальних систем важливою і фундаментальною відкритою проблемою [32].

Крім того, властивості, такі, як термінальність і зліченність не є характерними для АПС, що породжені моделями, що, в певному сенсі, поєднують недискретність, недетермінізм, невизначеність (наприклад, у сенсі інтервальних моделей невизначеності), які є важливими для сучасних міждисциплінарних напрямків, пов'язаних з інформатикою, наприклад, для кіберфізичних систем [6, 119, 123] (систем, що поєднують обчислювальні та фізичні процеси). Прикладом АПС, породженої недетермінованою дискретно-неперервною (гібридною [43]) динамічною системою (що, наприклад, моделює поведінку кіберфізичної системи) може бути пара $(S, \rightarrow)$, де S – множина повних станів, що включають інформацію про поточні значення неперервних і дискретних змінних системи, а відношення $\rightarrow$ – таке, що $s_1 \rightarrow s_2$ тоді і тільки тоді, коли гібридна система може перейти з s_1 до s_2 або внаслідок неперервної еволюції неперервного стану межах одного дискретного стану, або внаслідок одного переходу між двома дискретними станами.

У зв'язку з вищезазначеним, для теоретичних основ інформатики є актуальною побудова узагальненої теорії АПС, що розширює та узагальнює класичні результати теорії АПС на випадки, що становлять інтерес з точки зору аналізу недискретних математичних моделей.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, гранта-

ми. Дисертаційна робота є складовою частиною наукових робіт, які ведуться на кафедрі програмних систем і технології факультету інформаційних технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Частина досліджень, що складають роботу, виконувалась за часткової підтримки програми Erasmus+ KA107 у 2018 та 2019 роках (академічна мобільність для наукових досліджень та викладання, Університет Білостоку, Польща).

Автор роботи був членом робочої групи WG4 “Libraries of formal proofs” проєкту “European Research Network on Formal Proofs” (Cost Action CA20111) у 2024 і 2025 році.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є побудова теорії, що розширює та узагальнює класичні результати теорії абстрактних переписувальних систем (АПС) на випадки, що становлять інтерес з точки зору аналізу недискретних математичних моделей систем і процесів.

Завдання дослідження:

- аналіз можливості послаблення припущень класичних результатів і методів теорії АПС (наприклад, слабка або сильна нормалізація, зліченність) для розширення раніше відомих меж їх застосовності;
- розроблення нових методів аналізу властивостей АПС для випадків, на які класичні методи теорії АПС не можуть бути поширені;
- аналіз меж застосовності нових, розширених, та/або узагальнених результатів теорії АПС.

Об’єкт дослідження – абстрактні переписувальні системи.

Предмет дослідження – властивості абстрактних переписувальних систем, породжених недискретними математичними моделями, методи їх перевірки та зв’язки між такими властивостями.

Методи дослідження. У роботі використовуються математичні засади формальних методів (математична логіка, теорія абстрактних переписувальних систем), а також методи формалізації та автоматизованої перевірки доведень за допомогою комп’ютерних систем інтерактивного доведення теорем. Наприклад, доказ повноти методу спадних діаграм для доведення конфлюентності абстрактних переписувальних систем мінімальної незліченної потужності, отриманий автором дисертації, був формалізований та перевірений за допомогою відомої системи інтерактивного доведення теорем Isabelle [57], що, у зв’язку з особливостями реалізації та тривалою історією даної системи, може розглядатися як свідчення про високий

рівень достовірності отриманого результату.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що

- *вперше* доведено повноту методу спадних діаграм ван Оострома-де Брейна для доведення конфлюентності абстрактних переписувальних систем мінімальної незліченної потужності (попередні відомі результати: V. van Oostrom, 1994 [202] – метод є повним для доведення конфлюентності систем, що мають властивість кофінальності; J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek, 2018 [31] – метод з двома мітками є повним для доведення конфлюентності систем, що мають властивість кофінальності; також, загальновідомо, що властивість кофінальності може не виконуватись для конфлюентних абстрактних переписувальних систем будь-якої незліченної потужності); за припущення континуум-гіпотези, з отриманого у дисертації результату випливає, що метод спадних діаграм є повним для доведення конфлюентності довільних бінарних відношень на множині дійсних чисел, множині послідовностей дійсних чисел, індексованих натуральними числами, множині неперервних дійсних функцій, множині орієнтованих графів із фіксованою зліченною множиною вузлів і на різноманітних інших структурах, що становлять інтерес з точки зору інформатики та прикладної математики; доведення повноти було формалізовано та автоматично перевірено за допомогою відомої системи інтерактивного доведення теорем Isabelle, обсяг формального доказу перевищує 300 сторінок у форматі Archive of Formal Proofs [81];
- *вперше* отримано розв’язки проблем неповноти методу спадних діаграм з двома мітками та відсутності колапсу на рівні 2 ієрархії систем, що мають спадну властивість Черча-Россера (дані проблеми були сформульовані J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek у 2018 році як відкриті проблеми [31, Open Problem 32, 33]);
- *вперше* запропоновано узагальнення леми Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем;
- *вперше* запропоновано спеціальні принципи індукції для доведення властивостей елементів переписувальних систем, що не задовольняють припущенням про термінальність та зліченність;
- *дістали подальшого розвитку* формальні теорії для аналізу властивостей абстрактних недискретних динамічних моделей.

Теоретичне і практичне значення отриманих результатів. Дисертація

має теоретичний характер та робить істотний внесок до теорії переписувальних систем. Отримані результати суттєво удосконалюють розуміння меж застосовності класичних методів теорії абстрактних переписувальних систем та випадків, коли є необхідність застосування нових методів аналізу АПС.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертації отримані автором особисто. З публікацій зі співавторами на захист виносяться лише результати, отримані автором дисертації. У роботах 1–6 автору дисертації належать неформалізовані і формалізовані доведення основних результатів (за допомогою систем інтерактивного доведення теорем). У роботах зі співавторами 8–15, 17–19, 21, 28–31 автору дисертації належать формулювання ідей, визначення цілей і методів дослідження, неформалізовані доведення основних результатів.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати були представлені на міжнародних наукових конференціях або воркшопах, зокрема:

- 10th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2025), July 14-20, 2025, Birmingham, United Kingdom;
- 13th International Workshop on Confluence (IWC 2024), July 9, 2024, Tallinn, Estonia;
- 12th International Workshop on Confluence (IWC 2023), August 23-24, 2023, Obergurgl, Austria;
- XI International Scientific Conference “Information Technology and Implementation” (IT&I-2024), November 20-21, 2024, Kyiv, Ukraine;
- 8th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2023), July 3-6, 2023, Rome, Italy;
- X International Scientific Conference “Information Technology and Implementation” (IT&I-2023), November 20-21, 2023, Kyiv, Ukraine;
- 16th International Conference on Information and Communication Technologies in Education, Research, and Industrial Applications (ICTERI 2020), Kharkiv, Ukraine, October 6-10, 2020;
- Conference on Mathematical Foundations of Informatics. MFOI-2020. 12-16 Jan. 2021, Kyiv, Ukraine;
- Logic and its Applications. 2nd World Logic Day – January 14, 2020. The workshop, Kyiv, Ukraine;
- Logic and its Applications. 1st World Logic Day – January 14, 2019. The workshop, Kyiv, Ukraine.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 21 науковій праці у закордонних виданнях, проіндексованих у наукометричних базах Web of Science та/або Scopus. Апробацію матеріалів дисертації засвідчують 10 праць, додатково відображає наукові результати дисертації 1 праця.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотацій, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, поділених на підрозділи, висновків, списку використаних джерел, трьох додатків. Текст містить 13 рисунків. Список використаних джерел включає 214 найменувань і займає 15 сторінок. Загальний обсяг роботи становить 308 сторінок, обсяг основного тексту становить 265 сторінок.

РОЗДІЛ 1. КОНФЛЮЕНТНІСТЬ АПС МІНІМАЛЬНОЇ НЕЗЛІЧЕННОЇ ПОТУЖНОСТІ

1.1. Повнота методу спадних діаграм для доведення конфлюентності переписувальних систем мінімальної незліченної потужності

1.1.1. Попередні зауваження

Абстрактна переписувальна система (АПС) [196, 5, 133] є парою $(A, \rightarrow)$ з множини A елементів та бінарного відношення $\rightarrow$ на A , де $\rightarrow$ називається відношенням редукції, її елементи (пари (a, b) , такі, що $a \rightarrow b$) називаються кроками редукції, а відношення еквівалентності, породжене $\rightarrow$ називається відношенням конверсії. Якщо не існує b , такого, що $a \rightarrow b$, то a називається незвідним елементом. Якщо $a \rightarrow^* b$ і b є незвідним (де $\rightarrow^*$ використовується для позначення рефлексивно-транзитивного замикання відношення $\rightarrow$), то b називається нормальною формою a . Наприклад, кроки редукції можуть розглядатись як кроки в процесі обчислення або автоматизованого міркування, а незвідні елементи можуть розглядатись як можливі результати таких процесів. Властивість Черча-Россера (CR) АПС [196, 5, 133] виражає такий зв'язок між відношеннями конверсії та редукції: для кожних a, b, c в A , якщо $a \leftrightarrow^* b$, то існує c в A , такий, що $a \rightarrow^* c$ і $b \rightarrow^* c$, де $\leftrightarrow$ позначає симетричне замикання $\rightarrow$.

У цьому контексті властивість конфлюентності АПС є еквівалентною властивості CR. Одним з наслідків властивості CR (або конфлюентності) є те, що кожний елемент a в A має не більше однієї нормальної форми (властивість єдиності нормальної форми відносно редукції). Це можна інтерпретувати таким чином: хоча може бути багато шляхів обчислення, які починаються з a , неможливо, щоб два такі шляхи завершувались з двома різними результатами (нормальними формами). Таке припущення є корисним, наприклад, при тестуванні недетермінованого програмного забезпечення.

Методи перевірки конфлюентності досліджувались протягом тривалого часу для різних класів переписувальних систем. Наприклад, для абстрактних переписувальних систем (АПС) лема Ньюмана [145] надає критерій перевірки конфлюентності для сильно нормалізуючих (термінальних) АПС, тобто для АПС, що не мають нескінченних послідовностей редукцій $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots$, що зводить задачу пе-

ревірки властивості конфлюентності до задачі перевірки локальної конфлюентності. Подальші роботи щодо властивості Черча-Россера / конфлюентності для *абстрактних* переписувальних систем включають [176, 25, 56, 107, 201, 202, 30, 31]. Одним з найбільш загальних відомих методів доведення конфлюентності є метод спадних діаграм ван Оострома [202, 201]. Ряд інших критеріїв конфлюентності можна розглядати як його прямі наслідки [201]. Огляд історії цього методу та його зв'язку з роботами де Брейна [25] наведений у [30], інформація про модифіковані версії цього методу (включаючи варіант для відношення конверсії) наведені у [203, 12, 211], приклади застосування методу наведені у [201, 53].

Щоб довести, що АПС є конфлюентною за допомогою методу спадних діаграм, необхідно [202, 201] обрати множину міток L і фундований частковий порядок $\prec$ на L , і побудувати розмічену версію АПС (що асоціює мітки з кроками редукції), що задовольняє умову, подібну до умови локальної конфлюентності, але з певними обмеженнями на те, яким чином мітки кроків редукції, які використовуються в цій умові, пов'язані з $\prec$. З теореми [201, теорема 3.7] ван Оострома випливає, що якщо існує розмічена версія АПС, що задовольняє згадану вище умову, початкова АПС є конфлюентною. Напівформально, клас АПС зі спадною властивістю Черча-Россера (DCR) [201] – це клас всіх АПС, для яких конфлюентність може бути доведена методом спадних діаграм (тут “може бути доведена” означає, що “існує розмічена версія АПС, яка задовольняє умови [201, теорема 3.7]”).

Враховуючи, що цілий ряд раніше відомих критеріїв конфлюентності можна розглядати як прямі наслідки методу спадних діаграм, в роботі [31], J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek дослідили можливість використання обмежених версій цього методу для оцінювання складності задач доведення конфлюентності. Більш детально, вони розглянули обмежені варіанти методу спадних діаграм, де числа $0, 1, \dots, n - 1$ (для фіксованого n) зі звичайним порядком на них могли бути використані в розмітці для доведення конфлюентності АПС, і, продовжуючи цю ідею, ввели ієрархію підкласів класу DCR АПС (скорочено, *DCR ієрархія*), таку, що, напівформально, для кожного ординалу α , клас DCR_α у цій ієрархії складається з конфлюентних АПС, для яких конфлюентність може бути доведена методом спадних діаграм за допомогою фіксованої множини міток $L = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ (ординалів, менших, ніж α) і фіксованого фундованого порядку на цій множині, що є обмеженням звичайного порядку на ординалах на L . Для цих класів виконуються

такі включення [31]:

$$DCR_0 \subseteq DCR_1 \subseteq DCR_2 \subseteq DCR_3 \subseteq \dots$$

У [31] було показано, що кожна АПС, що має властивість кофінальності [107, 31] належить класу DCR_2 (знаходиться на рівні 2 DCR ієрархії). Також було відомо [107, 31], що зліченні конфлюентні АПС (що є важливими, наприклад, для моделювання дискретних процесів) мають властивість кофінальності, тому у [31] було встановлено, що зліченні конфлюентні АПС належать класу DCR_2 (їх конфлюентність може бути доведена методом спадних діаграм з використанням множини міток $\{0, 1\}$ зі звичайним порядком). Однак, також відомо [31, с. 14, примітка 3], що *незліченні* конфлюентні АПС (будь-якої незліченної потужності) можуть *не* мати властивості кофінальності. При цьому, як впливає з [32, Open Problem 6.6], питання надання локальних критеріїв для конфлюентності незлічених АПС може розглядатись як фундаментальна відкрита проблема в теорії переписувальних систем. Це вказує на важливість дослідження застосовності методу спадних діаграм для доведення конфлюентності АПС, що не обов'язково мають властивість кофінальності.

У цьому підрозділі описано формальний доказ у системі Isabelle/HOL [151, 206], що встановлює, що кожна конфлюентна АПС $(A, \rightarrow)$, така, що потужність її відношення редукції $\rightarrow$ не більша за перший незліченний кардинал $\aleph_1$ належить класу DCR_3 , тобто конфлюентність $(A, \rightarrow)$ може бути доведена методом спадних діаграм за допомогою фіксованої множини міток $L = \{0, 1, 2\}$, упорядкованої таким чином, що $0 < 1 < 2$. Isabelle [57, 151] є відомим програмним забезпеченням інтерактивного доведення теорем з невеликим логічним ядром, що забезпечує можливість формулювання тверджень і перевірки доведень у кількох цільових логіках, до яких належать, зокрема, HOL (англ. higher-order logic) [151, 162] та ZF (теорія множин Цермело-Френкеля). Isabelle може бути використана [57] для перевірки математичних текстів, а також для формальної специфікації та верифікації програмного забезпечення. У даній системі користувач може вводити нові визначення та формулювати твердження (леми, теореми) за допомогою спеціальної формальної мови [57]. У деяких випадках, доказ твердження може бути отримано автоматично (за допомогою систем автоматичного доведення теорем), але у багатьох нетривіальних випадках користувач має надати скрипт або структурований текст доведення [57]. Формалізації в Isabelle деяких класичних результатів теорії

переписувальних систем включають [192, 58, 212].

Отриманий у даному підрозділі результат (повнота методу спадних діаграм для АПС мінімальної незліченної потужності) також може бути сформульований в теорії множин Цермело-Френкеля з аксіомою вибору (ZFC) [36]. Якщо додатково приймається континуум-гіпотеза [191] (що є незалежною від ZFC за припущення про несуперечливість ZFC [191]), з головного результату підрозділу випливає, що метод спадних діаграм є повним для доведення конфлюентності АПС потужності континууму, і, таким чином, цей метод охоплює задачі доведення конфлюентності для АПС на багатьох математичних структурах, що використовуються в інформатиці та прикладній математиці [6, 119]. У цьому випадку, теоретично, метод спадних діаграм є достатнім для встановлення конфлюентності АПС, коли її елементами є:

- дійсні числа;
- скінченновимірні дійсні вектори / матриці;
- нескінченні графи на фіксованій зліченній множині вершин (оскільки множина всіх бінарних відношень на множині натуральних чисел рівнопотужна множині дійсних чисел $\mathbb{R}$);
- нескінченні послідовності натуральних або дійсних чисел, індексовані натуральними числами (альтернативно, функції $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ або $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$);
- неперервні або кусково-неперервні функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (оскільки множина всіх *неперервних* функцій $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ рівнопотужна множині $\mathbb{R}$);
- інші математичні об'єкти, що утворюють множину потужності континууму (або меншої потужності).

Хоча теорія переписувальних систем часто використовується для аналізу перетворень скінченних об'єктів, таких, як скінченні терми (у не більш ніж зліченній сигнатурі), у згаданих вище випадках це *не* має бути так: метод спадних діаграм може бути застосований до АПС, які описують перетворення таких об'єктів, як, наприклад, функції $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Отриманий у підрозділі результат має фундаментальні відмінності від попередніх результатів щодо повноти методу спадних діаграм для спеціальних класів АПС [202, 30, 31]. Ці відмінності можуть бути пояснені таким чином. Властивість конфлюентності тісно пов'язана з абстрактним варіантом проблеми слів (англ. word problem) [5], що полягає у питанні, чи належать два довільно заданих елементи відношенню еквівалентності, породженому відношенням редукції. Відповідно

до класичної теорії АПС [145], для конфлюентних сильно нормалізуючих (термінальних) АПС дана проблема може бути, в принципі, вирішена шляхом довільного слідування за відношенням редукції від початкових елементів до їх нормальних форм і порівняння нормальних форм. У випадку нетермінальних злічених АПС така процедура може не завершуватись, але абстрактна проблема слів, все ж, має особливу структуру, що впливає з властивості кофінальності [107], а саме, вона рівносильна абстрактній проблемі слів для деякої детермінованої однокрокової стратегії редукції [198, розділ 2], [196] (функціонального підвідношення відношення редукції, відносно якого множина нормальних форм є тією самою множиною, що множина нормальних форм відносно відношення редукції), тобто для будь-якої зліченої конфлюентної АПС існує детермінована однокрокова стратегія редукції, що породжує те саме відношення еквівалентності, що $\rightarrow$. Подібна ідея детермінізації АПС була суттєво використана у [31] для доведення повноти методу спадних діаграм з двома мітками для злічених АПС (або ширше, АПС з властивістю кофінальності). Однак, така ідея детермінізації *не може* бути застосована для класу всіх конфлюентних АПС будь-якої фіксованої незліченної потужності через існування конфлюентних АПС, що *не мають* детермінованих однокрокових стратегій редукції, що породжують те саме відношення еквівалентності, що редукція (зберігають відношення конверсії / абстрактну проблему слів) [31, примітка 3], наприклад, множини скінченних підмножин незліченної множини разом відношенням редукції, визначеним аналогічно до відношення редукції у прикладі [31, примітка 3]. У зв'язку з цим, для вирішення проблеми повноти методу спадних діаграм для мінімальної незліченної потужності, у даній роботі здійснено новий загальний аналіз структури тих конфлюентних відношень мінімальної незліченної потужності, що *не* мають властивості кофінальності і *не* можуть бути детермінізовані у спосіб, подібний до [31].

Решта даного підрозділу має таку структуру. У пункті 1.1.2 надано огляд пов'язаної літератури. У пункті 1.1.3 описано терміни і позначення, що використовуються далі. У пункті 1.1.4 надано:

- неформалізоване формулювання (природною мовою) головного результату підрозділу;
- формулювання формалізованої версії головного результату підрозділу в Isabelle/HOL (теорема `thm_main` у файлі `DCRN1.thy` за посиланням [78]).

У пункті 1.1.5 описано структуру формального доказу з [78] природною мовою

за допомогою теорії множин. Таблиці відповідності між позначеннями, що використовуються в дисертації та у файлі за посиланням [78] (на формальній мові Isabelle/HOL) наведені в додатку А.

Для перевірки коректності головного результату підрозділу може бути використане програмне забезпечення Isabelle 2025 [57]. Інструкції щодо повторної перевірки формальних доказів у програмному забезпеченні Isabelle наведені в додатку Б. Наведені у даному підрозділі і у решті розділу результати також описані у [82, 87, 64, 81, 78, 83, 79, 86].

1.1.2. Пов'язані роботи інших авторів

Роботи [202, 201, 30, 31, 32] безпосередньо пов'язані зі змістом цього підрозділу. Зокрема, вони встановлюють, що кожна АПС, яка має властивість кофінальності, має спадну властивість Черча-Россера (DCR), або, більш детально, належить класу DCR_2 . З цього випливає, що кожна зліченна конфлюентна або слабо нормалізуюча конфлюентна АПС має спадну властивість Черча-Россера.

Додатково, тема цього підрозділу пов'язана зі спрямованими множинами: для непорожньої конфлюентної АПС $(A, \rightarrow)$, що є слабо зв'язною як орієнтований граф, з властивості Черча-Россера випливає, що $(A, \rightarrow^*)$ є спрямованою передвпорядкованою множиною. Спрямовані множини вивчалися в багатьох роботах, в т.ч. [200, 104, 45, 134, 205, 59, 140, 141, 197, 28]. Різні роботи, що стосуються структури або класифікації (нескінченних) спрямованих множин або більш загальних перед-/частково впорядкованих множин, наприклад, [134, 205, 59, 140, 141, 197, 28], є, в широкому сенсі, пов'язаними з темою даного підрозділу. Однак, відсутність припущення про транзитивність відношення редукції $\rightarrow$ є специфічною для дослідження властивості конфлюентності.

1.1.3. Позначення і терміни

В якості базової теорії для наведених нижче тверджень може бути використана теорія множин фон Неймана-Бернайса-Геделя (NBG) [137, 36] з аксіомою глобального вибору [36, с. 133]. Формальні твердження з формалізації в Isabelle/HOL [78], що згадуються у тексті, можуть бути інтерпретовані у теорії множин відповідно до [162, 115, 118]. Формулювання головного результату підрозділу (теорема 1.1.1) не використовує власні класи, тому цей результат також має місце в ZFC.

1.1.3.1. Позначення

Будемо використовувати такі позначення:

- $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ є логічним запереченням, диз'юнкцією, кон'юнкцією та імпліка-

цією відповідно;

- $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ є послідовністю елементів, індексованих невід’ємними цілими числами;
- $(a_i)_{i \in I}$ є індексованою сім’єю з множиною індексів I (тобто тотальною функцією на множині I).

Для будь-якої множини A будемо називати $R \subseteq A \times A$ (бінарним) відношенням і будемо називати $R' \subseteq R$ підвідношенням R . Якщо A, B є будь-якими множинами, n є додатним цілим числом, $R \subseteq A \times A$, то:

- $\text{Fld}(R) = \{a \mid \exists b (a, b) \in R\} \cup \{b \mid \exists a (a, b) \in R\}$,
 $\text{Fld}(R)$ буде називатись *полем* R ;
- $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$;
- $\text{Id}_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$;
- $R^n = \{(a, b) \mid \exists a_0, \dots, a_n \ a = a_0 \wedge b = a_n \wedge \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\} (a_i, a_{i+1}) \in R\}$;
- $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, тобто R^+ є транзитивним замиканням R ;
- $R|_B = R \cap (B \times B)$, тобто $R|_B$ є обмеженням R на B .

Зауваження 1.1.1. Відношення будуть позначатись літерами (наприклад, R, r, s) або спеціальними символами (наприклад, $\rightarrow$). В останньому випадку для позначення належності пари відношенню буде використовуватись інфіксна нотація, наприклад, $a \rightarrow b$.

1.1.3.2. Абстрактні переписувальні системи

Наведемо декілька стандартних означень з літератури з переписувальних систем [108, 5, 133], що будуть використовуватись далі.

Означення 1.1.1 ([108, 5, 133]). *Абстрактна переписувальна система* (АПС) є парою $(X, \rightarrow)$ з множини X та бінарного відношення $\rightarrow \subseteq X \times X$ (відношення редукції).

Зауваження 1.1.2. Деякі автори визначають АПС як пару з множини і індексованої сім’ї відношень $(\rightarrow_i)_{i \in I}$. У даній роботі системи з індексованими сім’ями редукцій будуть називатись розміченими переписувальними системами (РПС), а не АПС.

Нехай $(X, \rightarrow)$ є АПС. Будемо позначати як $\rightarrow^*$ рефлексивно-транзитивне замикання $\rightarrow$ на X .

Означення 1.1.2 ([108, 5, 133]). Нехай $x \in X$. Тоді

1. x є звідним, якщо існує $x' \in X$, такий, що $x \rightarrow x'$;

2. x є незвідним, якщо x не є звідним;
3. $x' \in X$ є нормальною формою x , якщо $x \rightarrow^* x'$ і x' є незвідним.

Означення 1.1.3 ([108, 5, 133]). АПС $(X, \rightarrow)$ є

1. (слабко) нормалізуючою, якщо для кожного $x \in X$ існує $x' \in X$, такий, що x' є нормальною формою x ;
2. термінальною (або, альтернативно, сильно нормалізуючою), якщо не існує нескінченної послідовності редукцій $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$ ($x_i \in X$).

Означення 1.1.4 ([108, 5, 133]). АПС $(X, \rightarrow)$ є

1. конфлюентною, якщо

$$\forall a, b, c \in X (a \rightarrow^* b \wedge a \rightarrow^* c \Rightarrow \exists d \in X (b \rightarrow^* d \wedge c \rightarrow^* d));$$

2. локально конфлюентною, якщо

$$\forall a, b, c \in X (a \rightarrow b \wedge a \rightarrow c \Rightarrow \exists d \in X (b \rightarrow^* d \wedge c \rightarrow^* d)).$$

1.1.3.3. Ординали та потужність

Будемо припускати, що *ординал* [137] α – це множина, така, що $\in$ цілком впорядковує α і кожний елемент α є підмножиною α .

Зауваження 1.1.3. У [78] не використовується вищезазначене означення ординалу. Замість цього, використовується формалізація [11] ординалів (і потужностей), що використовує типізовані цілком упорядкування, що дозволяє моделювати міркування, що стосуються теоретико-множинних ординалів. Інформація про інші пов'язані підходи до ординалів наведена у [114].

Якщо α, β є ординалами, то $\alpha < \beta$ позначає $\alpha \in \beta$, а $\alpha \leq \beta$ позначає $(\alpha = \beta) \vee (\alpha < \beta)$. Також, $\alpha > \beta$ і $\alpha \geq \beta$ позначають $\beta < \alpha$ і $\beta \leq \alpha$ відповідно.

Зауваження 1.1.4. Для будь-яких ординалів α, β , $\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$ [137] і будь-якої непорожньої множини A ординалів має найменший елемент відносно $\leq$ (тобто елемент $\alpha \in A$, такий, що $\forall \alpha' \in A \alpha \leq \alpha'$) [137].

Ординал α буде називатись

- *наступником ординалу α'* [137] (ординалом, наступним за α'), якщо α є найменшим ординалом, більшим за α' ;
- *наступником* [137] (або ненульовим неграничним ординалом), якщо α є наступником деякого ординалу;

- *граничним ординалом* [137], якщо α не є 0 (порожньою множиною) і не є наступником.

Для будь-яких ординалів α, β і непорожньої множини ординалів A будуть використовуватись такі позначення:

- $\alpha + 1$ позначає ординал, наступний за α ;
- $[\alpha, \beta]$ і $[\alpha, \beta)$ позначають $\{\alpha' \mid \alpha \leq \alpha' \leq \beta\}$ і $\{\alpha' \mid \alpha \leq \alpha' < \beta\}$ відповідно;
- $[\alpha, \beta]_{0S}$ позначає множину всіх $\alpha' \in [\alpha, \beta]$, таких, що α' є 0 або наступником;
- $[\alpha, \beta]_L = [\alpha, \beta] \setminus [\alpha, \beta]_{0S}$ є множиною всіх граничних ординалів в $[\alpha, \beta]$;
- $\min A$ позначає найменший елемент A у сенсі $\leq$.

Для будь-якої множини A будемо позначати:

- $|A|$ (потужність A [137]) є найменшим ординалом α (у сенсі $\leq$), таким, що існує бієктивна функція $f : \alpha \rightarrow A$.

Зауваження 1.1.5. Оскільки припускається аксіома вибору, $|A|$ визначено для будь-якої множини A [36, 137].

Зауваження 1.1.6. У [78] використовується формальне поняття потужності множини, описане у [11]. Порівняння потужностей множин в [78] за допомогою спеціальних відношень $=_o$, $<_o$, $\leq_o$ з [11] може бути інтерпретовано як порівняння теоретико-множинних потужностей, визначених вище, за допомогою $=$, $<$, $\leq$.

Також, будемо використовувати такі позначення [137]:

- ω позначає найменший граничний ординал;
- ω_1 є найменшим ординалом, таким, що його потужність строго більша за ω .

1.1.3.4. Переписувальні системи зі спадною властивістю Черча-Россера

Напівформально, АПС має спадну властивість Черча-Россера (англ. decreasing Church-Rosser, DCR) [202], якщо метод спадних діаграм може бути використаний для того, щоб довести її конфлюентність. Нижче наведені точні визначення, засновані на визначеннях з [202].

Означення 1.1.5 ([202]). *Розмічена переписувальна система (РПС)* є трійкою $(A, I, (\rightarrow_i)_{i \in I})$, де A і I є множинами, а $(\rightarrow_i)_{i \in I}$ є індексованою сім'єю (з множиною індексів I), такою, що $\rightarrow_i \subseteq A \times A$ для кожного $i \in I$. Елементи I називаються *мітками*.

Наведені нижче означення 1.1.7 і 1.1.8 засновані на [202, означення 2.3.7].

Зауваження 1.1.7. Означення [202, означення 2.3.7] спирається на [202, теорема 2.3.5], що застосовує термін “фундований частковий порядок” до відношен-

ня, що позначається як $\succ$, де умова фундованості визначена у [202, означення 1.2.3] для будь-якого транзитивного відношення R за допомогою варіанту умови обриву *зростаючих* ланцюгів: немає нескінченної послідовності $a_1, a_2, \dots$, такої, що $(a_i, a_{i+1}) \in R \setminus (R \cap R^{-1})$. Однак, в інших джерелах, відношення, що задовольняють таку умову часто називаються “обернено фундованими” або “нетеровими”. У зв’язку з цим у даній роботі *не* буде використовуватись термінологія з [202], що стосується фундованих відношень. Замість неї буде використовуватись означення 1.1.6, надане нижче, що засноване на умові обриву *спадних* ланцюгів. Воно буде застосовуватись до відношення, що позначається як $\prec$, що може розглядатись як строгий частковий порядок, що відповідає оберненому відношенню до $\succ$ з [202, означення 2.3.7].

Означення 1.1.6 ([202]). *Транзитивне фундоване відношення* на множині I – це бінарне відношення $\prec \subseteq I \times I$, таке, що $\forall a, b, c \in I \ a \prec b \wedge b \prec c \Rightarrow a \prec c$ і *не* існує нескінченної послідовності $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, такої, що $a_{i+1} \prec a_i$ для кожного i .

Зауваження 1.1.8. Транзитивне фундоване відношення є антирефлексивним і антисиметричним.

Означення 1.1.7 ([202]). РПС $(A, I, (\rightarrow_i)_{i \in I})$ має *спадну властивість Черча-Россера (DCR)*, якщо існують транзитивне фундоване відношення $\prec$ на I і підмножини $I_h \subseteq I$ і $I_v \subseteq I$, такі, що $(\bigcup_{i \in I} \rightarrow_i) = (\bigcup_{i \in I_v} \rightarrow_i) = (\bigcup_{i \in I_h} \rightarrow_i)$ і для кожних $i \in I_v$, $j \in I_h$, і $a, b, c \in A$, таких, що $a \rightarrow_i b$ і $a \rightarrow_j c$, існують елементи $b', b'', c', c'', d \in A$, такі, що

$$\left(b \xrightarrow{(\gamma i) \cap I_h}^* b' \xrightarrow{\{j\} \cap I_h}^{\equiv} b'' \xrightarrow{(\gamma i \cup \gamma j) \cap I_h}^* d \right) \wedge \left(c \xrightarrow{(\gamma j) \cap I_v}^* c' \xrightarrow{\{i\} \cap I_v}^{\equiv} c'' \xrightarrow{(\gamma i \cup \gamma j) \cap I_v}^* d \right),$$

де

- для будь-якого $i \in I$, γi позначає множину $\{k \in I \mid k \prec i\}$;
- символи вигляду $\xrightarrow{K}^*$ і $\xrightarrow{K}^{\equiv}$, де K є виразом, мають такий сенс:
 $\xrightarrow{K}^* = \text{Id}_A \cup \left(\bigcup_{k \in K} \rightarrow_k \right)^+$ та $\xrightarrow{K}^{\equiv} = \text{Id}_A \cup \left(\bigcup_{k \in K} \rightarrow_k \right)$.

Означення 1.1.8 ([202]). АПС $(A, \rightarrow)$ має *спадну властивість Черча-Россера (DCR)*, якщо існують множина I і індексована сім’я $(\rightarrow_i)_{i \in I}$ (з множиною індексів I), такі, що $\rightarrow_i \subseteq A \times A$ для кожного $i \in I$, а також, $\rightarrow = \left(\bigcup_{i \in I} \rightarrow_i \right)$ і $(A, I, (\rightarrow_i)_{i \in I})$ є РПС зі спадною властивістю Черча-Россера.

1.1.3.5. Ієрархія систем зі спадною властивістю Черча-Россера

Для будь-якого ординалу α позначимо $\Upsilon\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$.

Зауваження 1.1.9. У сенсі теоретико-множинного визначення ординалів, $\Upsilon\alpha$ є самим ординалом α . Однак позначення $\Upsilon\alpha$ буде використовуватись нижче для того, щоб підкреслити, що α розглядається як множина міток.

Наступне визначення засноване на [32, означення 4.4] і [32, означення 4.2].

Означення 1.1.9 ([32]). Нехай γ є ординалом. АПС $(A, \rightarrow)$ належить класу DCR_γ , якщо існує індексована сім'я $(\rightarrow_\alpha)_{\alpha \in (\Upsilon\gamma)}$ бінарних відношень на A , індексована ординалами $\alpha < \gamma$, така, що для будь-яких ординалів $\alpha, \beta \in (\Upsilon\gamma)$ і $a, b, c \in A$ виконується така умова:

якщо $a \rightarrow_\alpha b \wedge a \rightarrow_\beta c$, то існують елементи $b', b'', c', c'', d \in A$, такі, що

$$\left(b \xrightarrow[\Upsilon\alpha]{*} b' \xrightarrow[\{\beta\}]{=} b'' \xrightarrow[\Upsilon\alpha \cup \Upsilon\beta]{*} d \right) \wedge \left(c \xrightarrow[\Upsilon\beta]{*} c' \xrightarrow[\{\alpha\}]{=} c'' \xrightarrow[\Upsilon\beta \cup \Upsilon\alpha]{*} d \right),$$

де символи вигляду $\xrightarrow[K]{=}$ і $\xrightarrow[K]{*}$, де K є виразом, мають такий сенс:

$$\xrightarrow[K]{=} = \{(a, a) \mid a \in A\} \cup \bigcup_{\kappa \in K} \rightarrow_\kappa \quad \text{та} \quad \xrightarrow[K]{*} = \{(a, a) \mid a \in A\} \cup \left(\bigcup_{\kappa \in K} \rightarrow_\kappa \right)^+.$$

Зауваження 1.1.10. Для скінченного ординалу γ (що відповідає невід'ємному цілому числу), напівформально, клас DCR_γ складається з конфлюентних АПС, для яких конфлюентність може бути доведена за допомогою методу спадних діаграм з мітками $0, 1, \dots, \gamma - 1$ зі звичайним порядком ($0 < 1 < \dots < \gamma - 1$).

Твердження 1.1.1. Якщо γ є ординалом, а $(A, \rightarrow)$ є АПС, що належить класу DCR_γ , то $(A, \rightarrow)$ має спадну властивість Черча-Россера у сенсі означення 1.1.8.

Доведення. Впливає безпосередньо з означень 1.1.8, 1.1.7, якщо визначити $I = I_h = I_v = (\Upsilon\gamma)$ і у якості (транзитивного фундованого) відношення $\prec$ узяти обмеження звичайного порядку на ординалах на I . $\square$

Наступне просте твердження робить визначення класу DCR_3 більш явним.

Твердження 1.1.2. АПС $(A, \rightarrow)$ належить класу DCR_3 тоді і тільки тоді, коли існують бінарні відношення $\rightarrow_0, \rightarrow_1, \rightarrow_2 \subseteq A \times A$, такі, що $\rightarrow = (\rightarrow_0 \cup \rightarrow_1 \cup \rightarrow_2)$ і виконуються наведені нижче умови 1–6, де

- для $i = 0, 1, 2$, символ $\rightarrow_i^=$ позначає рефлексивне замикання $\rightarrow_i$ на A
 - для $i = 0, 1, 2$, символ $\rightarrow_i^*$ позначає рефлексивно-транзитивне замикання $\rightarrow_i$ на A
 - символ $\rightarrow_{01}^*$ позначає рефлексивно-транзитивне замикання $\rightarrow_0 \cup \rightarrow_1$ на A :
1. $\forall a, b, c \in A ((a \rightarrow_0 b \wedge a \rightarrow_0 c) \Rightarrow \exists d \in A (b \rightarrow_0^= d \wedge c \rightarrow_0^= d));$
 2. $\forall a, b, c \in A ((a \rightarrow_0 b \wedge a \rightarrow_1 c) \Rightarrow \exists b', d \in A (b \rightarrow_1^= b' \wedge b' \rightarrow_0^* d \wedge c \rightarrow_0^* d));$
 3. $\forall a, b, c \in A ((a \rightarrow_1 b \wedge a \rightarrow_1 c) \Rightarrow \exists b', b'', c', c'', d \in A$
 $(b \rightarrow_0^* b' \wedge b' \rightarrow_1^= b'' \wedge b'' \rightarrow_0^* d \wedge c \rightarrow_0^* c' \wedge c' \rightarrow_1^= c'' \wedge c'' \rightarrow_0^* d));$
 4. $\forall a, b, c \in A ((a \rightarrow_0 b \wedge a \rightarrow_2 c) \Rightarrow \exists b', d \in A (b \rightarrow_2^= b' \wedge b' \rightarrow_{01}^* d \wedge c \rightarrow_{01}^* d));$
 5. $\forall a, b, c \in A ((a \rightarrow_1 b \wedge a \rightarrow_2 c) \Rightarrow \exists b', b'', d \in A$
 $(b \rightarrow_0^* b' \wedge b' \rightarrow_2^= b'' \wedge b'' \rightarrow_{01}^* d \wedge c \rightarrow_{01}^* d));$
 6. $\forall a, b, c \in A ((a \rightarrow_2 b \wedge a \rightarrow_2 c) \Rightarrow \exists b', b'', c', c'', d \in A$
 $(b \rightarrow_{01}^* b' \wedge b' \rightarrow_2^= b'' \wedge b'' \rightarrow_{01}^* d \wedge c \rightarrow_{01}^* c' \wedge c' \rightarrow_2^= c'' \wedge c'' \rightarrow_{01}^* d)).$

Доведення. Випливає безпосередньо з означення 1.1.9, де $\gamma = 3$, враховуючи аналогію випадків $(\alpha, \beta) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$, $(\alpha, \beta) \in \{(0, 2), (2, 0)\}$ та $(\alpha, \beta) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$. $\square$

1.1.4. Головний результат підрозділу

Нехай U є непорожньою множиною.

Теорема 1.1.1. *Якщо (U, r) є конфлюентною АПС і $|r| \leq \omega_1$, то (U, r) належить класу DCR_3 .*

Доведення теореми 1.1.1 буде описане у пункті 1.1.5 нижче.

Формулювання формалізованого варіанту теореми 1.1.1 (що має назву `thm_main`) формальною мовою Isabelle/HOL [151] наведене за посиланням [78, рядки 11760-11790]. Воно має такий вигляд:

```
theorem thm_main:
fixes r::"('U×'U) set"
assumes "∀ a b c . (a,b) ∈ r^* ∧ (a,c) ∈ r^* → (∃ d . (b,d) ∈ r^* ∧
(c,d) ∈ r^*)"
and "|r| ≤ cardSuc |{n::nat . True}|"
shows "∃ r0 r1 r2 . (
  ( r = (r0 ∪ r1 ∪ r2) )
  ∧ ( ∀ a b c . (a,b) ∈ r0 ∧ (a,c) ∈ r0
```

$$\begin{aligned}
& \longrightarrow (\exists d. \\
& \quad (b,d) \in r0^= \\
& \quad \wedge (c,d) \in r0^=)) \\
& \wedge (\forall a b c. (a,b) \in r0 \wedge (a,c) \in r1 \\
& \quad \longrightarrow (\exists b' d. \\
& \quad \quad (b,b') \in r1^= \wedge (b',d) \in r0^* \\
& \quad \quad \wedge (c,d) \in r0^*)) \\
& \wedge (\forall a b c. (a,b) \in r1 \wedge (a,c) \in r1 \\
& \quad \longrightarrow (\exists b' b'' c' c'' d. \\
& \quad \quad (b,b') \in r0^* \wedge (b',b'') \in r1^= \wedge (b'',d) \in r0^* \\
& \quad \quad \wedge (c,c') \in r0^* \wedge (c',c'') \in r1^= \wedge (c'',d) \in r0^*)) \\
& \wedge (\forall a b c. (a,b) \in r0 \wedge (a,c) \in r2 \\
& \quad \longrightarrow (\exists b' d. \\
& \quad \quad (b,b') \in r2^= \wedge (b',d) \in (r0 \cup r1)^* \\
& \quad \quad \wedge (c,d) \in (r0 \cup r1)^*)) \\
& \wedge (\forall a b c. (a,b) \in r1 \wedge (a,c) \in r2 \\
& \quad \longrightarrow (\exists b' b'' d. \\
& \quad \quad (b,b') \in r0^* \wedge (b',b'') \in r2^= \wedge (b'',d) \in (r0 \cup r1)^* \\
& \quad \quad \wedge (c,d) \in (r0 \cup r1)^*)) \\
& \wedge (\forall a b c. (a,b) \in r2 \wedge (a,c) \in r2 \\
& \quad \longrightarrow (\exists b' b'' c' c'' d. \\
& \quad \quad (b,b') \in (r0 \cup r1)^* \wedge (b',b'') \in r2^= \wedge (b'',d) \in (r0 \cup r1)^* \\
& \quad \quad \wedge (c,c') \in (r0 \cup r1)^* \wedge (c',c'') \in r2^= \wedge (c'',d) \in (r0 \cup r1)^*)) \\
&) "
\end{aligned}$$

Основні складові формулювання `thm_main` можуть бути пояснені таким чином:

– **fixes** `r::"('U×'U) set"`

означає, що r є бінарним відношенням на елементах довільного непорожнього типу U ;

– **assumes** `" $\forall a b c. (a,b) \in r^* \wedge (a,c) \in r^* \longrightarrow (\exists d. (b,d) \in r^* \wedge (c,d) \in r^*)$ "`

означає, що (U, r) є конфлюентною АПС (r^* позначає рефлексивно-транзитивне замикання r на U , а $r^=$ позначає рефлексивне замикання r);

– **and** `" $|r| \leq o \text{ cardSuc } |\{n::nat . True\}|$ "`

означає, що потужність r не перевищує кардинал, наступний після потужності множини натуральних чисел, або, еквівалентно, $|r| \leq \omega_1$. Визначення позначень $|\cdot|$ (потужність), cardSuc (кардинал, наступний за) і $\leq_o$ (ліве цілком упорядкування може бути вкладене у праве) надані у теорії HOL-Cardinals, що включена у програмне забезпечення Isabelle та описана у [11, підрозділи 3.2, 4.4];

– **shows** " $\exists r_0 r_1 r_2 . ($
 $(r = (r_0 \cup r_1 \cup r_2))$
 $\wedge \dots$

означає висновок, що r може бути подано як об'єднання трьох відношень r_0, r_1, r_2 , що задовольняють умови 1-6 твердження 1.1.2, де $\rightarrow_i$ замінено на r_i для $i = 0, 1, 2$. Еквівалентно, за твердженням 1.1.2, (U, r) належить DCR_3 .

Щоб спростити тлумачення припущень thm_main та зробити необов'язковими посилання на формалізацію [11], за посиланням [78, рядки 11746–11752] надано формальний доказ еквівалентності між другим припущенням thm_main :

" $|r| \leq_o \text{cardSuc } |\{n::\text{nat} . \text{True}\}|$ "

і такою формулою, що *не* використовує поняття та позначення, введені у [11]:

$$\forall s \subseteq r. ((\forall t \subseteq s . ((\exists t' f. t' \subset t \wedge t \subseteq f`t') \longrightarrow (\exists f. s \subseteq f`t))) \vee (\exists g . r \subseteq g`s)) .$$

Тут s, r, t, t' позначають бінарні відношення, f, g позначають функції, запис $f`x$ позначає образ множини x при відображенні f . Дана формула може бути пояснена таким чином: кожне підвідношення s в r є або не більш ніж зліченим (лівий аргумент диз'юнкції $\vee$), або не меншим за r за потужністю (правий аргумент $\vee$), де

- умова “ s не більш ніж зліченне” виражена таким чином: для кожного $t \subseteq s$, якщо t має власну підмножину t' , що є не меншою за t за потужністю (t є підмножиною образу t'), то t не менше за s за потужністю (s є підмножиною образу t);
- умова “ s не менша за r за потужністю” виражена таким чином: r є підмножиною образу s при відображенні g .

Слід зауважити, що в загальному випадку, висновок “ (U, r) належить класу DCR_3 ” у формулюванні теореми 1.1.1 *не може* бути посилено до “ (U, r) належить класу DCR_2 ” (тобто використання індексу 3 у формулюванні теореми 1.1.1 є

оптимальним). Це випливає з такої теореми, що розширює результати [64]:

Теорема 1.1.2. *Якщо $\omega_1 \leq |U|$, то існує відношення $r \subseteq U \times U$, таке, що (U, r) є конфлюентною АПС, $|r| \leq \omega_1$ і (U, r) не належить класу DCR_2 .*

Доведення. Формальний доказ формалізованої версії цієї теореми наведений за посиланням [83, файл DCR_Example_N1.thy, рядки 1503–1529]. $\square$

1.1.5. Структура формального доказу теореми 1.1.1

Формальний доказ теореми 1.1.1 використовує понад 80 формальних визначень і 260 формальних лем, що надані у файлі DCRN1.thy, що доступний за посиланням [78] (розмір файлу перевищує 11000 рядків). Формальна теорія, яку містить цей файл залежить від стандартних теорій, що включені у програмне забезпечення Isabelle (Main і HOL-Cardinals).

У підпункті 1.1.5.1 описана загальна ідея формального доказу. У наступних підпунктах надані описи основних визначень і лем, що використовуються у ньому (відповідність між позначеннями, що використовуються у дисертації і у [78] описана в додатку А). Допоміжні технічні леми, що використовуються у формальному доказі наведені у [78].

Відповідність між змістом підпункту 1.1.5.1 і рештою змісту пункту 1.1.5 проілюстрована на рисунку 1.2.

1.1.5.1. Загальна ідея формального доказу теореми 1.1.1

Розглянемо фіксовану конфлюентну АПС (U, r) , де $|r| \leq \omega_1$, як орієнтований граф. Оберемо будь-яку компоненту зв'язності C в (U, r) і розглянемо такі випадки.

Випадок (А) C має властивість кофінальності (що визначена у [31, означення 7]).

Тоді C належить DCR_2 за [31, теорема 19], тому C також належить DCR_3 .

Випадок (В) C не має властивості кофінальності. Тоді виконаємо такі кроки.

Крок (В1). Побудувати підграф S у C , такий, що

- S має вигляд, проілюстрований на рисунку 1.1;
- вузли S утворюють кофінальну підмножину у передвпорядкованій множині, породженій C .

Крок (В2). Показати, що S (що розглядається як АПС) належить класу DCR_2 таким чином: на рисунку 1.1

- розмістити дуги, що починаються у вузлах з єдиним прямим наступником значенням 0;
- розмістити дуги, що починаються у вузлах з неєдиним прямим наступником значенням 1.

Крок (В3). Використати кофінальність S в C щоб прийти до висновку, що C належить класу DCR_3 .

Тоді (U, r) належить DCR_3 , оскільки всі компоненти зв'язності належать DCR_3 .

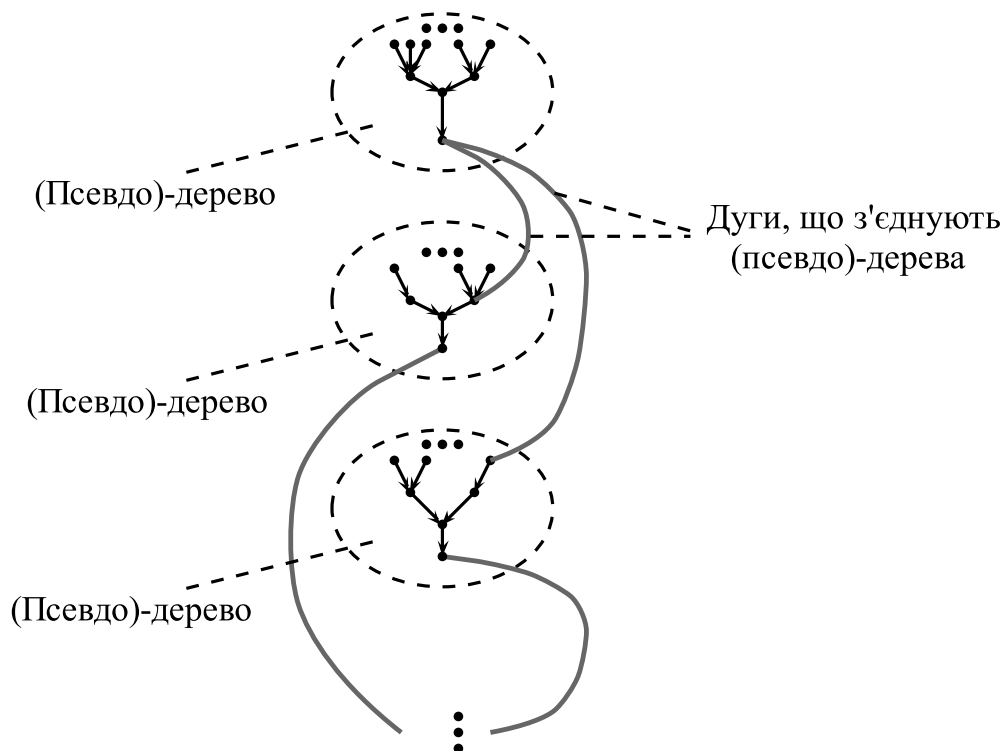


Рисунок 1.1 — Ілюстрація структури зв'язного кофінального підграфу компоненти зв'язності конфлюентної АПС мінімальної незліченної потужності, за умови, що така компонента зв'язності не має властивості кофінальності.

Більш детально, головний крок доведення (В1) включає такі підетапи.

Підетап (В1а). Побудувати кофінальний підграф, аналогічний тому, що проілюстрований на рисунку 1.1, але з тією відмінністю, що дуги, аналогічні тим, що позначені прямими стрілками на рисунку 1.1 можуть *не* утворювати дерева, а також, можуть існувати додаткові дуги, аналогічні тим, що позначені кривими. Детально такий підграф буде описано нижче за допомогою відношення r_1 у доведенні леми 1.1.6. Даний підетап буде виконано з використанням аналогу леми Івамури [134, теорема 1] для зв'язних конфлюентних

відношень, що буде описана у підпункті 1.1.5.4. Цей аналог леми Івамури дозволяє подавати зв'язні конфлюентні АПС як об'єднання (цілком впорядкованого) ланцюга зв'язних конфлюентних АПС меншої потужності (наприклад, зв'язна конфлюентна АПС потужності $\aleph_1$ може бути подана як об'єднання ланцюга не більш ніж злічених зв'язних конфлюентних АПС, які мають властивість кофінальності).

Підетап (B1b). Перетворення підграфу, що був отриманий у підетапі (B1a), на зв'язний кофінальний підграф, що належить класу DCR_2 . Цей підетап буде описано у доведенні леми 1.1.4.

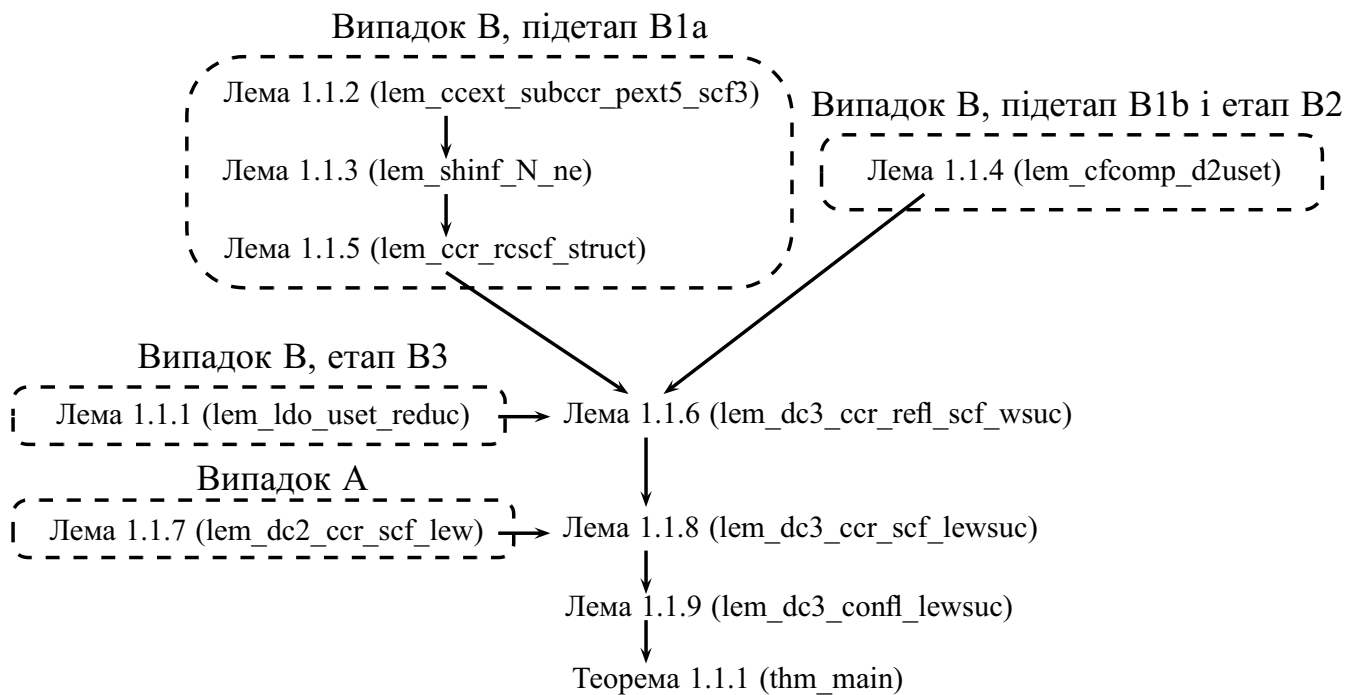


Рисунок 1.2 — Відповідність між загальними кроками доведення, вказаними у підпункті 1.1.5.1, та лемами, що використовуються у доведенні теореми 1.1.1. Стрілки вигляду $A \rightarrow B$ мають такий сенс: A використовується у доведенні B . Позначення лем мають такий вигляд: “номер леми у тексті дисертації” (назва формальної версії леми, доступної за посиланням [78]).

1.1.5.2. Формалізація скінченних рівнів DCR ієрархії

У цьому підпункті описано спосіб, у який скінченні рівні DCR ієрархії, тобто класи DCR_α для ординалів $\alpha < \omega$, формалізовані у [78].

Для будь-якого відношення $s \subseteq U \times U$ будемо позначати як s^- і s^* рефлексивне, і, відповідно, рефлексивно-транзитивне замикання s на множині U .

Для будь-якої функції $g : [0, \omega) \rightarrow 2^{U \times U}$ і будь-яких ординалів $\alpha, \beta \in [0, \omega)$ позначимо:

- $\mathfrak{L}_1(g, \alpha) = \bigcup_{\alpha' \in [0, \alpha)} g(\alpha')$;
- $\mathfrak{L}_\vee(g, \alpha, \beta) = \bigcup_{\alpha' \in [0, \alpha) \cup [0, \beta)} g(\alpha')$;
- $\mathfrak{D}(g, \alpha, \beta)$ є множиною всіх кортежів $(b, b', b'', d) \in U \times U \times U \times U$, таких, що

$$(b, b') \in (\mathfrak{L}_1(g, \alpha))^* \wedge (b', b'') \in (g(\beta))^\equiv \wedge (b'', d) \in (\mathfrak{L}_\vee(g, \alpha, \beta))^*.$$

Означення 1.1.10. Функція $g : [0, \omega) \rightarrow 2^{U \times U}$ називається *DCR-генеруючою*, якщо для кожних $\alpha, \beta \in [0, \omega)$ і кожних $a, b, c \in U$ виконується така імплікація: якщо $(a, b) \in g(\alpha) \wedge (a, c) \in g(\beta)$, то існують $b', b'', c', c'', d \in U$, такі, що

$$(b, b', b'', d) \in \mathfrak{D}(g, \alpha, \beta) \wedge (c, c', c'', d) \in \mathfrak{D}(g, \beta, \alpha).$$

Позначимо:

- $DCR_n(U)$, де $n \in [0, \omega)$, є множиною всіх відношень $r \subseteq U \times U$, таких, що існує DCR-генеруюча функція g , така, що $r = \bigcup_{\alpha \in [0, n)} g(\alpha)$.

Зауваження 1.1.11. Для кожного $n \in [0, \omega)$, відношення r належить $DCR_n(U)$ тоді і тільки тоді, коли АПС (U, r) належить класу DCR_n .

Означення 1.1.11. Бінарне відношення $r \subseteq U \times U$ називається

1. *зв'язним конфлюентним* (англ. connected Church-Rosser, CCR) відношенням, якщо $\forall a, b \in \text{Fld}(r) \exists c \in \text{Fld}(r) (a, c) \in r^* \wedge (b, c) \in r^*$;
2. *конусоподібним* відношенням, якщо $r = \emptyset \vee (\exists m \in \text{Fld}(r) \forall a \in \text{Fld}(r) (a, m) \in r^*)$.

Будемо використовувати такі позначення:

- $CCR(U)$ є множиною всіх CCR відношень $r \subseteq U \times U$;
- $Conelike(U)$ є множиною всіх конусоподібних відношень $r \subseteq U \times U$.

Для будь-якого $r \subseteq U \times U$ будемо позначати:

$$\mathfrak{U}(r) = \{s \in CCR(U) \mid s \subseteq r \wedge \forall a \in \text{Fld}(r) \exists b \in \text{Fld}(s) (a, b) \in r^*\}.$$

Будемо називати будь-який елемент $\mathfrak{U}(r)$ *CCR лишком* відношення r .

Слід зауважити, що CCR лишок r є зв'язним конфлюентним підвідношенням $s \subseteq r$, таким, що поле s є кофінальною підмножиною у передвпорядкованій множині $(\text{Fld}(r), r^*|_{\text{Fld}(r)})$.

Наведена нижче лема буде використана для реалізації кроку (B3) з підпункту 1.1.5.1 (вона може розглядатися як обмежена версія теореми про DCR ієрархію, що наведена у [87]).

Лема 1.1.1. *Якщо $n_0 \in [1, \omega)$, $r \subseteq U \times U$, $s \in \mathfrak{U}(r)$ і $s \in DCR_{n_0}(U)$, то $r \in DCR_{n_0+1}(U)$.*

Доведення. Формальний доказ наведено у [78, рядки 7275–7598]. Доведення включає побудову допоміжного кістякового підвідношення r , що має назву $r1$ [78, рядки 7458, 7590], розмітку $r1$ щоб показати, що $r1$ належить $DCR_{n_0}(U)$, як описано за посиланням [78, рядки 7450–7453, 7588, 7591], і продовження розмітки $r1$ до розмітки r , що забезпечує виконання умови $r \in DCR_{n_0+1}(U)$ [78, рядок 7597]. $\square$

1.1.5.3. Розширення підполя CCR відношення

Для будь-яких $r \subseteq U \times U$, $A \subseteq U$ і $x \in U$ позначимо:

- $r[A] = \{b \mid \exists a \in A (a, b) \in r\}$, тобто $r[A]$ є образом A відносно r ;
- $r\{x\} = \{y \mid (x, y) \in r\}$, тобто $r\{x\}$ є множиною наступників x відносно r ;
- $\text{dncl}(r, A) = ((r^*)^{-1})[A]$, тобто $\text{dncl}(r, A)$ є замиканням вниз A в (U, r^*) ;
- $\text{Inv}(r) = \{A \subseteq U \mid r[A] \subseteq A\}$, елементи $\text{Inv}(r)$ будуть називатись *інваріантними множинами* відношення r ;
- $\text{Span}(r) = \{s \subseteq r \mid \text{Fld}(s) = \text{Fld}(r)\}$, елементи $\text{Span}(r)$ будуть називатись *кістяковими підвідношеннями* r ;
- $SF(r) = \{A \subseteq U \mid \text{Fld}(r|_A) = A\}$, елементи $SF(r)$ будуть називатись *підполями* відношення r (слід зауважити, що A є підполем r тоді і тільки тоді, коли A є полем деякого підвідношення $s \subseteq r$);
- $SCF(r) = \{B \subseteq \text{Fld}(r) \mid \forall a \in \text{Fld}(r) \exists b \in B (a, b) \in r^*\}$, тобто $SCF(r)$ є множиною всіх кофінальних множин у передвпорядкованій множині $(\text{Fld}(r), r^*|_{\text{Fld}(r)})$;
- $\text{scf}(r) = \min\{|B| \mid B \in SCF(r)\}$, значення $\text{scf}(r)$ буде називатись *секвенційною кофінальністю* відношення r .

Для будь-якої множини X будемо позначати як $\mathcal{P}(X)$ булеан X .

Зафіксуємо функцію вибору $\text{ch} : \mathcal{P}(\mathcal{P}(U)) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{P}(U)$, таку, що $\text{ch}(A) \in A$ для кожної непорожньої множини $A \subseteq \mathcal{P}(U)$.

Для будь-яких $r, s' \subseteq U \times U$, $A, B \subseteq U$ і $a, b \in U$ введемо такі позначення:

- $\mathcal{F}(r, a, b)$ є множиною всіх (скінченних) підмножин $F \subseteq U$, таких, що існують невід'ємне ціле число n і скінченна послідовність $(a_i)_{i=0}^n$ елементів

- U , такі, що $F = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, $a_0 = a$, $a_n = b$ і $(a_i, a_{i+1}) \in r$ для всіх $i = 0, 1, \dots, n-1$;
- $\text{wdncl}(r, A) = \{a \in \text{dncl}(r, A) \mid \forall b \in U \forall F \in \mathcal{F}(r, a, b) (b \notin \text{dncl}(r, A) \Rightarrow F \cap A \neq \emptyset)\}$;
 - $\text{wrank}(r, A) = \min\{ |B| \mid A \subseteq \text{wdncl}(r, B) \}$;
 - $\text{dn}_{\text{Esc}}(r, A, a) = \{F \in \mathcal{P}(U) \mid \exists b \in U \setminus \text{dncl}(r, A) F \in \mathcal{F}(r, a, b) \wedge (F \cap A = \emptyset)\}$;
 - $\text{dn}_{\text{esc}}(r, A, a) = \begin{cases} \text{ch}(\text{dn}_{\text{Esc}}(r, A, a)), & \text{якщо } \text{dn}_{\text{Esc}}(r, A, a) \neq \emptyset; \\ \{a\}, & \text{якщо } \text{dn}_{\text{Esc}}(r, A, a) = \emptyset; \end{cases}$
 - $\text{escl}(r, A, B) = \bigcup_{b \in B} \text{dn}_{\text{esc}}(r, A, b)$;
 - $\text{clterm}(s', r) = (s' \in \text{Conelike}(U) \Rightarrow r \in \text{Conelike}(U))$.

Лема 1.1.2. Нехай $r \in \text{CCR}(U)$, $A \in \text{SF}(r)$, $B, B' \subseteq U$, $x \in U$ і $Ps \subseteq \text{SCF}(r)$.

Тоді існує множина $A' \subseteq U$, для якої виконуються такі 9 умов:

1. $x \in \text{Fld}(r) \Rightarrow x \in A'$;
2. $A \subseteq A'$;
3. $A' \in \text{SF}(r)$;
4. $\forall a \in A ((r\{a\} \subseteq B) \vee (r\{a\} \cap (A' \setminus B) \neq \emptyset))$;
5. $(\exists y \in U A' - B' \subseteq \{y\}) \Rightarrow (\text{Fld}(r) \subseteq A' \cup B')$;
6. $r|_{A'} \in \text{CCR}(U)$;
7. $(|A| < \omega \Rightarrow |A'| < \omega) \wedge (|A| \geq \omega \Rightarrow |A'| = |A|)$;
8. $((\exists P Ps = \{P\}) \vee |Ps| \in [\omega, |A|]) \Rightarrow (\forall P \in Ps (A' \cap P) \in \text{SCF}(r|_{A'}))$;
9. $|A| \geq \omega \Rightarrow \text{escl}(r, A, A') \subseteq A' \wedge \text{clterm}(r|_{A'}, r)$.

Доведення. Формальний доказ наведено за посиланням [78, рядки 4498–4538]. Даний доказ залежить від допоміжних формальних лем, що мають формулювання, близькі до формулювання даної леми, але надають більш слабкі гарантії (формальні леми `lem_Ccext_finsubccr_pext5_scf3` і `lem_Ccext_infsubccr_pext5_scf3` в [78] та їх залежності). Якщо A є нескінченною множиною, ідея доведення полягає у тому, щоб визначити шукану множину A' як

$$\psi \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} H^{(n)}(\phi(A)) \right), \quad (1.1)$$

для деякої зростаючої функції H на множинах і деяких функцій ϕ, ψ , де $H^{(n)}$ позначає n -кратну композицію H із собою. При цьому, H, ϕ, ψ обираються так, щоб

забезпечити виконання властивостей замкненості множини A' , що вимагаються умовою леми (наприклад, $r|_{A'} \in CCR(U)$), але залишити потужності множин, що визначаються підвиразами виразу (1.1) обмеженими, щоб гарантувати виконання умови 7, тобто $(|A| < \omega \Rightarrow |A'| < \omega) \wedge (|A| \geq \omega \Rightarrow |A'| = |A|)$. Явний вираз для $\phi(A)$ може бути отриманий розгортанням позначень у правій частині визначення в [78, рядок 3972] з урахуванням підстановок значень замість параметрів допоміжної леми `lem_Csxt_infsuccr_set_ext_scf3`, як вказано у [78, рядок 4280]. Явний вираз для H може бути отримано шляхом розгортання позначень, що використовуються в [78, рядки 3964–3966], а у якості ψ може бути узято тотожну функцію.

Якщо A є скінченною множиною, доведення проводиться індукцією за потужністю допоміжного скінченного відношення, пов'язаного з A , вказаного у [78, рядки 4372–4496, 3332–3414, 2485–2680]. $\square$

1.1.5.4. Аналог леми Івамури про спрямовані множини для CCR відношень

У цьому підпункті описано лему, що надає подання нескінченного CCR відношення як об'єднання ланцюга CCR відношень меншої потужності. Ідея цієї леми подібна до ідеї леми Івамури про спрямовані множини [134, теорема 1]. Однак, на відміну від леми Івамури, запропонована нижче лема застосовна до *нетранзитивних* відношень і гарантує, що поля елементів результуючого ланцюга задовольняють додатковим обмеженням, що описані нижче за допомогою множин $\mathcal{N}_i$, які використовуються у доведенні головного результату підрозділу.

Нехай $\mathcal{U}$ є множиною всіх ординалів потужності не більше $|U|$.

Для будь-якої функції $f : \mathcal{U} \rightarrow 2^U$ і ординалу $\alpha \in \mathcal{U}$ введемо такі позначення:

- $\mathcal{L}(f, \alpha) = \bigcup_{\alpha' \in [0, \alpha)} f(\alpha')$;
- $\nabla(f, \alpha) = f(\alpha) \setminus \mathcal{L}(f, \alpha)$;
- $\mathcal{Q}(r, f, \alpha) = f(\alpha) \setminus \text{dncl}(r, \mathcal{L}(f, \alpha))$;
- $\mathcal{W}(r, f, \alpha) = f(\alpha) \setminus \text{wdncl}(r, \mathcal{L}(f, \alpha))$.

Для будь-яких $r \subseteq U \times U$, $P_S \subseteq 2^U$ і ординалу $\alpha_0 \in \mathcal{U}$ введемо такі позначення:

- $\mathcal{N}_1(r, \alpha_0) = \{ f : \mathcal{U} \rightarrow 2^U \mid \forall \alpha \in [0, \alpha_0] \forall \alpha' \in [0, \alpha] f(\alpha') \subseteq f(\alpha) \}$;
- $\mathcal{N}_2(r, \alpha_0) = \{ f : \mathcal{U} \rightarrow 2^U \mid \forall \alpha \in [0, \alpha_0]_L \nabla(f, \alpha) = \emptyset \}$;
- $\mathcal{N}_3(r, \alpha_0) = \{ f : \mathcal{U} \rightarrow 2^U \mid \forall \alpha \in [0, \alpha_0]_{0S} |\mathcal{L}(f, \alpha)| \geq \omega \Rightarrow$
 $(\text{escl}(r, \mathcal{L}(f, \alpha), f(\alpha)) \subseteq f(\alpha) \wedge \text{clterm}(r|_{f(\alpha)}, r)) \}$;
- $\mathcal{N}_4(r, \alpha_0) = \{ f : \mathcal{U} \rightarrow 2^U \mid \forall \alpha \in [0, \alpha_0]_{0S}$
 $\forall a \in \mathcal{L}(f, \alpha) (r\{a\} \subseteq \text{wdncl}(r, \mathcal{L}(f, \alpha)) \vee (r\{a\} \cap \mathcal{W}(r, f, \alpha) \neq \emptyset)) \}$;

- $\mathcal{N}_5(r, \alpha_0) = \{ f : \mathcal{U} \rightarrow 2^U \mid \forall \alpha \in [0, \alpha_0] f(\alpha) \in SF(r) \}$;
- $\mathcal{N}_6(r, \alpha_0) = \{ f : \mathcal{U} \rightarrow 2^U \mid \forall \alpha \in [0, \alpha_0] r|_{f(\alpha)} \in CCR(U) \}$;
- $\mathcal{N}_7(r, \alpha_0) = \{ f : \mathcal{U} \rightarrow 2^U \mid \forall \alpha \in [0, \alpha_0]$
 $((\alpha < \omega \Rightarrow |f(\alpha)| < \omega) \wedge (\alpha \geq \omega \Rightarrow |f(\alpha)| \leq \alpha)) \}$;
- $\mathcal{N}_8(r, Ps, \alpha_0) = \{ f : \mathcal{U} \rightarrow 2^U \mid \forall \alpha \in [0, \alpha_0]_{0S}$
 $((|Ps| = 1 \vee |Ps| \in [\omega, |f(\alpha)|]) \Rightarrow$
 $(\forall P \in Ps (f(\alpha) \cap P) \in SCF(r|_{f(\alpha)}))) \}$;
- $\mathcal{N}_9(r, \alpha_0) = \{ f : \mathcal{U} \rightarrow 2^U \mid \alpha_0 \geq \omega \Rightarrow \text{Fld}(r) \subseteq f(\alpha_0) \}$;
- $\mathcal{N}_{10}(r, \alpha_0) = \{ f : \mathcal{U} \rightarrow 2^U \mid \forall \alpha \in [0, \alpha_0]$
 $((\exists y \in U \mathcal{Q}(r, f, \alpha) = \{y\}) \Rightarrow \text{Fld}(r) \subseteq \text{dncl}(r, f(\alpha))) \}$;
- $\mathcal{N}_{11}(r, \alpha_0) = \{ f : \mathcal{U} \rightarrow 2^U \mid \forall \alpha \in [0, \alpha_0]_{0S} \setminus \{0\}$
 $(\mathcal{Q}(r, f, \alpha) = \emptyset \Rightarrow \text{Fld}(r) \subseteq \text{dncl}(r, f(\alpha))) \}$;
- $\mathcal{N}_{12}(r, \alpha_0) = \{ f : \mathcal{U} \rightarrow 2^U \mid \forall \alpha \in [\omega, \alpha_0] |\mathfrak{L}(f, \alpha)| \geq \omega \}$.

Для кожного відношення $r \subseteq U \times U$ і множини $Ps \subseteq 2^U$ позначимо:

$$\mathcal{N}(r, Ps) = \left(\bigcap_{i=1}^7 \mathcal{N}_i(r, |\text{Fld}(r)|) \right) \cap \mathcal{N}_8(r, Ps, |\text{Fld}(r)|) \cap \left(\bigcap_{i=9}^{12} \mathcal{N}_i(r, |\text{Fld}(r)|) \right).$$

Слід зауважити, що $|\text{Fld}(r)| \in [0, |U|] \subseteq \mathcal{U}$, оскільки $\text{Fld}(r) \subseteq U$.

Лема 1.1.3. Якщо $r \in CCR(U)$ і $Ps \subseteq SCF(r)$, то $\mathcal{N}(r, Ps) \neq \emptyset$.

Доведення. Формальний доказ наведено у [78, рядки 9533–9616]. Ідея цього доказу полягає в тому, щоб використати лему 1.1.2, щоб рекурсивно визначити трансфінітну послідовність підмножин $\text{Fld}(r)$, що надає значення $f(\alpha)$, $\alpha \in [0, |\text{Fld}(r)|]$ для деякої функції $f \in \mathcal{N}(r, Ps)$, після чого зробити висновок, що $\mathcal{N}(r, Ps) \neq \emptyset$. $\square$

Зауваження 1.1.12. Якщо $f \in \mathcal{N}(r, Ps)$ для деякого нескінченного CCR відношення r , то відношення $r|_{f(\alpha)}$, $\alpha \in [0, |\text{Fld}(r)|]$ є меншими за r за потужністю, і, крім того, вони утворюють ланцюг CCR відношень, об'єднанням якого є відношення r . Це впливає з результату розгортання позначень $\mathcal{N}_i(r, |\text{Fld}(r)|)$ для $i = 1, 2, 5, 6, 7, 9$ і $\nabla(f, \alpha)$, враховуючи, що якщо r є нескінченим відношенням, то $|\text{Fld}(r)|$ є граничним ординалом.

1.1.5.5. Побудова CCR лишку в класі DCR_2

Введемо таке позначення:

- $T(U)$ є множиною всіх непорожніх відношень $t \in CCR(U)$, таких, що t є функціональним (тобто $(a, b) \in t \wedge (a, c) \in t \Rightarrow b = c$), ациклічним (тобто t^+ є іррефлексивним) і тотальним на своєму полі (тобто $\forall x \in \text{Fld}(t) \ t\{x\} \neq \emptyset$).

Лема 1.1.4. Нехай $r \subseteq U \times U$ є відношенням, що є рефлексивним на $\text{Fld}(r)$. Нехай S є множиною ординалів, а $(W_\alpha)_{\alpha \in S}$ та $(R_\alpha)_{\alpha \in S}$ є індексованими сім'ями підмножин U , такими, що виконуються наведені нижче умови 1-4:

1. $S \subseteq [0, \omega_1)$, $|[0, \omega_1)| \leq |S|$, і $\forall \alpha \in S \ \exists \beta \in S \ \alpha < \beta$;
2. $\text{Fld}(r) = \bigcup_{\alpha \in S} W_\alpha$ і $\forall \alpha, \beta \in S \ (\alpha \neq \beta \Rightarrow W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset)$;
3. $\forall \alpha \in S \ R_\alpha \in T(U) \wedge R_\alpha \subseteq r \wedge |W_\alpha| \leq \omega \wedge \text{Fld}(R_\alpha) = W_\alpha \wedge \neg \text{Conelike}(r|_{W_\alpha})$;
4. $\forall \alpha \in S \ \forall x \in W_\alpha \ \exists a \in U \ ((x, a) \in (r|_{W_\alpha})^* \wedge (\forall \beta \in S \ \alpha < \beta \Rightarrow r\{a\} \cap W_\beta \neq \emptyset))$.

Тоді існує відношення $r' \in \mathfrak{U}(r)$, таке, що $r' \in DCR_2(U)$.

Доведення. Формальний доказ наведено у [78, рядки 4935–5746] (слід зауважити, що у формулюванні леми в [78] припущення не пронумеровані як вище, а позначення $\mathfrak{U}(r)$ у висновку не розгорнуто). Ідея цього формального доказу полягає у тому, щоб визначити відношення $r' \in \mathfrak{U}(r)$ (підвідношення r), таким чином, щоб орієнтований граф $(\text{Fld}(r'), r')$ мав вигляд, проілюстрований на рисунку 1.1, і показати, що $r' \in DCR_2(U)$. (Псевдо-)дерева, проілюстровані на рисунку 1.1, отримано з (не більш ніж злічених) графів $(W_\alpha, r|_{W_\alpha})$ для ординалів $\alpha \in S$.

Дана конструкція більш детально описана нижче (відношення R'_α відповідають множинам дуг (псевдо-)дерев, отриманих з $(W_\alpha, r|_{W_\alpha})$, відношення r'_e відповідає множині дуг, які з'єднують дерева, r' є об'єднанням r'_e і R'_α для всіх $\alpha \in S$).

Для кожного $\alpha \in S$ введемо такі позначення:

- $EP_\alpha = \{a \in W_\alpha \mid \forall \beta \in S \ (\alpha < \beta \Rightarrow r\{a\} \cap W_\beta \neq \emptyset)\}$,
елементи EP_α можна назвати *точками виходу з АПС* $(W_\alpha, r|_{W_\alpha})$;
- $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ є функцією, такою, що для кожних $\alpha, \beta \in S$ і $a \in EP_\alpha$, $b \in EP_\beta$ існують $\gamma \in S$ і $a', b' \in W_\gamma$, такі, що $\alpha < \gamma$, $\beta < \gamma$, $(a, a') \in r$, $(a', h(\gamma)) \in R_\gamma^*$, $(b, b') \in r$ і $(b', h(\gamma)) \in R_\gamma^*$;
- $(s_{\alpha, k})_{k=0}^\infty$ є деякою фіксованою нескінченною кофінальною послідовністю редукцій в (зліченній, CCR) АПС $(\text{Fld}(R_\alpha), R_\alpha)$;
- $E_\alpha = \{(s_{\alpha, k+1}, s_{\alpha, k}) \notin (r|_{W_\alpha})^*\}$;
- $F_\alpha = \{s_{\alpha, k} \mid k \in E_\alpha\} \cap \{a \in W_\alpha \mid (h(\alpha) \in W_\alpha \Rightarrow (h(\alpha), a) \in R_\alpha^*) \wedge (a, h(\alpha)) \notin R_\alpha^*\}$;

- $re_{0,\alpha}$ і $re_{1,\alpha}$ є деякою парою послідовних елементів у послідовності $(s_{\alpha,k})_{k=0}^{\infty}$, такою, що $re_{0,\alpha}$ знаходиться за певним індексом $k \in E_{\alpha}$ в $(s_{\alpha,k})_{k=0}^{\infty}$ і $re_{0,\alpha} \in F_{\alpha}$;
- ep_{α} є елементом EP_{α} , таким, що $(re_{1,\alpha}, ep_{\alpha}) \in (r|_{W_{\alpha}})^*$;
- spl_{α} є довжиною найкоротшої послідовності редукцій в АПС $(W_{\alpha}, r|_{W_{\alpha}})$, що починається з елементу $re_{1,\alpha}$ і закінчується елементом ep_{α} ;
- $sp_{\alpha,k}$ для $k = 0, 1, \dots, (spl_{\alpha} - 1)$ є деякою послідовністю редукцій, що починається з елементу $re_{1,\alpha}$, що закінчується елементом ep_{α} , і що має довжину spl_{α} ;
- $R'_{\alpha} = \{(a, b) \in R_{\alpha} \mid (b, re_{0,\alpha}) \in R_{\alpha}^*\} \cup \{(re_{0,\alpha}, re_{1,\alpha})\} \cup \{(sp_{\alpha,k}, sp_{\alpha,k+1}) \mid k < spl_{\alpha}\}$;
- $r'_e = \{(a, b) \in r \mid \exists \alpha, \beta \in S \ \alpha < \beta \wedge a = ep_{\alpha} \wedge b \in W_{\beta} \wedge (b, h(\beta)) \in R_{\beta}^*\}$;
- $r' = r'_e \cup \bigcup_{\alpha \in S} R'_{\alpha}$;
- $g : [0, \omega) \rightarrow 2^{U \times U}$ є функцією, такою, що для кожного $n \in [0, \omega)$:

$$g(n) = \begin{cases} \{(u, v) \in r' \mid r'\{u\} = \{v\}\}, & \text{якщо } n = 0, \\ \{(u, v) \in r' \mid r'\{u\} \neq \{v\}\}, & \text{якщо } n = 1, \\ \emptyset, & \text{якщо } n \notin \{0, 1\}. \end{cases}$$

У формальному доказі показано, що функція $g \in DCR$ -генеруючою [78, рядки 5659–5720] і $r' \in \mathfrak{U}(r)$. Тоді $r' \in \mathfrak{U}(r) \cap DCR_2(U)$, оскільки $r' = \bigcup_{n < 2} g(n)$. $\square$

1.1.5.6. Завершення доведення головної теореми підрозділу

Лема 1.1.5. Нехай $r \in CCR(U)$ є відношенням, що є рефлексивним на $\text{Fld}(r)$. Припустимо, що $\text{scf}(r)$ є регулярним кардиналом [11], таким, що $\omega < \text{scf}(r) = |\text{Fld}(r)|$. Тоді існують множина Ps і функція $f \in \mathcal{N}(r, Ps)$, такі, що для кожного ненульового неграничного ординалу $\alpha \in [0, |\text{Fld}(r)|)$, такого, що $|\mathcal{L}(f, \alpha)| \geq \omega$, виконуються такі умови 1–3:

1. $r|_{\mathcal{W}(r, f, \alpha)} \in CCR(U)$;
2. $|r|_{\mathcal{W}(r, f, \alpha)}| < |\text{Fld}(r)|$;
3. для кожного $a \in \mathcal{W}(r, f, \alpha)$ існує елемент $b \in U$ (що позначається у [78] як “ $wesc \ r \ f \ \alpha \ a$ ”), такий, що $b \in \mathcal{W}(r, f, \alpha)$, $(a, b) \in (r|_{\mathcal{W}(r, f, \alpha)})^*$ і $r\{b\} \cap \mathcal{W}(r, f, \beta) \neq \emptyset$ для кожного неграничного ординалу β , такого, що $\alpha < \beta < |\text{Fld}(r)|$.

Доведення. Формальний доказ наведено у [78, рядки 10415–10460].

Ідея формального доказу полягає у тому, щоб визначити $P_s = \{P\}$, де

$$P = \{ a \in \text{Fld}(r) \mid \text{scf}(r) \leq \text{wrank}(r, r\{a\}) \},$$

після чого отримати функцію $f \in \mathcal{N}(r, P_s)$ за допомогою леми 1.1.3, і показати, що f задовольняє умови 1–3. $\square$

Лема 1.1.6. Нехай $r \subseteq U \times U$ є відношенням, що є рефлексивним на $\text{Fld}(r)$. Припустимо, що $r \in \text{CCR}(U)$ і $\text{scf}(r) = |\text{Fld}(r)| = \omega_1$. Тоді $r \in \text{DCR}_3(U)$.

Доведення. Формальний доказ наведено у [78, рядки 10733–11021].

Доведення поводиться таким чином. Нехай P_s і $f \in \mathcal{N}(r, P_s)$ є множиною і функцією, отриманими за допомогою леми 1.1.5, застосованої до r .

Введемо такі позначення:

- S є множиною всіх неграничних ординалів в $[\omega, \omega_1)$;
- $(W_\alpha)_{\alpha \in S}$ є індексованою сім'єю підмножин U , такою, що $W_\alpha = \mathcal{W}(r, f, \alpha)$ для $\alpha \in S$;
- $(R_\alpha)_{\alpha \in S}$ є індексованою сім'єю відношень на U , такою, що

$$R_\alpha \in \text{Span}(r|_{\mathcal{W}(r, f, \alpha)}) \cap T(U) \text{ для } \alpha \in S;$$

$$r_1 = r|_{\bigcup_{\alpha \in S} W_\alpha}.$$

Нехай r' є відношенням у $\text{DCR}_2(U)$, отриманим за допомогою леми 1.1.4, застосованої до r_1 , S , $(W_\alpha)_{\alpha \in S}$, $(R_\alpha)_{\alpha \in S}$. У формальному доказі даної леми показано, що $r' \in \mathfrak{U}(r)$. Тоді $r \in \text{DCR}_3(U)$ за лемою 1.1.1. $\square$

Лема 1.1.7. Якщо $r \in \text{CCR}(U)$ і $\text{scf}(r) \leq \omega$, то $r \in \text{DCR}_2(U)$.

Доведення. Формальний доказ наведено у [78, рядки 10687–10731]. Ідея доведення подібна до ідеї [31, теорема 19]. $\square$

Лема 1.1.8. Якщо $r \in \text{CCR}(U)$ і $|\text{Fld}(r)| \leq \omega_1$, то $r \in \text{DCR}_3(U)$.

Доведення. Формальний доказ наведено у [78, рядки 11023–11072].

Доведення поводиться таким чином. Розглянемо два випадки.

1. Якщо $\text{scf}(r) \leq \omega$, то $r \in \text{DCR}_2(U)$ за лемою 1.1.7, звідки $r \in \text{DCR}_3(U)$.
2. Припустимо, що $\text{scf}(r) = \omega_1$. Нехай $r_1 = r \cup \{(x, x) \mid x \in \text{Fld}(r)\}$. Тоді або $\text{scf}(r_1) \leq \omega$, або $\text{scf}(r_1) = |\text{Fld}(r_1)|$. Якщо $\text{scf}(r_1) \leq \omega$, то $r_1 \in \text{DCR}_2(U)$

за лемою 1.1.7. Якщо $\text{scf}(r_1) = |\text{Fld}(r_1)|$, то $r_1 \in DCR_3(U)$ за лемою 1.1.6. Таким чином, у будь-якому випадку, $r_1 \in DCR_3(U)$. З цього можна зробити висновок, що $r \in DCR_3(U)$. $\square$

Лема 1.1.9. *Якщо $r \subseteq U \times U$ є конфлюентним відношенням і $|\text{Fld}(r)| \leq \omega_1$, то $r \in DCR_3(U)$.*

Доведення. Формальний доказ наведено у [78, рядки 11634–11652]. Ідея формального доказу така. Розглянемо (U, r) як орієнтований граф. Для кожної компоненти зв'язності (C, s) в (U, r) відношення s задовольняє припущення леми 1.1.8, тому $s \in DCR_3(U)$. З цього можна зробити висновок, що $r \in DCR_3(U)$. $\square$

Доведення теореми 1.1.1. Формальний доказ наведено у [78, рядки 11760–11807]. Він впливає безпосередньо з леми 1.1.9, оскільки з умови $|r| \leq \omega_1$ випливає, що $|\text{Fld}(r)| \leq \omega_1$. $\square$

1.2. Неповнота методу спадних діаграм з двома мітками та відсутність колапсу на рівні 2 ієрархії систем, що мають спадну властивість Черча–Россера

Нехай $\mathbb{R}$ позначає множину дійсних чисел і $2^{\mathbb{R}}$ позначає булеан множини $\mathbb{R}$. Нехай $\mathcal{P}_f(\mathbb{R})$ позначає множину всіх скінченних підмножин $\mathbb{R}$.

Твердження 1.2.1. *АПС $(A, \rightarrow)$ належить класу DCR_2 тоді і тільки тоді, коли існують бінарні відношення $\rightarrow_0 \subseteq A \times A$ та $\rightarrow_1 \subseteq A \times A$, такі, що $\rightarrow = (\rightarrow_0 \cup \rightarrow_1)$ і наведені нижче 3 умови виконуються, де для $i = 0, 1$, символи $\rightarrow_i^=$ та $\rightarrow_i^*$ позначають рефлексивне та рефлексивно-транзитивне замикання $\rightarrow_i$ на A відповідно:*

1. $\forall a, b, c \in A ((a \rightarrow_0 b \wedge a \rightarrow_0 c) \Rightarrow \exists d \in A (b \rightarrow_0^= d \wedge c \rightarrow_0^= d))$
2. $\forall a, b, c \in A ((a \rightarrow_0 b \wedge a \rightarrow_1 c) \Rightarrow \exists b', d \in A (b \rightarrow_1^= b' \wedge b' \rightarrow_0^* d \wedge c \rightarrow_0^* d))$
3. $\forall a, b, c \in A ((a \rightarrow_1 b \wedge a \rightarrow_1 c) \Rightarrow \exists b', b'', c', c'', d \in A (b \rightarrow_0^* b' \wedge b' \rightarrow_1^= b'' \wedge b'' \rightarrow_0^* d \wedge c \rightarrow_0^* c' \wedge c' \rightarrow_1^= c'' \wedge c'' \rightarrow_0^* d))$.

Доведення. Впливає безпосередньо з означення 1.1.9, де $\gamma = 2$, враховуючи аналогію випадків $\alpha = 0, \beta = 1$ та $\alpha = 1, \beta = 0$. $\square$

Приклад 1.2.1. Нехай $(E, \rightarrow_E)$ позначає АПС, таку, що

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \times 2^{\mathbb{R}} \times 2^{\mathbb{R}} \times 2^{\mathbb{R}},$$

а $\rightarrow_E$ є бінарним відношенням на E , таким, що для кожних $(n, A, B, C) \in E$ та $(n', A', B', C') \in E$ виконується $(n, A, B, C) \rightarrow_E (n', A', B', C')$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з таких 9 умов:

1. $n = 0 \wedge A = \emptyset \wedge B = \emptyset \wedge C = \emptyset \wedge$
 $n' = 1 \wedge A' \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge B' = \emptyset \wedge C' = \emptyset;$
2. $n = 1 \wedge A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge B = \emptyset \wedge C = \emptyset \wedge$
 $n' = 2 \wedge A' = A \wedge B' = \emptyset \wedge C' = \emptyset;$
3. $n = 2 \wedge A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge B = \emptyset \wedge C = \emptyset \wedge$
 $n' = 3 \wedge A' = A \wedge B' \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge C' = \emptyset;$
4. $n = 3 \wedge A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge C = \emptyset \wedge$
 $n' = 4 \wedge A' = A \wedge B' = B \wedge C' = \emptyset;$
5. $n = 4 \wedge A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge C = \emptyset \wedge$
 $n' = 5 \wedge A' = A \wedge B' = B \wedge C' \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R});$
6. $n = 5 \wedge A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge C \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge$
 $n' = 6 \wedge A' = A \wedge B' = B \wedge C' = C;$
7. $n = 6 \wedge A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge C \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge$
 $n' = 7 \wedge A' = A \cup B \cup C \wedge B' = A' \wedge C' = A';$
8. $n = 7 \wedge A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge B = A \wedge C = A \wedge$
 $n' = 8 \wedge A' = A \wedge B' = A' \wedge C' = A';$
9. $n = 8 \wedge A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge B = A \wedge C = A \wedge$
 $n' = 7 \wedge A \subset A' \wedge A' \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \wedge B' = A' \wedge C' = A'.$

Напівформально, ідея АПС у прикладі 1.2.1 базується на поданні множини E як об'єднання 9-ти рівнів, де рівень складається з елементів вигляду (n, A, B, C) для фіксованого $n \in \{0, 1, \dots, 8\}$, і пов'язуванні елементів зазначених рівнів відповідно до зображення на рисунку 1.3: елементи з незліченно багатьма прямими наступниками мають у якості прямих наступників елементи з одним прямим наступником, елементи з одним прямим наступником мають у якості прямого наступника елемент з незліченно багатьма прямими наступниками. Послідовності редукцій елементів з $n \in \{0, \dots, 5\}$ лише розбігаються, але їх продовження елементами з $n \in \{6, 7, 8\}$ можуть збігатись.

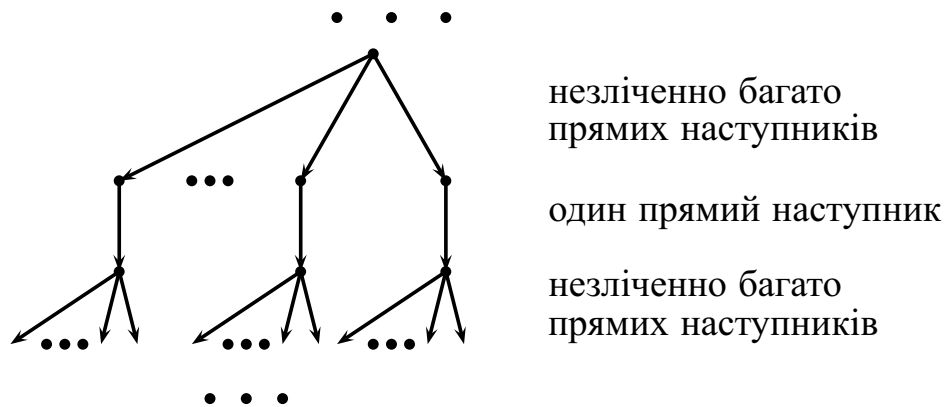


Рисунок 1.3 — Ілюстрація відношення редукції АПС $(E, \rightarrow_E)$ з прикладу 1.2.1.

Деталі визначення $\rightarrow_E$ забезпечують, що $(E, \rightarrow_E)$ є конфлюентною, але не має властивості кофінальності, що впливає з наведеної нижче теореми.

Теорема 1.2.1. АПС $(E, \rightarrow_E)$, визначена у прикладі 1.2.1, є конфлюентною, але вона не належить класу DCR_2 .

Доведення. Формальний доказ формалізованої версії теореми 1.2.1 у системі Isabelle доступний за посиланням [79, рядки 1142–1145, теорема `thm_1`].

Більш детально, формальний доказ показує, що $(E, \rightarrow_E)$ є конфлюентною АПС, але не існує пари відношень $\rightarrow_0 \subseteq E \times E$ і $\rightarrow_1 \subseteq E \times E$, таких, що $\rightarrow_E = (\rightarrow_0 \cup \rightarrow_1)$ і $\rightarrow_0, \rightarrow_1$ задовольняють умовам 1-3 твердження 1.2.1.

Основні кроки доведення теореми 1.2.1 можуть бути описані таким чином. Спочатку припускається, що існують $\rightarrow_0 \subseteq E \times E$ і $\rightarrow_1 \subseteq E \times E$, такі, що $\rightarrow_E = (\rightarrow_0 \cup \rightarrow_1)$ і $\rightarrow_0, \rightarrow_1$ задовольняють умовам 1-3 твердження 1.2.1. Тоді, використовуючи умову 1 твердження 1.2.1 і визначення $\rightarrow_E$, у [79, формальна лема `lem_rE_diamsubr_un`] показано, що будь-який елемент E має не більше як один прямий наступник відносно $\rightarrow_0$. Слід зауважити, що з цього випливає, що множина елементів, що є досяжними з будь-якого даного елемента за допомогою $\rightarrow_0$ є не більш ніж зліченною. Використовуючи цей факт, показано [79, формальна лема `lem_rE_one`], що відношення $\rightarrow_0$ не містить кроків редукції вигляду $(n, A, B, C) \rightarrow_0 (n', A', B', C')$, де $n \in \{0, 2, 4\}$ (слід зауважити, що такі елементи (n, A, B, C) мають незліченно багато прямих наступників відносно $\rightarrow_E$). Тоді всі такі кроки редукції належать $\rightarrow_1$. Використовуючи цей факт, отримано суперечність з умовою 3 твердження 1.2.1. $\square$

Теорема 1.2.2. АПС $(E, \rightarrow_E)$, визначена у прикладі 1.2.1, належить класу DCR_3 .

Доведення. Формальний доказ формалізованої версії теореми 1.2.2 у системі Isabelle доступний за посиланням [79, рядки 1147–1150, теорема `thm_2`].

Більш детально, формальний доказ показує, що наведені нижче бінарні відношення $\rightarrow_i$ на E задовольняють рівність $\rightarrow_E = (\rightarrow_0 \cup \rightarrow_1 \cup \rightarrow_2)$ і умови 1-6 твердження 1.1.2:

- $\rightarrow_0 = \{((n, A, B, C), (n', A', B', C')) \in \rightarrow_E \mid n \in \{1, 3, 5, 6, 7\}\};$
- $\rightarrow_1 = \{((n, A, B, C), (n', A', B', C')) \in \rightarrow_E \mid n \in \{4, 8\}\};$
- $\rightarrow_2 = \{((n, A, B, C), (n', A', B', C')) \in \rightarrow_E \mid n \in \{0, 2\}\};$
- $\rightarrow_{01} = \rightarrow_0 \cup \rightarrow_1.$

□

З теорем 1.2.1 та 1.2.2 безпосередньо випливає, що метод спадних діаграм з двома мітками є *неповним* і ієрархія DCR (систем, що мають спадну властивість Черча–Россера) *не* має колапсу на рівні 2. Також, з цих теорем випливає, що відповідь на питання [32, Open Problem 6.4] є ствердною.

1.3. Властивість кофінальності в контексті ієрархії АПС зі спадною властивістю Черча-Россера

1.3.1. Теорема про зв'язний кофінальний підграф

Будемо казати, що АПС $(A, \rightarrow)$ є *слабко зв'язною*, якщо $a_1 \leftrightarrow^* a_2$ для всіх $a_1, a_2 \in A$, де $\leftrightarrow = \rightarrow \cup \rightarrow^{-1}$. Також, будемо казати, що АПС $(B, \rightarrow')$ є *підграфом* АПС $(A, \rightarrow)$, якщо $B \subseteq A$ і $\rightarrow' \subseteq \rightarrow$.

Будемо казати, що підмножина $B \subseteq A$ *кофінальна* [174] у передвпорядкованій множині $(A, \leq)$ (де $\leq \subseteq A \times A$ є рефлексивним і транзитивним відношенням), якщо $\forall a \in A \exists b \in B a \leq b$. Слід зауважити, що для будь-якої АПС $(A, \rightarrow)$, пара $(A, \rightarrow^*)$ є передвпорядкованою множиною.

Теорема 1.3.1. *Нехай $(A, \rightarrow)$, $(B, \rightarrow')$ є АПС, такими, що $(B, \rightarrow')$ є слабко зв'язним підграфом $(A, \rightarrow)$ і B є кофінальною підмножиною у передвпорядкованій множині $(A, \rightarrow^*)$. Тоді для будь-якого ненульового ординалу γ , якщо $(B, \rightarrow')$ належить DCR_γ , то $(A, \rightarrow)$ належить $DCR_{\gamma+1}$.*

Доведення теореми 1.3.1 наведене у пункті 1.3.2 нижче. Формальний доказ формалізованої версії теореми 1.3.1 для $\gamma < \omega$ описаний у пункті 1.3.4.

Зауваження 1.3.1. Напівформально, у випадку скінченного γ з теореми випливає, що для незліченної, слабко зв'язної, конфлюентної АПС $(A, \rightarrow)$ основна частина

складності доведення її конфлюентності методом спадних діаграм у сенсі потужності множини міток [31], необхідної для застосування цього методу, пов'язана зі слабко зв'язним підграфом $(B, \rightarrow')$, де B є кофінальною множиною у $(A, \rightarrow^*)$.

Більш детально це може бути пояснено таким чином. Припустимо, що $\gamma = n \in (0, \omega)$, $(A, \rightarrow) \in \text{АПС}$, і існує слабко зв'язний підграф $(B, \rightarrow')$ в $(A, \rightarrow)$, такий, що

- $(B, \rightarrow')$ є конфлюентною АПС і її конфлюентність може бути доведена методом спадних діаграм за допомогою n міток (що виражається умовою “ $(B, \rightarrow')$ належить DCR_γ ” у теоремі 1.3.1);
- з будь-якого даного елемента $a \in A$ можна досягти деякий елемент B за допомогою кроків редукції в $\rightarrow$ (це виражається припущенням про кофінальність у теоремі 1.3.1).

Тоді за теоремою 1.3.1, $(A, \rightarrow)$ є конфлюентною АПС, такою, що її конфлюентність може бути доведена методом спадних діаграм за допомогою $n + 1$ міток (це виражається висновком “ $(A, \rightarrow)$ належить $DCR_{\gamma+1}$ ” у теоремі 1.3.1).

Зауваження 1.3.2. В загальному випадку, висновок “ $(A, \rightarrow)$ належить $DCR_{\gamma+1}$ ” у теоремі 1.3.1 не може бути посилений до “ $(A, \rightarrow)$ належить DCR_γ ”, що впливає з результатів [64].

Наслідок 1.3.1. Нехай γ є ненульовим ординалом і $(A, \rightarrow) \in \text{АПС}$. Припустимо, що для кожного $a \in A$ існує АПС $(B, \rightarrow')$, така, що

1. $(B, \rightarrow')$ є слабко зв'язним підграфом $(A, \rightarrow)$;
2. $(B, \rightarrow')$ належить DCR_γ ;
3. B є кофінальною підмножиною у передвпорядкованій множині $(A_a, \rightarrow_a^*)$, де $A_a = \{b \in A \mid a \rightarrow^* b\}$ і $\rightarrow_a = \rightarrow \cap (A_a \times A_a)$.

Тоді $(A, \rightarrow)$ належить $DCR_{\gamma+1}$.

Доведення наслідку 1.3.1 наведене у пункті 1.3.3 нижче.

Розглянемо такий приклад, що ілюструє застосування наслідку 1.3.1.

Приклад 1.3.1. Зафіксуємо деяку АПС $(A, \rightarrow)$ з $A \neq \emptyset$, що має властивість кофінальності [107, 31]. Нехай a є довільним елементом A . Тоді, за властивістю кофінальності $(A, \rightarrow)$, існує (непорожня) скінченна або нескінченна послідовність редукцій $b_0 \rightarrow b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow \dots$ з множиною індексів I (що є або множиною $\{0, 1, \dots, k\}$ для деякого невід'ємного цілого числа k , або множиною всіх невід'ємних цілих чи-

сел), така, що $a = b_0$ і для кожного $b \in A$, такого, що $a \rightarrow^* b$, маємо $(b, b_i) \in (\rightarrow'')^*$ для деякого індексу $i \in I$, де $\rightarrow''$ є обмеженням $\rightarrow$ на $\{b \in A \mid a \rightarrow^* b\}$.

Нехай $B = \{b_i \mid i \in I\}$ і $\rightarrow' = \{(b_i, b_{i+1}) \mid i \in I \wedge i+1 \in I\}$. Тоді $(B, \rightarrow')$ є АПС, що є слабко зв'язним підграфом $(A, \rightarrow)$ і належить класу DCR_1 (оскільки $(B, \rightarrow')$ є конфлюентною і всі кроки редукції в $\rightarrow'$ можуть бути розмічені міткою 0 для доведення конфлюентності $(B, \rightarrow')$ методом спадних діаграм).

Крім того, B є кофінальною підмножиною у передвпорядкованій множині $(A_a, \rightarrow_a^*)$, де $A_a = \{b \in A \mid a \rightarrow^* b\}$ і $\rightarrow_a = \rightarrow \cap (A_a \times A_a)$, оскільки $B \subseteq \{b \in A \mid a \rightarrow^* b\}$ і для кожного $b \in A_a$ маємо $b \in A \wedge a \rightarrow^* b$, тому $(b, b_i) \in (\rightarrow'')^*$ для деякого $b_i \in B$, де

$$\rightarrow'' = \rightarrow \cap (\{b \in A \mid a \rightarrow^* b\} \times \{b \in A \mid a \rightarrow^* b\}) = \rightarrow \cap (A_a \times A_a) = \rightarrow_a^*.$$

Тоді за наслідком 1.3.1, $(A, \rightarrow)$ належить $DCR_{1+1} = DCR_2$.

Приклад 1.3.1 надає пояснення, чому властивість кофінальності пов'язана з рівнем 2 в DCR ієрархії (властивість кофінальності сформульована в термінах кофінальної послідовності редукцій, яку можна розглядати як слабко зв'язний підграф, що належить класу DCR_1).

1.3.2. Доведення теореми 1.3.1

Сформулюємо і доведемо декілька допоміжних лем.

Лема 1.3.1. Нехай γ є ординалом, U є множиною, а s, r є такими відношеннями, що $s \subseteq r \subseteq U \times U$. Припустимо, що виконуються такі умови 1-4:

1. $\forall a, b \in \text{Fld}(s) \exists c \in \text{Fld}(s) (a, c) \in s^* \wedge (b, c) \in s^*$;
2. (U, s) є АПС у класі DCR_γ ;
3. $\forall a \in \text{Fld}(r) \exists b \in \text{Fld}(s) (a, b) \in r^=$;
4. $\{b \mid \exists a \in \text{Fld}(s) (a, b) \in r \setminus s\} \subseteq \text{Fld}(s)$.

Тоді (U, r) є АПС у класі $DCR_{\gamma+1}$.

Доведення. За припущенням 2, (U, s) належить класу DCR_γ , тому існує індексована сім'я $(\rightarrow_i)_{i \in I}$ відношень $\rightarrow_i \subseteq U \times U$, де $I = \{i \mid i < \gamma\}$, таких, що $s = \bigcup_{i \in I} (\rightarrow_i)$ і для кожних $\alpha, \beta < \gamma$ і $a, b, c \in U$, якщо $a \rightarrow_\alpha b$ і $a \rightarrow_\beta c$, то існують елементи $b', b'', c', c'', d \in U$, такі, що

$$\begin{aligned} (b, b') &\in (\rightarrow_{<\alpha})^* \wedge (b', b'') \in (\rightarrow_\beta)^= \wedge (b'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^* \\ (c, c') &\in (\rightarrow_{<\beta})^* \wedge (c', c'') \in (\rightarrow_\alpha)^= \wedge (c'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^* \end{aligned}$$

де $\rightarrow_{<\alpha}$ позначає $\bigcup_{i<\alpha}(\rightarrow_i)$, $\rightarrow_{<\alpha\vee<\beta}$ позначає $\bigcup_{i<\alpha\vee i<\beta}(\rightarrow_i)$, а верхні індекси $=$ і $*$ використовуються для позначення, відповідно, рефлексивного і рефлексивно-транзитивного замикання відношення на множині U .

Нехай $J = \{i \mid i < \gamma + 1\}$. Тоді $I \subseteq J$ і $\gamma \in J \setminus I$.

Введемо індексовану сім'ю $(\rightarrow'_j)_{j \in J}$ бінарних відношень $\rightarrow'_j$ на U , де для кожного $j \in J$,

$$\rightarrow'_j = \begin{cases} \rightarrow_j, & j \in I \\ r \setminus s, & j \in J \setminus I. \end{cases}$$

Крім того, для будь-яких $\alpha, \beta < \gamma + 1$ нехай $\rightarrow'_{<\alpha}$ позначає $\bigcup_{j<\alpha}(\rightarrow'_j)$, а $\rightarrow'_{<\alpha\vee<\beta}$ позначає $\bigcup_{j<\alpha\vee j<\beta}(\rightarrow'_j)$. Оскільки $s \subseteq r$ і $J \setminus I \neq \emptyset$, маємо

$$r = s \cup (r \setminus s) = \bigcup_{i \in I} \rightarrow_i \cup \bigcup_{j \in J \setminus I} \rightarrow'_j = \bigcup_{j \in J} \rightarrow'_j.$$

Покажемо, що для кожних $\alpha, \beta < \gamma + 1$ і $a, b, c \in U$, якщо $a \rightarrow'_\alpha b$ і $a \rightarrow'_\beta c$, то існують $b', b'', c', c'', d \in U$, такі, що

$$(b, b') \in (\rightarrow'_{<\alpha})^* \wedge (b', b'') \in (\rightarrow'_\beta)^= \wedge (b'', d) \in (\rightarrow'_{<\alpha\vee<\beta})^* \quad (1.2)$$

$$(c, c') \in (\rightarrow'_{<\beta})^* \wedge (c', c'') \in (\rightarrow'_\alpha)^= \wedge (c'', d) \in (\rightarrow'_{<\alpha\vee<\beta})^* \quad (1.3)$$

Нехай $\alpha, \beta < \gamma + 1$ і $a, b, c \in U$ є такими елементами, що $a \rightarrow'_\alpha b$ і $a \rightarrow'_\beta c$. Розглянемо такі випадки.

Випадок 1: $\alpha \in I$ і $\beta \in I$. Тоді $\rightarrow'_{<\alpha} = \rightarrow_{<\alpha}$, $\rightarrow'_{<\alpha\vee<\beta} = \rightarrow_{<\alpha\vee<\beta}$, $\rightarrow'_\alpha = \rightarrow_\alpha$, і $\rightarrow'_\beta = \rightarrow_\beta$, і існують $b', b'', c', c'', d \in U$, такі, що

$$(b, b') \in (\rightarrow_{<\alpha})^* \wedge (b', b'') \in (\rightarrow_\beta)^= \wedge (b'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha\vee<\beta})^*$$

$$(c, c') \in (\rightarrow_{<\beta})^* \wedge (c', c'') \in (\rightarrow_\alpha)^= \wedge (c'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha\vee<\beta})^*$$

Таким чином, умови (1.2) і (1.3) виконуються.

Випадок 2: $\alpha \in I$ і $\beta \in J \setminus I$. Тоді $a \rightarrow_\alpha b$ і $(a, c) \in r \setminus s$, тому $(a, b) \in s$ і $(a, c) \in r \setminus s$. Тоді $a, b \in \text{Fld}(s)$ і з припущення 4 випливає, що $c \in \text{Fld}(s)$. Тоді з припущення 1 випливає, що існує елемент $d \in \text{Fld}(s)$, такий, що $(b, d) \in s^* \wedge (c, d) \in s^*$. Слід зауважити, що $s \subseteq \rightarrow'_{<\alpha\vee<\beta}$. Тоді умови (1.2), (1.3) виконуються для $b' = b'' = b$, $c' = c'' = c$ і вищезгаданого елемента d .

Випадок 3: $\alpha \in J \setminus I$ і $\beta \in I$. Тоді $(a, b) \in r \setminus s$ і $a \rightarrow_\beta c$, тому $(a, b) \in r \setminus s$

і $(a, c) \in s$. Тоді $a, c \in \text{Fld}(s)$ і з припущення 4 випливає, що $b \in \text{Fld}(s)$. Тоді з припущення 1 випливає, що існує $d \in \text{Fld}(s)$, такий, що $(b, d) \in s^* \wedge (c, d) \in s^*$. Слід зауважити, що $s \subseteq \rightarrow'_{<\alpha \vee <\beta}$. Тоді умови (1.2), (1.3) виконуються для $b' = b'' = b$, $c' = c'' = c$ і вищезгаданого елементу d .

Випадок 4: $\alpha \in J \setminus I$ і $\beta \in J \setminus I$. Тоді $(a, b) \in r \setminus s$ і $(a, c) \in r \setminus s$. Тоді $b, c \in \text{Fld}(r)$. З припущення 3 випливає, що існує $b'' \in \text{Fld}(s)$, такий, що $(b, b'') \in r^= \wedge ((b, b'') \in s \Rightarrow b = b'')$, оскільки якщо $b \in \text{Fld}(s)$, то можна узяти $b'' = b$, а якщо $b \notin \text{Fld}(s)$, то b'' може бути отримано з припущення 3, застосованого до b і умова $(b, b'') \in s$ не може виконуватись. Аналогічно, з припущення 3 випливає, що існує елемент $c'' \in \text{Fld}(s)$, такий, що $(c, c'') \in r^= \wedge ((c, c'') \in s \Rightarrow c = c'')$. Тоді $(b, b'') \in (r \setminus s)^=$ і $(c, c'') \in (r \setminus s)^=$. Крім того, з припущення 1 випливає, що існує елемент $d \in \text{Fld}(s)$, такий, що $(b'', d) \in s^* \wedge (c'', d) \in s^*$. Слід зауважити, що $s \subseteq \rightarrow'_{<\alpha \vee <\beta}$ і, крім того, $(b, b'') \in (\rightarrow'_{\beta})^=$ і $(c, c'') \in (\rightarrow'_{\alpha})^=$. Тоді умови (1.2), (1.3) виконуються для $b' = b$, $c' = c$ і вищезгаданих b'', c'', d .

Отже, $(U, r) \in \text{АПС}$ у класі $\text{DCR}_{\gamma+1}$. □

Лема 1.3.2. Нехай γ є ординалом, U є множиною, а s, r є такими відношеннями, що $s \subseteq r \subseteq U \times U$. Припустимо, що виконуються такі умови 1-3:

1. $\text{Fld}(s) = \text{Fld}(r)$;
2. $\forall a, b \in \text{Fld}(s) \exists c \in \text{Fld}(s) (a, c) \in s^* \wedge (b, c) \in s^*$;
3. $(U, s) \in \text{АПС}$ у класі DCR_{γ} .

Тоді $(U, r) \in \text{АПС}$ у класі $\text{DCR}_{\gamma+1}$.

Доведення. Оскільки $\text{Fld}(s) = \text{Fld}(r)$ за припущенням 1, то маємо

$$\forall a \in \text{Fld}(r) \exists b \in \text{Fld}(s) (a, b) \in r^=,$$

$$\{b \mid \exists a \in \text{Fld}(s) (a, b) \in r \setminus s\} \subseteq \text{Fld}(r) = \text{Fld}(s).$$

Тоді з припущень 2, 3 випливає, що γ, U, s, r задовольняють всі припущення леми 1.3.1. Таким чином, $(U, r) \in \text{АПС}$ у $\text{DCR}_{\gamma+1}$ за лемою 1.3.1. □

Лема 1.3.3. Нехай γ є ненульовим ординалом, U є множиною, s, r є такими відношеннями, що $s \subseteq r \subseteq U \times U$, і виконуються такі умови 1-3:

1. $\forall a, b \in \text{Fld}(s) \exists c \in \text{Fld}(s) (a, c) \in s^* \wedge (b, c) \in s^*$;
2. $(U, s) \in \text{АПС}$ у класі DCR_{γ} ;
3. $\forall a \in \text{Fld}(r) \exists b \in \text{Fld}(s) (a, b) \in r^*$.

Тоді $(U, r) \in \text{АПС}$ у класі $\text{DCR}_{\gamma+1}$.

Доведення. За припущенням 2, (U, s) належить класу DCR_{γ} , тому існує індексована сім'я $(\rightarrow_i)_{i \in I}$ відношень $\rightarrow_i \subseteq U \times U$, де $I = \{i \mid i < \gamma\}$, таких, що $s = \bigcup_{i \in I} (\rightarrow_i)$ і для кожних $\alpha, \beta < \gamma$ і $a, b, c \in U$, якщо $a \rightarrow_{\alpha} b$ і $a \rightarrow_{\beta} c$, то існують елементи $b', b'', c', c'', d \in U$, такі, що

$$\begin{aligned} (b, b') &\in (\rightarrow_{<\alpha})^* \wedge (b', b'') \in (\rightarrow_{\beta})^= \wedge (b'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^* \\ (c, c') &\in (\rightarrow_{<\beta})^* \wedge (c', c'') \in (\rightarrow_{\alpha})^= \wedge (c'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^* \end{aligned}$$

де $\rightarrow_{<\alpha}$ позначає $\bigcup_{i < \alpha} (\rightarrow_i)$ і $\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta}$ позначає $\bigcup_{i < \alpha \vee i < \beta} (\rightarrow_i)$.

Для кожного елементу $a \in \text{Fld}(r)$ введемо такі позначення:

- $d(a)$ є найменшим невід'ємним цілим числом, таким, що існує $b \in \text{Fld}(s)$, такий, що $(a, b) \in r^i$, де для $i > 0$, $r^i = \{(a, b) \mid \exists c_0, c_1, \dots, c_i \in U \ c_0 = a \wedge c_i = b \wedge \forall k \in \{0, 1, \dots, i-1\} \ (c_k, c_{k+1}) \in r\}$, $r^0 = \{(a, a) \mid a \in U\}$. Слід зауважити, що $d(a)$ є визначеним, оскільки має місце припущення 3;
- $B(a) = \{b \mid (a, b) \in r\}$, тобто $B(a)$ є множиною прямих наступників a ;
- $H(a) = \{b \in B(a) \mid \forall c \in B(a) \ d(b) \leq d(c)\}$.

Позначимо:

$$D = \text{Fld}(r) \setminus \text{Fld}(s).$$

Доведемо, що $H(a) \neq \emptyset$ для кожного $a \in D$. Якщо $a \in D$, то за припущенням 3, існує $b \in \text{Fld}(s)$, такий, що $(a, b) \in r^*$, тому $b \notin D$, звідки $b \neq a$ і $(a, b) \in r^+$, тому існує b' , такий, що $(a, b') \in r$, тому $B(a) \neq \emptyset$, з чого випливає, що $H(a) \neq \emptyset$. Таким чином, $H(a) \neq \emptyset$ для кожного $a \in D$.

Слід зауважити, що оскільки $r \subseteq U \times U$, для кожного $a \in D$, $H(a)$ є непорожньою підмножиною U . Тоді, як наслідок аксіоми вибору, існує функція вибору $h : D \rightarrow U$, така, що $h(a) \in H(a)$ для кожного $a \in D$. Зафіксуємо таку функцію вибору h і позначимо:

$$g_1 = \{(a, h(a)) \mid a \in D\}.$$

Введемо індексовану сім'ю $(\rightarrow'_i)_{i \in I}$ бінарних відношень $\rightarrow'_i$ на U , де $I = \{i \mid i < \gamma\}$

(як було визначено вище) і для кожного $i \in I$,

$$\rightarrow'_i = \begin{cases} \rightarrow_i \cup g_1, & \text{якщо } i = 0, \\ \rightarrow_i, & \text{якщо } i \in I \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Слід зауважити $0 \in I$, оскільки γ є ненульовим ординалом.

Для будь-яких $\alpha, \beta < \gamma$ нехай $\rightarrow'_{<\alpha}$ позначає $\bigcup_{j<\alpha}(\rightarrow'_j)$ і $\rightarrow'_{<\alpha \vee <\beta}$ позначає $\bigcup_{j<\alpha \vee j<\beta}(\rightarrow'_j)$. Позначимо:

$$r_1 = \bigcup_{i \in I} (\rightarrow'_i).$$

Слід зауважити, що хоча $\rightarrow'_0 = \rightarrow_0 \cup g_1$, кроки редукції, що належать $\rightarrow_0$ і g_1 відповідно, не можуть починатися в одному елементі: якщо $a \rightarrow_0 b$ і $(c, d) \in g_1$, то $(a, b) \in s$ і $c \in D$, тому $a \in \text{Fld}(s)$ і $c \notin \text{Fld}(s)$, тому $a \neq c$. Використовуючи цей факт і той факт, що g_1 є функціональним відношенням, маємо, що для кожних $\alpha, \beta < \gamma$ і $a, b, c \in U$, якщо $a \rightarrow'_\alpha b$ і $a \rightarrow'_\beta c$, то існують елементи $b', b'', c', c'', d \in U$, такі, що

$$\begin{aligned} (b, b') &\in (\rightarrow'_{<\alpha})^* \wedge (b', b'') \in (\rightarrow'_\beta)^\circ \wedge (b'', d) \in (\rightarrow'_{<\alpha \vee <\beta})^* \\ (c, c') &\in (\rightarrow'_{<\beta})^* \wedge (c', c'') \in (\rightarrow'_\alpha)^\circ \wedge (c'', d) \in (\rightarrow'_{<\alpha \vee <\beta})^*. \end{aligned}$$

Тоді (U, r_1) є АПС у класі DCR_γ .

Слід зауважити, що $(a, b) \in r$ для кожних $a \in D$ і $b \in H(a)$, тому $(a, h(a)) \in r$ для кожного $a \in D$, звідки $g_1 \subseteq r$. Крім того, $\bigcup_{i \in I} (\rightarrow_i) = s \subseteq r$, тому $r_1 = \bigcup_{i \in I} (\rightarrow'_i) \subseteq r$. Слід зауважити, що $\text{Fld}(r) \setminus \text{Fld}(s) = D \subseteq \text{Fld}(g_1) \subseteq \text{Fld}(r_1)$ і $s = \bigcup_{i \in I} (\rightarrow_i) \subseteq r_1$, тому $\text{Fld}(s) \subseteq \text{Fld}(r_1)$. Тоді $\text{Fld}(r_1) \subseteq \text{Fld}(r)$. Також, $\text{Fld}(r) \subseteq \text{Fld}(r_1)$, оскільки $r_1 \subseteq r$, тому $\text{Fld}(r_1) = \text{Fld}(r)$.

Доведемо, що $\forall a \in \text{Fld}(r_1) \exists b \in \text{Fld}(s) (a, b) \in r_1^*$ (де символ $*$ використовується для позначення рефлексивно-транзитивного замикання відношення саме на множині U). Використовуючи визначення функції H , маємо, що для кожного невід'ємного цілого числа k , для кожного $a \in D$, якщо $d(a) = k + 1$, то $h^{(k)}(a) \in D$, $d(h^{(k)}(a)) = 1$ і $(a, h^{(k)}(a)) \in g_1^*$, де $h^{(k)}(a) = h(h(\dots(a)\dots))$, де h застосовано k разів, і припускається, що $h^{(0)}(a) = a$. Слід зауважити, що для кожного $a \in D$ виконується $d(a) > 0$, оскільки $a \notin \text{Fld}(s)$. Тоді для кожного $a \in D$ існує елемент $a' \in D$ (наприклад, $h^{(k)}(a)$), такий, що $d(a') = 1$ і $(a, a') \in g_1^*$.

Нехай $a \in \text{Fld}(r_1)$. Якщо $a \in \text{Fld}(s)$, то для $b = a$ маємо $b \in \text{Fld}(s)$ і $(a, b) \in$

r_1^* . Тому розглянемо випадок, коли $a \in \text{Fld}(r_1) \setminus \text{Fld}(s)$. Тоді $a \in \text{Fld}(r) \setminus \text{Fld}(s) = D$. Тоді, як було показано вище, для a існує елемент $a' \in D$, такий, що $d(a') = 1$ і $(a, a') \in g_1^*$. Тоді $(a', h(a')) \in r_1$ і $h(a') \in H(a')$. Крім того, оскільки $d(a') = 1$, то існує елемент $b \in \text{Fld}(s)$, такий, що $(a', b) \in r$. Тоді $b \in B(a')$ і $d(b) = 0$. Слід зауважити, що $h(a') \in H(a')$, тому $\forall c \in B(a') \ d(h(a')) \leq d(c)$, зокрема, $d(h(a')) \leq d(b) = 0$, звідки $d(h(a')) = 0$. Тоді $h(a') \in \text{Fld}(s)$ і $(a, a') \in g_1^* \subseteq r_1^*$.

Отже, має місце така властивість:

$$\forall a \in \text{Fld}(r_1) \ \exists b \in \text{Fld}(s) \ (a, b) \in r_1^*.$$

Тепер доведемо, що

$$\forall a, b \in \text{Fld}(r_1) \ \exists c \in \text{Fld}(r_1) \ (a, c) \in r_1^* \wedge (b, c) \in r_1^*.$$

Як було показано вище, $\forall a \in \text{Fld}(r_1) \ \exists b \in \text{Fld}(s) \ (a, b) \in r_1^*$. Нехай $a, b \in \text{Fld}(r_1)$. Тоді існують елементи $a', b' \in \text{Fld}(s)$, такі, що $(a, a') \in r_1^*$ і $(b, b') \in r_1^*$. Тоді згідно припущення 1, застосованого до a', b' , існує елемент $c \in \text{Fld}(s)$, такий, що $(a', c) \in s^* \wedge (b', c) \in s^*$. Оскільки $s \subseteq r_1$, то маємо

$$(a, c) \in r_1^* \wedge (b, c) \in r_1^*,$$

використовуючи транзитивність r_1^* . Також, $c \in \text{Fld}(r_1)$. Тоді

$$\forall a, b \in \text{Fld}(r_1) \ \exists c \in \text{Fld}(r_1) \ (a, c) \in r_1^* \wedge (b, c) \in r_1^*.$$

Отже, всі припущення леми 1.3.2 виконуються для γ, U, r_1, r , тому можна зробити висновок, що $(U, r) \in \text{АПС}$ у класі $\text{DCR}_{\gamma+1}$ за лемою 1.3.2, застосованою до γ, U, r_1, r . $\square$

Лема 1.3.4. *Нехай γ є ненульовим ординалом, U є множиною, $A \subseteq U$, s, r є такими відношеннями, що $s \subseteq r \subseteq A \times A$. Нехай $B = \text{Fld}(s)$. Припустимо, що (B, s) є слабо зв'язною АПС, B є кофінальною підмножиною у передвпорядкованій множині (A, r^*) і (U, s) є АПС у класі DCR_γ . Тоді (U, r) є АПС у класі $\text{DCR}_{\gamma+1}$.*

Доведення. Доведемо, що припущення 1, 2 леми 1.3.3 виконуються для U, s, r .

Спочатку доведемо, що $\forall a, b \in \text{Fld}(s) \ \exists c \in \text{Fld}(s) \ (a, c) \in s^* \wedge (b, c) \in s^*$.

Нехай $a, b \in \text{Fld}(s)$. Тоді $a, b \in B$, тому $(a, b) \in (s \cup s^{-1})^*$, оскільки (B, s) є слабо зв'язною АПС. Крім того, оскільки $(U, s) \in \text{АПС}$ у класі DCR_γ , (U, s) має властивість Черча-Россера, тому існує $c \in U$, такий, що $(a, c) \in s^* \wedge (b, c) \in s^*$. Тоді оскільки $a \in \text{Fld}(s)$, маємо $c \in \text{Fld}(s)$. Отже,

$$\forall a, b \in \text{Fld}(s) \exists c \in \text{Fld}(s) (a, c) \in s^* \wedge (b, c) \in s^*.$$

Тоді маємо

$$\forall a \in \text{Fld}(r) \exists b \in \text{Fld}(s) (a, b) \in r^*,$$

оскільки $B = \text{Fld}(s)$ і B є кофінальною підмножиною у передвпорядкованій множині (A, r^*) .

Оскільки $(U, s) \in \text{АПС}$ у класі DCR_γ , можемо зробити висновок, що $(U, r) \in \text{АПС}$ у класі $\text{DCR}_{\gamma+1}$ за лемою 1.3.3, застосованою до γ, U, s, r . $\square$

Лема 1.3.5. *Нехай γ є ненульовим ординалом, U є множиною, $r, r' \subseteq U \times U$, $A \subseteq U$. Припустимо, що $(U, r) \in \text{АПС}$ у класі DCR_γ і $r' = r \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$.*

Тоді $(U, r') \in \text{АПС}$ у класі DCR_γ .

Доведення. Оскільки $(U, r) \in \text{АПС}$ у класі DCR_γ , то існує індексована сім'я $(\rightarrow_i)_{i \in I}$ відношень $\rightarrow_i \subseteq U \times U$, де $I = \{i \mid i < \gamma\}$, таких, що $r = \bigcup_{i \in I} (\rightarrow_i)$ і для кожних $\alpha, \beta < \gamma$ і $a, b, c \in U$, якщо $a \rightarrow_\alpha b$ і $a \rightarrow_\beta c$, то існують елементи $b', b'', c', c'', d \in U$, такі, що

$$\begin{aligned} (b, b') &\in (\rightarrow_{<\alpha})^* \wedge (b', b'') \in (\rightarrow_\beta)^\circ \wedge (b'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^*, \\ (c, c') &\in (\rightarrow_{<\beta})^* \wedge (c', c'') \in (\rightarrow_\alpha)^\circ \wedge (c'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^*, \end{aligned}$$

де $\rightarrow_{<\alpha}$ позначає $\bigcup_{i < \alpha} (\rightarrow_i)$ і $\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta}$ позначає $\bigcup_{i < \alpha \vee i < \beta} (\rightarrow_i)$.

Введемо індексовану сім'ю $(\rightarrow'_i)_{i \in I}$ бінарних відношень $\rightarrow'_i$ на U , індексовану тією ж множиною $I = \{i \mid i < \gamma\}$, що $(\rightarrow_i)_{i \in I}$, де $\rightarrow'_i = \rightarrow_i \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$ для кожного $i \in I$. Тоді оскільки γ є ненульовим ординалом, маємо

$$r' = r \cup \{(a, a) \mid a \in A\} = \bigcup_{i \in I} \rightarrow'_i.$$

Нехай $\alpha, \beta < \gamma$ і $a, b, c \in U$ є такими елементами, що $a \rightarrow'_\alpha b$ і $a \rightarrow'_\beta c$. Нехай $\rightarrow'_{<\alpha}$ позначає $\bigcup_{i < \alpha} (\rightarrow'_i)$ і $\rightarrow'_{<\alpha \vee <\beta}$ позначає $\bigcup_{i < \alpha \vee i < \beta} (\rightarrow'_i)$. Тоді існують елементи

$b', b'', c', c'', d \in U$, такі, що

$$(b, b') \in (\rightarrow'_{<\alpha})^* \wedge (b', b'') \in (\rightarrow'_{\beta})^= \wedge (b'', d) \in (\rightarrow'_{<\alpha \vee <\beta})^*, \quad (1.4)$$

$$(c, c') \in (\rightarrow'_{<\beta})^* \wedge (c', c'') \in (\rightarrow'_{\alpha})^= \wedge (c'', d) \in (\rightarrow'_{<\alpha \vee <\beta})^*. \quad (1.5)$$

Оскільки $a \rightarrow'_{\alpha} b$ і $a \rightarrow'_{\beta} c$, розглянемо такі випадки.

Випадок 1: $a = b = c$. Тоді умови (1.4), (1.5) виконуються для $b' = b'' = c' = c'' = d = a$.

Випадок 2: $a = b$ і $a \rightarrow_{\beta} c$. Тоді умови (1.4), (1.5) виконуються для $b' = b$ і $c' = b'' = c'' = d = c$.

Випадок 3: $a \rightarrow_{\alpha} b$ і $a = c$. Тоді умови (1.4), (1.5) виконуються для $c' = c$ і $b' = b'' = c'' = d = b$.

Випадок 4: $a \rightarrow_{\alpha} b$ і $a \rightarrow_{\beta} c$. Тоді існують такі елементи $b', b'', c', c'', d \in U$, що

$$(b, b') \in (\rightarrow_{<\alpha})^* \wedge (b', b'') \in (\rightarrow_{\beta})^= \wedge (b'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^*,$$

$$(c, c') \in (\rightarrow_{<\beta})^* \wedge (c', c'') \in (\rightarrow_{\alpha})^= \wedge (c'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^*.$$

Тоді умови (1.4), (1.5) виконуються.

Отже, (U, r') є АПС у класі DCR_{γ} за визначенням DCR_{γ} . □

Лема 1.3.6. Нехай γ є ординалом, U є множиною, $r, r' \subseteq U \times U$. Припустимо, що $(U, r) \in \text{АПС}$ у класі DCR_{γ} і $r' = r \setminus \{(a, a) \mid a \in U\}$.

Тоді $(U, r') \in \text{АПС}$ у класі DCR_{γ} .

Доведення. Оскільки (U, r) належить класу DCR_{γ} , то існує індексована сім'я $(\rightarrow_i)_{i \in I}$ відношень $\rightarrow_i \subseteq U \times U$, де $I = \{i \mid i < \gamma\}$, таких, що $r = \bigcup_{i \in I} (\rightarrow_i)$ і для кожних $\alpha, \beta < \gamma$ і $a, b, c \in U$, якщо $a \rightarrow_{\alpha} b$ і $a \rightarrow_{\beta} c$, то існують елементи $b', b'', c', c'', d \in U$, такі, що

$$(b, b') \in (\rightarrow_{<\alpha})^* \wedge (b', b'') \in (\rightarrow_{\beta})^= \wedge (b'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^*,$$

$$(c, c') \in (\rightarrow_{<\beta})^* \wedge (c', c'') \in (\rightarrow_{\alpha})^= \wedge (c'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^*,$$

де $\rightarrow_{<\alpha}$ позначає $\bigcup_{i < \alpha} (\rightarrow_i)$ і $\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta}$ позначає $\bigcup_{i < \alpha \vee i < \beta} (\rightarrow_i)$.

Введемо індексовану сім'ю $(\rightarrow'_i)_{i \in I}$ бінарних відношень $\rightarrow'_i$ на U , індексовану тією ж множиною $I = \{i \mid i < \gamma\}$, що $(\rightarrow_i)_{i \in I}$, де для кожного $i \in I$ визначено

$\rightarrow'_i = \rightarrow_i \setminus \{(a, a) \mid a \in U\}$. Тоді, незалежно від того, чи $I = \emptyset$, маємо

$$r' = r \setminus \{(a, a) \mid a \in U\} = \bigcup_{i \in I} \rightarrow'_i.$$

Нехай $\alpha, \beta < \gamma$ і $a, b, c \in U$ є такими елементами, що $a \rightarrow'_\alpha b$ і $a \rightarrow'_\beta c$. Тоді $a \rightarrow_\alpha b$ і $a \rightarrow_\beta c$, тому існують елементи $b', b'', c', c'', d \in U$, такі, що

$$\begin{aligned} (b, b') &\in (\rightarrow_{<\alpha})^* \wedge (b', b'') \in (\rightarrow_\beta)^\circ \wedge (b'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^*, \\ (c, c') &\in (\rightarrow_{<\beta})^* \wedge (c', c'') \in (\rightarrow_\alpha)^\circ \wedge (c'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^*. \end{aligned}$$

Нехай $\rightarrow'_{<\alpha}$ позначає $\bigcup_{i < \alpha} (\rightarrow'_i)$ і $\rightarrow'_{<\alpha \vee <\beta}$ позначає $\bigcup_{i < \alpha \vee i < \beta} (\rightarrow'_i)$. Тоді маємо, що

$$\begin{aligned} (b, b') &\in (\rightarrow'_{<\alpha})^* \wedge (b', b'') \in (\rightarrow'_\beta)^\circ \wedge (b'', d) \in (\rightarrow'_{<\alpha \vee <\beta})^*, \\ (c, c') &\in (\rightarrow'_{<\beta})^* \wedge (c', c'') \in (\rightarrow'_\alpha)^\circ \wedge (c'', d) \in (\rightarrow'_{<\alpha \vee <\beta})^*. \end{aligned}$$

Отже, (U, r') є АПС у класі DCR_γ за визначенням DCR_γ . □

Лема 1.3.7. Нехай γ є ненульовим ординалом, U є множиною, $r, r' \subseteq U \times U$. Припустимо, що (U, r) є АПС у класі DCR_γ і

$$\{(a, b) \in r' \mid a \neq b\} = \{(a, b) \in r \mid a \neq b\}.$$

Тоді (U, r') є АПС у класі DCR_γ .

Доведення. Нехай $r'' = r' \setminus \{(a, a) \mid a \in U\}$. Тоді

$$r'' = \{(a, b) \in r' \mid a \neq b\} = \{(a, b) \in r \mid a \neq b\} = r \setminus \{(a, a) \mid a \in U\} \subseteq U \times U.$$

Тоді (U, r'') є АПС у класі DCR_γ за лемою 1.3.6, оскільки (U, r) є АПС у класі DCR_γ . Нехай $A = \{a \mid (a, a) \in r'\}$. Тоді $r'', r' \subseteq U \times U$, $A \subseteq U$, (U, r'') є АПС у класі DCR_γ , і

$$r' = r'' \cup \{(a, a) \mid a \in A\},$$

тому (U, r') є АПС у класі DCR_γ за лемою 1.3.5, застосованою до γ, U, r'', r', A . □

Лема 1.3.8. Нехай γ є ординалом і $(A, r), (B, r)$ є АПС (зі спільним відношенням редукції r). Тоді (A, r) належить класу DCR_γ тоді і тільки тоді, коли (B, r) належить класу DCR_γ .

Доведення. Оскільки $(A, r), (B, r) \in \text{АПС}$, маємо $r \subseteq A \times A$ і $r \subseteq B \times B$, звідки:

- $\text{Fld}(r) \subseteq A, \text{Fld}(r) \subseteq B, r \subseteq \text{Fld}(r) \times \text{Fld}(r)$;
- якщо $(a, b) \in r^*$, то або $a, b \in \text{Fld}(r)$, або $a = b$.

Враховуючи ці властивості та визначення класу DCR_γ , маємо, що виконуються такі імплікації:

- якщо (A, r) або (B, r) належить класу DCR_γ , то $(\text{Fld}(r), r) \in \text{АПС}$ у DCR_γ ;
- якщо $(\text{Fld}(r), r) \in \text{АПС}$ у класі DCR_γ , то (A, r) і (B, r) належать DCR_γ .

Таким чином, (A, r) належить класу DCR_γ тоді і тільки тоді, коли (B, r) належить класу DCR_γ . $\square$

Тепер надамо доведення теореми 1.3.1.

Доведення теореми 1.3.1.

Припустимо, що $(A, \rightarrow), (B, \rightarrow') \in \text{АПС}$, $(B, \rightarrow')$ є слабко зв'язним підграфом $(A, \rightarrow)$, таким, що B є кофінальною підмножиною у передвпорядкованій множині $(A, \rightarrow^*)$. Зафіксуємо ненульовий ординал γ і припустимо, що $(B, \rightarrow')$ належить класу DCR_γ . Доведемо, що $(A, \rightarrow)$ належить класу $DCR_{\gamma+1}$. Нехай

$$\begin{aligned} r' &= \rightarrow \cup \{(b, b) \mid b \in B\}, \\ s' &= \rightarrow' \cup \{(b, b) \mid b \in B\}. \end{aligned}$$

Оскільки $(B, \rightarrow')$ належить класу DCR_γ і є підграфом $(A, \rightarrow)$, маємо, що $\rightarrow' \subseteq B \times B \subseteq A \times A$, тому $(A, \rightarrow')$ є АПС і $(A, \rightarrow')$ належить класу DCR_γ за лемою 1.3.8. Слід зауважити, що $s' \subseteq (A \times A) \cup (B \times B) = A \times A$, $B \subseteq A$ і $s' = \rightarrow' \cup \{(b, b) \mid b \in B\}$. Тоді (A, s') належить класу DCR_γ за лемою 1.3.5, застосованою до $\gamma, A, \rightarrow', s', B$. Слід зауважити, що $B \subseteq \text{Fld}(s') \subseteq \text{Fld}(\rightarrow') \cup B \subseteq B$, оскільки $(B, \rightarrow') \in \text{АПС}$. Таким чином, $B = \text{Fld}(s')$. Крім того,

$$\rightarrow' \cup \{(b, b) \mid b \in B\} = s' \subseteq r' = \rightarrow \cup \{(b, b) \mid b \in B\} \subseteq A \times A,$$

оскільки $(A, \rightarrow) \in \text{АПС}$, $\rightarrow' \subseteq \rightarrow$ і $B \subseteq A$. Також,

$$s' = \rightarrow' \cup \{(b, b) \mid b \in B\} \subseteq B \times B,$$

тому $(B, s') \in \text{АПС}$. Крім того, з визначення s' випливає, що (B, s') є слабко зв'язною, оскільки $(B, \rightarrow')$ є слабко зв'язною. Слід зауважити, що B є кофінальною підмножиною у передвпорядкованій множині $(A, (r')^*)$, оскільки B є кофінальною

підмножиною у передвпорядкованій множині $(A, \rightarrow^*)$ і $\rightarrow \subseteq r'$. Таким чином, s', r' є відношеннями, такими, що $s' \subseteq r' \subseteq A \times A$, $B = \text{Fld}(s')$, (B, s') є слабко зв'язною АПС, B є кофінальною підмножиною у передвпорядкованій множині $(A, (r')^*)$ і (A, s') є АПС у класі DCR_γ . Згідно леми 1.3.4, застосованою до γ , $A, A \subseteq A, s', r'$, можемо зробити висновок, що (A, r') є АПС у класі $DCR_{\gamma+1}$.

Слід зауважити, що $r' \subseteq A \times A$ і $\rightarrow \subseteq A \times A$, (A, r') є АПС у класі $DCR_{\gamma+1}$, а з визначення r' випливає, що $\{(a, b) \in r' \mid a \neq b\} = \{(a, b) \in \rightarrow \mid a \neq b\}$. Тоді $(A, \rightarrow)$ належить класу $DCR_{\gamma+1}$ за лемою 1.3.7, застосованою до $\gamma, A, r', \rightarrow$. $\square$

1.3.3. Доведення наслідку 1.3.1

Нехай γ є ненульовим ординалом і $(A, \rightarrow)$ є АПС.

Припустимо, що для кожного елементу $a \in A$ існує АПС $(B, \rightarrow')$, така, що

1. $(B, \rightarrow')$ є слабко зв'язним підграфом $(A, \rightarrow)$;
2. $(B, \rightarrow')$ належить класу DCR_γ ;
3. B є кофінальною підмножиною в $(A_a, \rightarrow_a^*)$, де $A_a = \{b \in A \mid a \rightarrow^* b\}$ і $\rightarrow_a = \rightarrow \cap (A_a \times A_a)$.

Доведемо, що $(A, \rightarrow)$ належить класу $DCR_{\gamma+1}$.

Спочатку доведемо, що АПС $(A, \rightarrow)$ є конфлюентною. Нехай $a, b, c \in A$ і $a \rightarrow^* b \wedge a \rightarrow^* c$. Тоді існує АПС $(B, \rightarrow')$, така, що $(B, \rightarrow')$ є слабко зв'язним підграфом $(A, \rightarrow)$, $(B, \rightarrow')$ належить DCR_γ і B є кофінальною підмножиною в $(A_a, \rightarrow_a^*)$. Тоді АПС $(B, \rightarrow')$ є конфлюентною. Оскільки $a \rightarrow^* b$, то або $a = b$, або існують натуральне число n і елементи $b_0, b_1, \dots, b_n \in A$, такі, що

$$a = b_0 \rightarrow b_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_n = b.$$

В обох випадках маємо $(a, b) \in (\rightarrow_a)^*$ і $b \in A_a$. Аналогічно, $(a, c) \in (\rightarrow_a)^*$ і $c \in A_a$. Тоді, оскільки B є кофінальною підмножиною в $(A_a, \rightarrow_a^*)$, існують елементи $b', c' \in B$, такі, що $b \rightarrow_a^* b'$ і $c \rightarrow_a^* c'$. Оскільки АПС $(B, \rightarrow')$ є слабко зв'язною, то $(b', c') \in (\rightarrow' \cup (\rightarrow')^{-1})^*$. Тоді, оскільки АПС $(B, \rightarrow')$ є конфлюентною, за властивістю Черча-Россера існує елемент $d \in B \subseteq A$, такий, що $(b', d) \in (\rightarrow')^*$ і $(c', d) \in (\rightarrow')^*$. Тоді $b \rightarrow_a^* b' \rightarrow^* d$ і $c \rightarrow_a^* c' \rightarrow^* d$, звідки $b \rightarrow^* d$ і $c \rightarrow^* d$. Отже, АПС $(A, \rightarrow)$ є конфлюентною.

Нехай $\leftrightarrow = \rightarrow \cup \rightarrow^{-1}$ і нехай $\leftrightarrow^*$ позначає рефлексивно-транзитивне

замикання $\leftrightarrow$ на множині A . Для кожного $a \in A$ позначимо

$$[a] = \{b \in A \mid a \leftrightarrow^* b\},$$

$$\rightarrow_{[a]} = \rightarrow \cap ([a] \times [a]).$$

Покажемо, що для кожного $a \in A$, АПС $([a], \rightarrow_{[a]})$ належить класу $DCR_{\gamma+1}$. Зафіксуємо $a \in A$. Тоді існує АПС $(B, \rightarrow')$, така, що $(B, \rightarrow')$ є слабко зв'язним підграфом $(A, \rightarrow)$, $(B, \rightarrow')$ належить DCR_{γ} і B є кофінальною підмножиною в $(A_a, \rightarrow_a^*)$. Слід зауважити, що $([a], \rightarrow_{[a]})$ є АПС. Також, $B \subseteq [a]$, оскільки з того, що $x \in B$ випливає, що $x \in A_a$ (оскільки $B \subseteq A_a$). Тоді $x \in A$ і $a \rightarrow^* x$, звідки $x \in [a]$. Тоді

$$\rightarrow' \subseteq B \times B \subseteq [a] \times [a]$$

і $\rightarrow' \subseteq \rightarrow$, оскільки $(B, \rightarrow')$ є підграфом $(A, \rightarrow)$. Тоді

$$\rightarrow' \subseteq \rightarrow \cap ([a] \times [a]) = \rightarrow_{[a]}.$$

Таким чином, $B \subseteq [a]$ і $\rightarrow' \subseteq \rightarrow_{[a]}$.

Отже, $(B, \rightarrow')$ є підграфом $([a], \rightarrow_{[a]})$. Також, $(B, \rightarrow')$ є слабко зв'язною АПС.

Доведемо, що B є кофінальною підмножиною у передвпорядкованій множині $([a], (\rightarrow_{[a]})^*)$. Слід зауважити, що $B \subseteq [a]$. Нехай $x \in [a]$. Тоді $x \in A$ і $a \leftrightarrow^* x$. Як було показано вище, $(A, \rightarrow)$ є конфлюентною АПС. Оскільки $a \leftrightarrow^* x$, за властивістю Черча-Россера існує елемент $y \in A$, такий, що $a \rightarrow^* y$ і $x \rightarrow^* y$. Тоді або $a = y$, або існують натуральне число n і елементи $y_0, y_1, \dots, y_n \in A$, такі, що

$$a = y_0 \rightarrow y_1 \rightarrow \dots \rightarrow y_n = y.$$

В обох випадках маємо $(a, y) \in (\rightarrow_a)^*$ і $y \in A_a$. Оскільки B є кофінальною підмножиною в $(A_a, \rightarrow_a^*)$, існує елемент $y' \in B$, такий, що $y \rightarrow_a^* y'$. Тоді $x \rightarrow^* y \rightarrow_a^* y'$, тому $x \rightarrow^* y'$, а також $a \rightarrow^* y'$ (оскільки $B \subseteq A_a$). Тоді або $x = y'$, або існують натуральне число m і елементи $y'_0, y'_1, \dots, y'_m \in A$, такі, що

$$x = y'_0 \rightarrow y'_1 \rightarrow \dots \rightarrow y'_m = y',$$

і, крім того, $y'_0, y'_1, \dots, y'_m \in [a]$. Тоді $(x, y') \in (\rightarrow_{[a]})^*$ і $y' \in B$.

Отже, B є кофінальною підмножиною в $([a], (\rightarrow_{[a]})^*)$. Тоді оскільки $(B, \rightarrow')$

належить класу DCR_γ , АПС $([a], \rightarrow_{[a]})$ належить класу $DCR_{\gamma+1}$ за теоремою 1.3.1, застосованою до АПС $([a], \rightarrow_{[a]})$ і $(B, \rightarrow')$.

Тоді можна зробити висновок, що для кожного елементу $a \in A$, АПС $([a], \rightarrow_{[a]})$ належить класу $DCR_{\gamma+1}$.

Слід зауважити, що

$$A = \bigcup_{a \in A} [a], \quad \rightarrow = \bigcup_{a \in A} \rightarrow_{[a]}$$

і для кожних елементів $a, b \in A$, якщо виконується $\text{Fld}(\rightarrow_{[a]}) \cap \text{Fld}(\rightarrow_{[b]}) \neq \emptyset$, то $[a] = [b]$. Крім того, для кожного елементу $a \in A$, АПС $([a], \rightarrow_{[a]})$ належить класу $DCR_{\gamma+1}$. Враховуючи визначення класу $DCR_{\gamma+1}$, з цих умов випливає, що АПС $(A, \rightarrow)$ належить класу $DCR_{\gamma+1}$. $\square$

1.3.4. Формалізація в системі інтерактивного доведення теорем

Варіант теореми 1.3.1 для скінченних рівнів DCR ієрархії був формалізований за допомогою системи Isabelle/HOL у [86]. Дана формалізація описана в цьому пункті. Нижче, для додатного цілого числа n і бінарного відношення r на множині $U \neq \emptyset$, позначення $DCR\ n\ r$, визначене у [86], означає, що АПС (U, r) належить класу DCR_n . Формальне визначення предиката DCR і кількох допоміжних понять, від яких він залежить, має такий вигляд:

definition $\mathcal{L}1 :: "(nat \Rightarrow 'U\ rel) \Rightarrow nat \Rightarrow 'U\ rel"$

where

$$"\mathcal{L}1\ g\ \alpha \equiv \bigcup \{A. \exists\ \alpha'. (\alpha' < \alpha) \wedge A = g\ \alpha'\}"$$

definition $\mathcal{L}v :: "(nat \Rightarrow 'U\ rel) \Rightarrow nat \Rightarrow nat \Rightarrow 'U\ rel"$

where

$$"\mathcal{L}v\ g\ \alpha\ \beta \equiv \bigcup \{A. \exists\ \alpha'. (\alpha' < \alpha \vee \alpha' < \beta) \wedge A = g\ \alpha'\}"$$

definition $\mathcal{D} :: "(nat \Rightarrow 'U\ rel) \Rightarrow nat \Rightarrow nat \Rightarrow ('U \times 'U \times 'U \times 'U)\ set"$

where

$$"\mathcal{D}\ g\ \alpha\ \beta = \{(b, b', b'', d). (b, b') \in (\mathcal{L}1\ g\ \alpha)^{\sim*} \wedge (b', b'') \in (g\ \beta)^{\sim*} \wedge (b'', d) \in (\mathcal{L}v\ g\ \alpha\ \beta)^{\sim*}\}"$$

definition $DCR_generating :: "(nat \Rightarrow 'U\ rel) \Rightarrow bool"$

where

$$\begin{aligned} \text{"DCR_generating } g \equiv & (\forall \alpha \beta a b c. (a, b) \in (g \alpha) \wedge \\ & (a, c) \in (g \beta) \longrightarrow (\exists b' b'' c' c'' d. \\ & (b, b', b'', d) \in (\mathfrak{D} g \alpha \beta) \wedge (c, c', c'', d) \in (\mathfrak{D} g \beta \alpha))) \end{aligned}$$

definition $DCR :: \text{"nat} \Rightarrow 'U \text{ rel} \Rightarrow \text{bool}"$

where

$$\begin{aligned} \text{"DCR } n \ r \equiv & (\exists g :: (\text{nat} \Rightarrow 'U \text{ rel}). \text{DCR_generating } g \wedge \\ & r = \bigcup \{ r'. \exists \alpha'. \alpha' < n \wedge r' = g \alpha' \}) \end{aligned}$$

Формалізована версія теореми 1.3.1 з [86], обмежена на $\gamma < \omega$ має такий вигляд:

theorem thm_1 :

fixes $r \ s :: \text{"}'U \text{ rel}"$ **and** $n :: \text{nat}$ — r, s are binary relations, n is a positive integer

assumes $a0$: $"n \neq 0"$

and $a1$: $"r \subseteq A \times A"$ — (A, r) is an ARS

and $a2$: $"s \subseteq B \times B"$ — (B, s) is an ARS

and $a3$: $"B \subseteq A"$ **and** $a4$: $"s \subseteq r"$ — (B, s) is a (not necessarily induced) subgraph of (A, r)

and $a5$: $"\forall b1 \in B. \forall b2 \in B. (b1, b2) \in (s \cup s^{-1})^*" — (B, s) is weakly connected$

and $a6$: $"\forall a \in A. \exists b \in B. (a, b) \in r^*" — B is a cofinal set in the preordered set $(A, r^*)$$

and $a7$: $"DCR \ n \ s"$ — (B, s) is in the class DCR_n

shows $"DCR \ (n+1) \ r"$ — Then (A, r) is in the class $DCR_{(n+1)}$

1.4. Висновки до розділу 1

У підрозділі 1.1 було отримано перший основний результат дисертаційного дослідження: доведено повноту методу спадних діаграм ван Оострома-де Брейна для доведення конфлюентності абстрактних переписувальних систем мінімальної незліченної потужності. Більш детально, було показано (теорема 1.1.1), що кожна конфлюентна АПС $(A, \rightarrow)$, така, що потужність її відношення редукції $\rightarrow$ не перевищує перший незліченний кардинал належить класу DCR_3 , тобто конфлюентність $(A, \rightarrow)$ може бути доведена методом спадних діаграм з мітками 0, 1, 2,

упорядкованими таким чином, що $0 < 1 < 2$. За припущення континуум-гіпотези [191] (що є незалежною від ZFC за припущення про несуперечливість ZFC [191]), з цього результату випливає, що, теоретично, метод спадних діаграм є достатнім для доведення конфлюентності АПС на широкому колі структур, що використовуються в інформатиці та прикладній математиці. Даний результат було формалізовано та автоматично перевірено за допомогою відомої системи інтерактивного доведення теорем Isabelle [57]. Повний текст формального доказу доступний за посиланнями [78] та [81]. Інструкції щодо повторної перевірки формального доказу у програмному забезпеченні Isabelle наведені в додатку Б.

У підрозділі 1.2 було отримано другий основний результат дисертаційного дослідження – розв’язки проблем неповноти методу спадних діаграм з двома мітками та відсутності колапсу на рівні 2 ієрархії систем, що мають спадну властивість Черча-Россера (дані проблеми були сформульовані J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek у 2018 році як відкриті проблеми [31, Open Problem 32, 33]). Більш детально, було отримано теореми 1.2.1 та 1.2.2, з яких безпосередньо випливає, що метод спадних діаграм з двома мітками є неповним і ієрархія DCR (систем, що мають спадну властивість Черча-Россера) не має колапсу на рівні 2. Дані результати було формалізовано та автоматично перевірено за допомогою системи Isabelle. Повний текст формальних доказів доступний за посиланням [79].

У підрозділі 1.3 було отримано теорему про зв’язний кофінальний підграф (теорема 1.3.1), що може бути використана для пояснення зв’язку властивості кофінальності [107, 31] з рівнем 2 в DCR ієрархії. Варіант теореми 1.3.1 для скінченних рівнів DCR ієрархії було формалізовано за допомогою системи Isabelle. Текст формального доказу доступний за посиланням [86].

З практичної точки зору, критерії конфлюентності АПС можуть бути використані при розробці програмних інструментів, що дозволяють користувачам переконатися, що результат заданої недетермінованої програми не залежить від шляху її виконання. Недетермінізм програм часто пов’язаний з конкурентним виконанням, тому такі інструменти можуть бути корисними при тестуванні або формальній верифікації багатопотокового та розподіленого програмного забезпечення. Подібні причини недетермінізму існують і для моделей кіберфізичних систем (КФС), однак, для таких моделей інші джерела недетермінізму також можуть мати значну роль [119]. У зв’язку з цим, критерії конфлюентності, застосовні до АПС, породжених дискретними і недискретними моделями обчислень є важливими.

АПС також можуть використовуватись як допоміжні моделі для аналізу властивостей конкретних динамічних моделей різних систем і процесів, припускаючи, що відношення редукції АПС або його транзитивне замикання подає відношення досяжності на станах динамічної моделі.

РОЗДІЛ 2. КОНФЛЮЕНТНІСТЬ СТРОГО ІНДУКТИВНИХ АПС

2.1. Узагальнення леми Ньюмана для ациклічних строго індуктивних систем зі зліченною множиною нормальних форм

2.1.1. Попередні зауваження

Лема Ньюмана [145, 56, 108, 5, 133] часто пов'язується з аналізом дискретних структур та принципом фундової індукції, або, дуально, принципом нетерової індукції [56]. Однак, нетерова індукція має узагальнення до принципу відкритої індукції Рауля [174], що може розглядатись як приклад поєднання принципів доведення, важливих для аналізу дискретних і неперервних структур. Більш детально, як принцип нетерової індукції для доведення властивостей елементів нетерової частково впорядкованої множини, так і варіант принципу дійсної індукції [20] для доведення властивостей дійсних чисел у обмеженому замкненому проміжку можуть розглядатись як застосування принципу відкритої індукції. Крім того, відомо [166], що принцип дійсної індукції є актуальним для аналізу динамічних систем з неперервним часом, визначених за допомогою звичайних диференціальних рівнянь. Враховуючи вищезазначені зауваження, природно розглянути питання, чи лема Ньюмана може бути узагальнена таким чином, щоб отримане узагальнення могло бути застосованим до широкого кола дискретних, неперервних і дискретно-неперервних динамічних моделей. Слід зауважити, що дискретно-неперервні (гібридні) моделі [43] є важливими для інформатики у зв'язку з розвитком таких напрямків, як кіберфізичні системи [6] та Інтернет речей. Хоча у рамках математичної теорії систем, теорії керування, інформатики було досліджено багато моделей таких систем і їх властивостей, пошук методів поєднання методів і результатів різних галузей лишається актуальним [6, 119], а принцип відкритої індукції [174] може розглядатись як одна з основ для такого поєднання.

Відповідно до леми Ньюмана [145, 56], будь-яка термінальна локально конфлюентна АПС є конфлюентною. Будь-яка термінальна АПС є ациклічною, однак, в загальному випадку, ациклічна локально конфлюентна АПС не обов'язково є конфлюентною [56]. Відомий контрприклад Ньюмана [56, рисунок 6a] часто використовується для ілюстрації останнього факту. Інший відомий контрприклад Хіндлі [56, рисунок 6b] показує, що скінченна локально конфлюентна АПС, яка не є аци-

клічною, може не бути конфлюентною. Контрприклад Ньюмана [56, рисунок 6а] може бути переформульований як АПС $(X_{NC}, \rightarrow_{NC})$, де

$$X_{NC} = \{a, b, 0, 1, 2, \dots\}, \quad a = -1, \quad b = -2,$$

а відношення $\rightarrow_{NC}$ визначене таким чином:

$$\begin{aligned} \rightarrow_{NC} = \{(2n, a) \mid n = 0, 1, 2, \dots\} \cup \{(2n + 1, b) \mid n = 0, 1, 2, \dots\} \cup \\ \cup \{(n, n + 1) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

АПС $(X_{NC}, \rightarrow_{NC})$ є зліченною, ациклічною, індуктивною, локально конфлюентною, але не є конфлюентною [56]. Причина нееквівалентності умов локальної конфлюентності і конфлюентності для $(X_{NC}, \rightarrow_{NC})$ може бути пояснена таким чином: з умови конфлюентності випливає, що множина верхніх меж будь-якої непорожньої підмножини X_{NC} є спрямованою у передвпорядкованій (частково впорядкованій) множині $(X_{NC}, (\rightarrow_{NC})^*)$, однак, умова локальної конфлюентності не є достатньо сильною, щоб гарантувати це для верхніх меж нескінченного ланцюга $\{0, 1, 2, \dots\}$ в $(X_{NC}, (\rightarrow_{NC})^*)$. Слід зауважити, що у передвпорядкованій множині $(X_{NC}, (\rightarrow_{NC})^*)$ ланцюг $\{1, 2, 3, \dots\}$ має мінімальні верхні межі (a і b), але не має точної верхньої межі. При цьому, з умови локальної конфлюентності не випливає існування елементу x , такого, що $\{(a, x), (b, x)\} \subseteq (\rightarrow_{NC})^*$.

Якби ланцюг $\{1, 2, 3, \dots\}$ мав точну верхню межу (або не мав верхніх меж), вищезазначене пояснення нееквівалентності умов локальної конфлюентності і конфлюентності не могло би бути застосоване. Наприклад, розглянемо АПС

$$(X_{NC}, \rightarrow_{NC} \cup \{(a, b)\}). \quad (2.1)$$

На відміну від контрприкладу Ньюмана, (2.1) є строго індуктивною [134] АПС, тобто всі непорожні ланцюги в сенсі передпорядку, породженого рефлексивно-транзитивним замиканням відношення редукції, мають точні верхні межі. При цьому, для АПС (2.1) умови конфлюентності і локальної конфлюентності є еквівалентними, хоча дана АПС *не* є термінальною (не задовольняє припущенню звичайної леми Ньюмана).

У цьому підрозділі буде показано, що будь-яка ациклічна строго індуктивна АПС з не більш ніж зліченною множиною незвідних елементів є конфлюентною

тоді і тільки тоді, коли вона є локально конфлюентною. Також, буде показано, що припущення про зліченність та ациклічність є важливими і не можуть бути вилучені з даного твердження. Крім того, з контрприкладу Ньюмана [145, 56] випливає, що умова строгої індуктивності не може бути замінена на умову індуктивності в даному твердженні, оскільки АПС $(X_{NC}, \rightarrow_{NC})$ є ациклічною і індуктивною, має скінченну множину незвідних елементів, є локально конфлюентною, але не є конфлюентною [145, 56]. Ці результати доповнюють лему Ньюмана і уточнюють межі застосовності властивості локальної конфлюентності у критеріях конфлюентності.

Також, у підрозділі буде описано формалізацію [84] основних отриманих результатів в системі інтерактивного доведення теорем Isabelle [57]. Подальші узагальнення леми Ньюмана будуть запропоновані у наступному підрозділі. Наведені у даному підрозділі і у решті розділу результати також описані у [80, 77, 61, 76, 84].

2.1.2. Терміни

Нехай $(X, \leq)$ є передвпорядкованою множиною ($\leq$ є рефлексивним і транзитивним бінарним відношенням на множині X).

Означення 2.1.1 ([175]). Нехай $A \subseteq X$ і $x \in X$. Тоді x є

1. *верхньою межею* A , якщо $\forall a \in A \ a \leq x$;
2. *найменшим елементом* A , якщо $x \in A \wedge \forall a \in A \ x \leq a$;
3. *точною верхньою межею* A (або *супремумом* A), якщо x є найменшим елементом множини всіх верхніх меж A .

Означення 2.1.2 ([134]). Підмножина $A \subseteq X$ буде називатись

1. *ланцюгом* (в $(X, \leq)$), якщо $\forall x, y \in A \ (x \leq y \vee y \leq x)$;
2. *спрямованою множиною*, якщо кожна скінченна підмножина A має верхню межу (або $A \neq \emptyset$ і кожна пара елементів A має верхню межу);
3. *замкненою множиною* (в $(X, \leq)$), якщо для кожного непорожнього ланцюга C в $(X, \leq)$, якщо C має точну верхню межу $x \in X$ і $C \subseteq A$, то $x \in A$.

Означення 2.1.3 ([134]). Передвпорядкована множина $(X, \leq)$ називається *строго індуктивною*, якщо кожний непорожній ланцюг у $(X, \leq)$ має точну верхню межу.

Зауваження 2.1.1. Наприклад, повна частково впорядкована множина [174, 134] є строго індуктивною передвпорядкованою множиною.

Означення 2.1.4. АПС $(X, \rightarrow)$ є

1. *строго індуктивною* (тут термін “строго індуктивна” запозичено з [134]), якщо $(X, \rightarrow^*)$, що розглядається як передвпорядкована множина, є строго індуктивною;
2. *ациклічною* [32], якщо для кожних $x, y \in X$, якщо $x \rightarrow^+ y$, то $x \neq y$.

Зауваження 2.1.2. У [108] *індуктивна АПС* визначається як АПС, у якій для кожної послідовності редукцій $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$ існує $x \in X$, такий, що $x_n \rightarrow^* x$ для всіх n . В загальному випадку, ця умова є слабшою, ніж умова, що $(X, \rightarrow^*)$ є строго індуктивною передвпорядкованою множиною: строго індуктивна АПС є індуктивною у згаданому вище значенні, але обернене твердження може не виконуватись.

Приклад 2.1.1. Нехай $(X, \rightarrow) = ([0, 1], < \cap ([0, 1] \times [0, 1]))$, де $[0, 1]$ є дійсним проміжком, $<$ є звичайним строгим порядком на дійсних числах. Тоді $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною АПС. Крім того, $(X, \rightarrow)$ є ациклічною.

2.1.3. Головні результати підрозділу

Теорема 2.1.1. *Нехай $(X, \rightarrow)$ є ациклічною строго індуктивною АПС, такою, що множина всіх її незвідних елементів є не більш ніж зліченною. Тоді $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною тоді і тільки тоді, коли $(X, \rightarrow)$ є локально конфлюентною.*

Доведення. Слід зауважити, що будь-яка конфлюентна АПС є локально конфлюентною, тому достатньо показати, що якщо $(X, \rightarrow)$ є локально конфлюентною, то $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною.

Припустимо, що АПС $(X, \rightarrow)$ є локально конфлюентною. Оскільки АПС $(X, \rightarrow)$ є ациклічною, то відношення $\rightarrow^*$ на X є антисиметричним: якщо $x \rightarrow^* y$ і $y \rightarrow^* x$, то $x = y$ (в іншому випадку, $x \rightarrow^+ x$, що суперечить умові ациклічності). Тоді $(X, \rightarrow^*)$ є не лише передвпорядкованою множиною, а є частково впорядкованою множиною. Введемо такі позначення:

- IR є множиною всіх незвідних елементів $(X, \rightarrow)$;
- $NF(x)$, де $x \in X$, є множиною всіх нормальних форм x ;
- ND є множиною всіх $x \in X$, таких, що множина $NF(x)$ містить принаймні два різні елементи.

Доведемо, що $(X, \rightarrow)$ є слабо нормалізуючою АПС. Нехай $x \in X$ і $U = \{y \in X \mid x \rightarrow^* y\}$. Оскільки $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною ациклічною АПС, множина U , що розглядається як породжена частково впорядкована підмножина

$(X, \rightarrow^*)$, є непорожньою індуктивною частково впорядкованою множиною [134] (тобто непорожньою частково впорядкованою множиною, де кожний непорожній ланцюг має верхню межу). Тоді за лемою Цорна, U має деякий максимальний елемент y_{max} відносно порядку $\rightarrow^* \cap (U \times U)$. Такий y_{max} є також максимальним у частково впорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$, тому $y_{max} \in IR$ (оскільки $(X, \rightarrow)$ є ациклічною) і $x \rightarrow^* y_{max}$, звідки $y_{max} \in NF(x)$. Оскільки $x \in X$ є довільним елементом, то АПС $(X, \rightarrow)$ є слабо нормалізуючою.

Тепер доведемо, для кожних елементів $x \in ND$ і $b \in IR$ існує елемент $y \in ND$, такий, що $x \rightarrow^* y$ і $b \notin NF(y)$. Позначимо $U = \{y \in X \mid x \rightarrow^* y\}$ і $D = \{y \in U \mid y \rightarrow^* b\}$. Позначимо як $\leq$ відношення $\rightarrow^* \cap (U \times U)$. Тоді $(U, \leq)$ є (непорожньою) породженою частково впорядкованою підмножиною $(X, \rightarrow^*)$. Зафіксуємо елементи $x \in ND$, $b \in IR$ і розглянемо такі два випадки.

Випадок 1: умова $x \rightarrow^* b$ не виконується. Тоді для $y = x$ маємо $y \in ND$, $x \rightarrow^* y$ і $b \notin NF(y)$.

Випадок 2: умова $x \rightarrow^* b$ виконується. Оскільки $x \in ND$, множина $NF(x) \setminus \{b\}$ є непорожньою. Нехай t є деяким елементом $NF(x) \setminus \{b\}$. Тоді маємо $x \rightarrow^* t$, тому $t \in U$. Слід зауважити, що $t \notin D$, оскільки, в іншому випадку, $t \rightarrow^* b$, а також $t \in IR$, звідки $t = b$, що суперечить тому факту, що $t \in NF(x) \setminus \{b\}$. Таким чином, $t \in U \setminus D$. Нехай $E = D \cap \{y \in X \mid y \rightarrow^* t\}$. Тоді E є замкненою підмножиною у частково впорядкованій множині $(U, \leq)$ (у сенсі означення 2.1.2). Крім того, $x \in E$ (оскільки $x \rightarrow^* b$ і $x \rightarrow^* t$), тому $E \neq \emptyset$. Тоді $(E, \leq \cap (E \times E))$ є непорожньою індуктивною частково впорядкованою множиною (кожний непорожній ланцюг має верхню межу), тому за лемою Цорна, E має максимальний елемент x_{max} відносно порядку $\leq \cap (E \times E)$. Тоді $x_{max} \in E$, тому $x_{max} \rightarrow^* b$ і $x_{max} \rightarrow^* t$. Тоді маємо $x_{max} \neq b$ і $x_{max} \neq t$, оскільки, в іншому випадку виконується $b \rightarrow^* t$ або $t \rightarrow^* b$, звідки $b = t$, оскільки $b \in IR$ і $t \in IR$, що суперечить тому факту, що $t \in NF(x) \setminus \{b\}$. Тоді $x_{max} \rightarrow^+ b$ і $x_{max} \rightarrow^+ t$, тому існують елементи $e_1, e_2 \in X$, такі, що $x_{max} \rightarrow e_1 \rightarrow^* b$ і $x_{max} \rightarrow e_2 \rightarrow^* t$. Оскільки $(X, \rightarrow)$ є локально конфлюентною АПС, то існує елемент $d \in X$, такий, що $e_1 \rightarrow^* d$ і $e_2 \rightarrow^* d$.

Доведемо, що $e_2 \in ND$. Припустимо, що $e_2 \notin ND$. Слід зауважити, що $e_2 \rightarrow^* t$ і $t \in IR$, тому $t \in NF(e_2)$. Оскільки $(X, \rightarrow)$ є слабо нормалізуючою АПС (як було показано вище) і $e_2 \notin ND$, то $NF(e_2)$ є одноелементною множиною, тому $NF(e_2) = \{t\}$. Крім того, $e_2 \rightarrow^* d$ і $NF(d) \neq \emptyset$, тому $t \in NF(d)$.

Тоді $x \rightarrow^* x_{max} \rightarrow e_1 \rightarrow^* b$ і $e_1 \rightarrow^* d \rightarrow^* m$, тому $e_1 \in E$. Тоді $x_{max} \leq e_1$ і $e_1 \in E$. Оскільки x_{max} є максимальним елементом в E відносно $\leq \cap E \times E$, маємо $x_{max} = e_1$. Тоді $x_{max} \rightarrow x_{max}$ і маємо суперечність з припущенням теореми про те, що $(X, \rightarrow)$ є ациклічною АПС.

Таким чином, $e_2 \in ND$. Тепер доведемо, що $b \notin NF(e_2)$.

Припустимо, що $b \in NF(e_2)$. Тоді $x \rightarrow^* x_{max} \rightarrow e_2 \rightarrow^* b$ і $e_2 \rightarrow^* m$, тому $e_2 \in E$. Тоді $x_{max} \leq e_2$ і $e_2 \in E$. Оскільки x_{max} є максимальним елементом в E відносно $\leq \cap E \times E$, маємо $x_{max} = e_2$. Тоді $x_{max} \rightarrow x_{max}$ і маємо суперечність з припущенням теореми про те, що $(X, \rightarrow)$ є ациклічною АПС.

Слід зауважити, що $x \rightarrow^* x_{max} \rightarrow e_2$, тому існує елемент $y = e_2 \in ND$, такий, що $x \rightarrow^* y$ і $b \notin NF(y)$. Тому можна зробити висновок, що дійсно, для кожних $x \in ND$ і $b \in IR$ існує елемент $y \in ND$, такий, що $x \rightarrow^* y$ і $b \notin NF(y)$.

Тепер доведемо від супротивного, що $ND = \emptyset$. Припустимо, що $ND \neq \emptyset$. Тоді IR є непорожньою, не більш ніж зліченною множиною (за припущенням теореми), тому IR є образом тотальної функції на множині всіх невід'ємних цілих чисел $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, тому існує нескінченна послідовність $f_n \in X$, $n = 0, 1, 2, \dots$, така, що $IR = \{f_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ (слід зауважити, що елементи у послідовності f_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ можуть повторюватись). Як було показано вище, для кожних елементів $x \in ND$ і $b \in IR$ існує елемент $y \in ND$, такий, що $x \rightarrow^* y$ і $b \notin NF(y)$. Тоді для кожних елементів $x \in ND$ і $i \in \mathbb{N}_0$ існує елемент $y \in ND$, такий, що $x \rightarrow^* y$ і $f_i \notin NF(y)$. Тоді оскільки $ND \neq \emptyset$, за аксіомою залежного вибору існує нескінченна послідовність $g_n \in ND$, $n = 0, 1, 2, \dots$, така, що для кожного індексу $n = 0, 1, 2, \dots$ виконується $g_n \rightarrow^* g_{n+1}$ і $f_n \notin NF(g_{n+1})$. Тоді множина $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ є непорожнім ланцюгом у частково впорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$, тоді вона має точну верхню межу в $(X, \rightarrow^*)$, оскільки $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною АПС. Позначимо як u точну верхню межу множини $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ у частково впорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$. Як було показано вище, $(X, \rightarrow)$ є слабо нормалізуючою АПС, тому $NF(u) \neq \emptyset$. Нехай m є деяким елементом $NF(u)$. Тоді $m \in IR$, тому існує індекс $k \in \mathbb{N}_0$, такий, що $m = f_k$. Слід зауважити, що $g_{k+1} \rightarrow^* u$ (оскільки u є верхньою межею множини $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$) і $u \rightarrow^* m$, тому $g_{k+1} \rightarrow^* m$. Тоді $m \in NF(g_{k+1})$, оскільки $m \in IR$. З іншого боку, $m = f_k \notin NF(g_{k+1})$ за визначенням послідовності g_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, тому маємо суперечність: $m \in NF(g_{k+1})$ і $m \notin NF(g_{k+1})$. Таким чином, припущення $ND \neq \emptyset$ є хибним, звідки робимо висновок, що $ND = \emptyset$.

Оскільки $ND = \emptyset$, кожний елемент $x \in X$ має не більш як одну нормальну форму в АПС $(X, \rightarrow)$. Як було показано вище, $(X, \rightarrow)$ є слабо нормалізуючою АПС, тому кожний елемент $x \in X$ має рівно одну нормальну форму. З цього безпосередньо випливає, що АПС $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною. $\square$

Наслідок 2.1.1. *Нехай $(X, \rightarrow)$ є ациклічною строго індуктивною АПС, де кожний елемент має не більш ніж зліченну множину нормальних форм. Тоді $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною тоді і тільки тоді, коли $(X, \rightarrow)$ є локально конфлюентною.*

Доведення. Будь-яка конфлюентна АПС є локально конфлюентною, тому достатньо показати, що якщо $(X, \rightarrow)$ є локально конфлюентною, то $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною. Припустимо, що АПС $(X, \rightarrow)$ є локально конфлюентною.

Нехай $a, b, c \in X$, $a \rightarrow^* b$, і $a \rightarrow^* c$. Нехай $U = \{u \in X \mid a \rightarrow^* u\}$. З визначень випливає, що $(U, \rightarrow \cap (U \times U))$ є ациклічною строго індуктивною локально конфлюентною АПС, де кожний незвідний елемент є нормальною формою елементу a в $(X, \rightarrow)$. Оскільки множина нормальних форм a в $(X, \rightarrow)$ є не більш ніж зліченною, то АПС $(U, \rightarrow \cap (U \times U))$ є конфлюентною за теоремою 2.1.1. Слід зауважити, що $a, b, c \in U$, тому існує елемент $d \in U \subseteq X$, такий, що (b, d) і (c, d) належать рефлексивно-транзитивному замиканню $\rightarrow \cap (U \times U)$, тому $b \rightarrow^* d$ і $c \rightarrow^* d$.

Отже, можна зробити висновок, що $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною АПС. $\square$

Наслідок 2.1.2. *Нехай $(X, \rightarrow)$ є зліченною ациклічною АПС, такою, що для кожної нескінченної послідовності редуцій $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots$ множина $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ має точну верхню межу у частково впорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$. Тоді $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною АПС тоді і тільки тоді, коли $(X, \rightarrow)$ є локально конфлюентною.*

Доведення. Слід зауважити, що оскільки $(X, \rightarrow)$ є ациклічною, то $(X, \rightarrow^*)$ є дійсно частково впорядкованою множиною (є не лише передвпорядкованою множиною).

Перевіримо, що $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною АПС. Нехай C є непорожнім ланцюгом у частково впорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$. Нехай c_0 є деяким елементом C (він існує, оскільки ланцюг C є непорожнім). Нехай $\rightarrow_C$ є бінарним відношенням на C , таким, що для кожних елементів $x, y \in C$, $x \rightarrow_C y$ тоді і тільки тоді, коли $x \rightarrow^* y$ (слід відмітити, що $\rightarrow^*$ розглядається як бінарне відношення на X). Слід зауважити, що АПС $(C, \rightarrow_C)$ має властивість алмазу (англ. diamond property [133]), оскільки з припущення про те, що $a, b, c \in C$, $a \rightarrow_C b$ і $a \rightarrow_C c$ випливає, що $b \rightarrow^* c$ або $c \rightarrow^* b$ (оскільки C є ланцюгом у частково впорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$), і в обох випадках існує елемент $d \in \{c, b\} \subseteq C$, такий, що $b \rightarrow_C d$

і $c \rightarrow_C d$. Також, $(C, \rightarrow_C)$ є не більш ніж зліченною АПС, оскільки $(X, \rightarrow)$ є не більш ніж зліченною АПС. Оскільки будь-яка АПС з властивістю алмазу є конфлюентною [133] і будь-яка не більш ніж зліченна конфлюентна АПС має властивість кофінальності [31], то АПС $(C, \rightarrow_C)$ має властивість кофінальності. З цього випливає, що для (вищезгаданого) елементу c_0 існує скінченна або нескінченна послідовність редукцій $c_0 \rightarrow^* c_1 \rightarrow^* c_2 \rightarrow^* \dots$, де $c_i \in C$ для всіх i , така, що для кожного елементу $c \in C$, якщо $c_0 \rightarrow^* c$, то $c \rightarrow^* c_k$ для деякого індексу k . З цього випливає, що для кожного елементу $c \in C$ існує індекс k , такий, що $c \rightarrow^* c_k$, оскільки C є ланцюгом в $(X, \rightarrow^*)$. Позначимо $A = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$. Тоді існує непорожня скінченна або нескінченна послідовність редукцій $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots$, де $x_i \in X$ для всіх i , така, що $A \subseteq \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ і для кожного елементу $x \in \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ існує елемент $c \in A$, такий, що $x \rightarrow^* c$. Позначимо $B = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Тоді для кожного елементу $c \in C$ існує елемент $y \in A \subseteq B$, такий, що $c \rightarrow^* y$.

Слід зауважити, що якщо множина B є скінченною, то вона є непорожнім скінченим ланцюгом у частково впорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$, тому вона має найбільший елемент, який є її точною верхньою межею, а якщо B є нескінченною множиною, то $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots$ є нескінченною послідовністю редукцій, тому B має точну верхню межу у частково впорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$ за припущенням даного наслідку. Таким чином, у будь-якому випадку, існує елемент $u \in X$, такий, що u є точною верхньою межею множини B в $(X, \rightarrow^*)$. Слід зауважити, що u є верхньою межею C в $(X, \rightarrow^*)$, оскільки для кожного елементу $c \in C$ існує елемент $y \in B$, такий, що $c \rightarrow^* y$ і $y \rightarrow^* u$. Крім того, u є точною верхньою межею C , оскільки якщо x є верхньою межею C в $(X, \rightarrow^*)$, то для кожного елементу $y \in B$ існує елемент $c \in A \subseteq C$, такий, що $y \rightarrow^* c \rightarrow^* x$, тому x є верхньою межею B в $(X, \rightarrow^*)$, звідки $u \rightarrow^* x$. Таким чином, C має точну верхню межу у $(X, \rightarrow^*)$.

Отже, $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною АПС. Крім того, вона є ациклічною за припущенням. Оскільки $(X, \rightarrow)$ є не більш ніж зліченною АПС, множина X є не більш ніж зліченною, тому множина незвідних елементів у $(X, \rightarrow)$ є не більш ніж зліченною. Тоді за теоремою 2.1.1, $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною тоді і тільки тоді, коли $(X, \rightarrow)$ є локально конфлюентною. $\square$

Контрприклад Хіндлі [56, рисунок 6b] показує, що припущення про ациклі-

чність *не може* бути видаленим з формулювання теореми 2.1.1 – наприклад, АПС

$$(\{0, 1, 2, 3\}, \{(1, 0), (2, 3), (1, 2), (2, 1)\})$$

є строго індуктивною, має скінченну множину незвідних елементів, є локально конфлюентною, але не є конфлюентною.

Наведений нижче результат показує, що припущення про зліченність також *не може* бути видаленим з формулювання теореми 2.1.1. Відповідна АПС проілюстрована на рисунку 2.1. Нижче вона буде називатись *посиленим контрприкладом Ньюмана*, оскільки звичайний контрприклад Ньюмана [56, рисунок 6а] є індуктивним, але не є *строго* індуктивним.

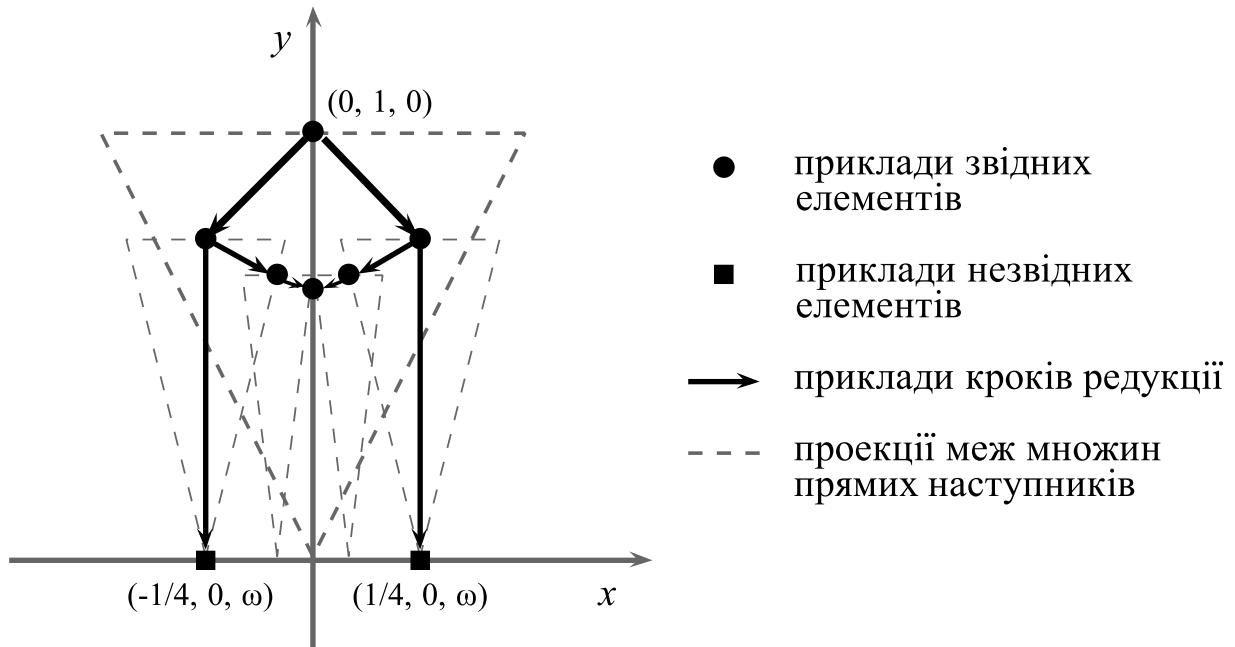


Рисунок 2.1 — Ілюстрація посиленого контрприкладу Ньюмана, описаного у теоремі 2.1.2 – прикладу ациклічної, строго індуктивної, локально конфлюентної АПС, що не є конфлюентною. Слід зауважити, що показані тільки деякі елементи і кроки редукції. На відміну від звичайного контрприкладу Ньюмана [56, рисунок 6а], множина елементів посиленого контрприкладу Ньюмана є незліченною. Той факт, що множина елементів даної АПС є незліченною є важливим, оскільки з теореми 2.1.1 випливає, що кожна зліченна ациклічна строго індуктивна локально конфлюентна АПС є конфлюентною.

Теорема 2.1.2. Нехай $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\omega + 1)$, де $\mathbb{R}$ є множиною дійсних чисел, ω є першим нескінченним ординалом. Нехай $\rightarrow$ є бінарним відношенням на P ,

таким, що $(x, y, n) \rightarrow (x', y', m)$ тоді і тільки тоді, коли одна з таких двох умов виконується:

1. $n < \omega \wedge m = n + 1 \wedge |x' - x| < y'/2^m \wedge 0 < y' < y$;
2. $n < \omega \wedge m = \omega \wedge x' = x \wedge 0 = y' < y$.

Тоді $(P, \rightarrow)$ є ациклічною, строго індуктивною, локально конфлюентною АПС, що не є конфлюентною.

Доведення. Оскільки з умови $(x, y, n) \rightarrow (x', y', m)$ випливає, що $n < m$, то відношення $(x, y, n) \rightarrow^+ (x, y, n)$ не виконується для жодного $(x, y, n) \in P$, тому АПС $(P, \rightarrow)$ є ациклічною.

З визначення відношення $\rightarrow$ випливає, що $(x, y, n) \rightarrow^+ (x', y', m)$ виконується тоді і тільки тоді, коли виконується або умова

$$n < \omega \wedge m < \omega \wedge n < m \wedge |x' - x| < y/2^n - y/2^{m-1} + y'/2^m \wedge 0 < y' < y, \quad (2.2)$$

або умова

$$n < \omega \wedge m = \omega \wedge |x' - x| < y/2^n \wedge 0 = y' < y. \quad (2.3)$$

Тоді АПС $(P, \rightarrow)$ не є конфлюентною, оскільки якщо $a = (0, 2, 0)$, $b = (-1, 0, \omega)$, $c = (1, 0, \omega)$, то $a \rightarrow^+ b$ і $a \rightarrow^+ c$ за властивістю (2.3), однак, за визначенням $\rightarrow$, елементи b і c є незвідними, і оскільки вони різні, відношення $b \rightarrow^* d$ і $c \rightarrow^* d$ не можуть одночасно виконуватись для жодного елементу $d \in P$.

Перевіримо, що АПС $(P, \rightarrow)$ є локально конфлюентною.

Нехай $a = (x_1, y_1, n)$, $b = (x_2, y_2, m)$, $c = (x_3, y_3, k) \in P$ є такими елементами, що $a \rightarrow b$ і $a \rightarrow c$. Тоді з визначення відношення $\rightarrow$ випливає, що $n < \omega$. Нехай $d = (x_1, 0, \omega)$. Розглянемо такі два випадки.

- Якщо $m < \omega$, то $|x_2 - x_1| < y_2/2^m$ і $y_2 > 0$, оскільки $(x_1, y_1, n) = a \rightarrow b = (x_2, y_2, m)$, звідки $b = (x_2, y_2, m) \rightarrow^+ (x_1, 0, \omega) = d$ за властивістю (2.3).
- Якщо $m = \omega$, то $x_2 = x_1$ і $y_2 = 0$, оскільки $(x_1, y_1, n) = a \rightarrow b = (x_2, y_2, m)$, звідки $b = (x_2, y_2, m) = (x_1, 0, \omega) = d$.

В обох випадках маємо $b \rightarrow^* d$. Аналогічно, розглянемо такі два випадки.

- Якщо $k < \omega$, то $|x_3 - x_1| < y_3/2^k$ і $y_3 > 0$, оскільки $(x_1, y_1, n) = a \rightarrow c = (x_3, y_3, k)$, звідки $c = (x_3, y_3, k) \rightarrow^+ (x_1, 0, \omega) = d$ за (2.3).
- Якщо $k = \omega$, то $x_3 = x_1$ і $y_3 = 0$, оскільки $(x_1, y_1, n) = a \rightarrow c = (x_3, y_3, k)$, звідки $c = (x_3, y_3, k) = (x_1, 0, \omega) = d$.

В обох випадках маємо $c \rightarrow^* d$. Таким чином, умови $b \rightarrow^* d$ і $c \rightarrow^* d$ виконуються.

Оскільки a, b, c є довільними елементами, можемо зробити висновок, що $(P, \rightarrow)$ є локально конфлюентною АПС.

Тепер перевіримо, що АПС $(P, \rightarrow)$ є строго індуктивною. Нехай C є непорожнім ланцюгом у частково впорядкованій множині $(P, \rightarrow^*)$ і нехай

$$N = \{n < \omega \mid \exists x \exists y (x, y, n) \in C\}.$$

Розглянемо три випадки.

Випадок 1: існують елементи $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, такі, що $(x_1, y_1, \omega) \in C$. Тоді, враховуючи властивості (2.2), (2.3), маємо, що (x_1, y_1, ω) є найбільшим елементом в ланцюгу C відносно $\rightarrow^*$, тому це є точна верхня межа C в $(P, \rightarrow^*)$.

Випадок 2: множина N є скінченною і $(x, y, \omega) \notin C$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}$. Тоді множина N є непорожньою (оскільки C є непорожнім ланцюгом). Нехай k_m є найбільшим елементом N і $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ є такими елементами, що $(x_1, y_1, k_m) \in C$. Тоді, враховуючи властивості (2.2), (2.3), маємо, що (x_1, y_1, k_m) є найбільшим елементом в ланцюгу C відносно $\rightarrow^*$, тому це є точна верхня межа C в $(P, \rightarrow^*)$.

Випадок 3: множина N нескінченною і $(x, y, \omega) \notin C$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}$. Нехай

$$Y = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \exists n < \omega (x, y, n) \in C\}.$$

Слід зауважити, що якщо k_0 є найменшим елементом множини N , а x_0, y_0 є такими, що $(x_0, y_0, k_0) \in C$, то $y \leq y_0$ для всіх $y \in Y$. З цього випливає, що множина Y або порожня, або обмежена згори. Тоді нехай y_m є додатним дійсним числом, таким, що $y \leq y_m$ для всіх $y \in Y$. З цього випливає, що якщо $n < \omega$, $m < \omega$, $(x, y, n) \in C$ і $(x, y, n) \rightarrow^+ (x', y', m)$, то виконується така нерівність:

$$|x' - x| < y/2^n - y/2^{m-1} + y'/2^m \leq y/2^n - y/2^m = y(1/2^n - 1/2^m) \leq y_m(1/2^n - 1/2^m).$$

Тоді оскільки C є ланцюгом в $(P, \rightarrow^*)$, наведена нижче нерівність виконується для всіх елементів $(x, y, n), (x', y', m) \in C$, таких, що $n < \omega$ і $m < \omega$:

$$|x' - x| \leq y_m |1/2^n - 1/2^m|.$$

Зафіксуємо деяку бієкцію $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow N$, де $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ є множиною невід'ємних цілих чисел (така бієкція існує, оскільки N є нескінченною і не більш ніж зліченною множиною). Слід зауважити, що з визначення N випливає, що для

кожного числа $i \in \mathbb{N}_0$ множина $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} (x, y, f(i)) \in C\}$ є непорожньою. Тоді зафіксуємо деяку функцію $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, таку, що для кожного числа $i \in \mathbb{N}_0$ існує число $y \in \mathbb{R}$, таке, що $(g(i), y, f(i)) \in C$.

Перевіримо, що $g(0), g(1), g(2), \dots$ є фундаментальною послідовністю дійсних чисел. Нехай $\varepsilon \in \mathbb{R}$ додатним дійсним числом ($\varepsilon > 0$). Слід зауважити, що множина $\{i \in \mathbb{N}_0 \mid f(i) \leq 2y_m/\varepsilon\}$ є скінченною, тому існує деяке натуральне число M , таке, що для всіх $i \in \mathbb{N}_0$ з умови $f(i) \leq 2y_m/\varepsilon$ випливає, що $i < M$. Крім того, якщо $i, j \in \mathbb{N}_0$ і $i > M, j > M$, то існують числа $y, y' \in \mathbb{R}$, такі, що

$$(g(i), y, f(i)) \in C \wedge (g(j), y', f(j)) \in C,$$

де $f(i) < \omega$ і $f(j) < \omega$, тому

$$|g(j) - g(i)| \leq y_m |1/2^{f(i)} - 1/2^{f(j)}| \leq y_m \max\{1/2^{f(i)}, 1/2^{f(j)}\} \leq y_m \varepsilon / (2y_m) < \varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ є довільним, можемо зробити висновок, що $g(0), g(1), g(2), \dots$ є фундаментальною послідовністю дійсних чисел. Тоді послідовність $g(0), g(1), g(2), \dots$ є збіжною в $\mathbb{R}$ і має границю, яку позначимо як x_s .

Перевіримо, що $(x_s, 0, \omega)$ є точною верхньою межею ланцюга C .

Спочатку, перевіримо, що $(x_s, 0, \omega)$ є верхньою межею C в $(P, \rightarrow^*)$.

Нехай $(x, y, n) \in C$. З припущення випадку 3 випливає, що $n < \omega$. Тоді $n \in N$. Оскільки множина N є нескінченною, то існує деякий елемент $m \in N$, такий, що $m > n$. Нехай $x', y' \in \mathbb{R}$ є такими елементами, що $(x', y', m) \in C$. Оскільки C є ланцюгом в $(P, \rightarrow^*)$ і $m > n$, маємо $(x, y, n) \rightarrow^+ (x', y', m)$. Тоді $0 < y' < y$. Слід зауважити, що множина $\{i \in \mathbb{N}_0 \mid f(i) \leq m\}$ є скінченною, тому існує деяке натуральне число M , таке, що для кожного $i \in \mathbb{N}_0$, якщо $f(i) \leq m$, то $i < M$.

Перевіримо, що для кожного числа $i \in \mathbb{N}_0$, якщо $i \geq M$, то $|g(i) - x'| \leq y'/2^m$. Нехай $i \in \mathbb{N}_0$ і $i \geq M$. Тоді $f(i) > m$. Оскільки $f(i) \in N$, то існує число $y_0 \in \mathbb{R}$, таке, що $(g(i), y_0, f(i)) \in C$. Оскільки C є ланцюгом в $(P, \rightarrow^*)$ і $f(i) > m$, маємо $(x', y', m) \rightarrow^+ (g(i), y_0, f(i))$. Тоді з властивості (2.2) випливає, що $f(i) \geq 1$, $0 \leq y_0 \leq y'$ і

$$|g(i) - x'| < y'/2^m - y'/2^{f(i)-1} + y_0/2^{f(i)}.$$

Слід зауважити, що

$$y_0/2^{f(i)} \leq 2y'/2^{f(i)} = y'/2^{f(i)-1},$$

тому $|g(i) - x'| \leq y'/2^m$. Таким чином, якщо $i \geq M$, то нерівність $|g(i) - x'| \leq y'/2^m$ виконується. Тоді нерівність

$$x' - y'/2^m \leq g(i) \leq x' + y'/2^m$$

виконується для всіх цілих чисел $i \geq M$, тому границя x_s послідовності $g(0), g(1), g(2), \dots$ задовольняє нерівність

$$x' - y'/2^m \leq x_s \leq x' + y'/2^m.$$

Крім того, оскільки $(x, y, n) \rightarrow^+ (x', y', m)$, то з властивості (2.2) маємо:

$$|x' - x| < y/2^n - y/2^{m-1} + y'/2^m.$$

Тоді оскільки $y' < y$, то маємо

$$|x_s - x| \leq |x_s - x'| + |x' - x| < y'/2^m + y/2^n - y/2^{m-1} + y'/2^m \leq y/2^n.$$

Тоді $|x' - x| < y/2^n$, а також $y > 0$, тому з властивості (2.3) маємо, що виконується відношення $(x, y, n) \rightarrow^+ (x_s, 0, \omega)$.

Оскільки $(x, y, n) \in C$ є довільним елементом, можемо зробити висновок, що $(x_s, 0, \omega)$ є верхньою межею ланцюга C .

Тепер перевіримо, що $(x_s, 0, \omega)$ є найменшою з верхніх меж C в $(P, \rightarrow^*)$.

Нехай $(x_1, y_1, l) \in P$ є верхньою межею ланцюга C в $(P, \rightarrow^*)$. Тоді $n \leq l$ для всіх $n \in N$, а оскільки множина N є нескінченною, вона *не* обмежена згори жодним натуральним числом, тому $l = \omega$. Тоді, оскільки C є непорожнім ланцюгом, з властивості (2.3) випливає, що $y_1 = 0$ і для всіх $(x, y, n) \in C$ виконується $|x_1 - x| < y/2^n$.

Перевіримо, що x_1 є границею послідовності $g(0), g(1), g(2), \dots$. Нехай ε є додатним дійсним числом. Оскільки множина $\{i \in \mathbb{N}_0 \mid f(i) \leq 2y_m/\varepsilon\}$ є скінченною, то існує натуральне число M , таке, що для кожного $i \in \mathbb{N}_0$ з умови $f(i) \leq 2y_m/\varepsilon$ випливає $i < M$. Крім того, якщо $i \in \mathbb{N}_0$ і $i \geq M$, то існує число $y \in \mathbb{R}$, таке, що $(g(i), y, f(i)) \in C$, де $f(i) < \omega$, тому $y \in Y$ і $|x_1 - g(i)| < y/2^{f(i)} \leq y_m\varepsilon/(2y_m) < \varepsilon$.

Оскільки значення $\varepsilon > 0$ є довільним, то x_1 є границею послідовності $g(0), g(1), g(2), \dots$, а оскільки ця послідовність збігається до x_s , то маємо $x_1 = x_s$ і $(x_1, y_1, l) = (x_s, 0, \omega)$. Оскільки (x_1, y_1, l) є довільним елементом, то можемо

зробити висновок, що $(x_s, 0, \omega) \in C$ є точною верхньою межею ланцюга C в $(P, \rightarrow^*)$.

Оскільки ланцюг C є довільним, то АПС $(P, \rightarrow)$ є строго індуктивною. $\square$

Слід зауважити, що в АПС $(P, \rightarrow)$, що описана у формулюванні теореми 2.1.2, звідні елементи мають вигляд (x, y, n) , де $y > 0$ і $n < \omega$, а з властивостей (2.2), (2.3) у доведенні теореми 2.1.2 випливає, що для будь-якого звідного елементу (x, y, n) множиною його нормальних форм є $\{(x', 0, \omega) \mid |x' - x| < y/2^n\}$. Проекція цієї множини на першу координату є дійсним проміжком (як проілюстровано на рисунку 2.2). Наведений нижче результат узагальнює цей факт (теорема 2.1.3 нижче).

Для будь-якої передвпорядкованої множини $(P, \leq)$ і $A \subseteq P$ будемо називати *замиканням вниз* множини A в $(P, \leq)$ множину

$$\{y \in P \mid \exists a \in A \ y \leq a\}.$$

Для будь-якої АПС $(X, \rightarrow)$ будемо казати, що топологія T на множині всіх незвідних елементів $(X, \rightarrow)$ *сумісна вниз* із АПС $(X, \rightarrow)$, якщо для будь-якої множини незвідних елементів A , що є замкненою в сенсі топології T , замикання вниз множини A у передвпорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$ є замкненим у сенсі означення 2.1.2.

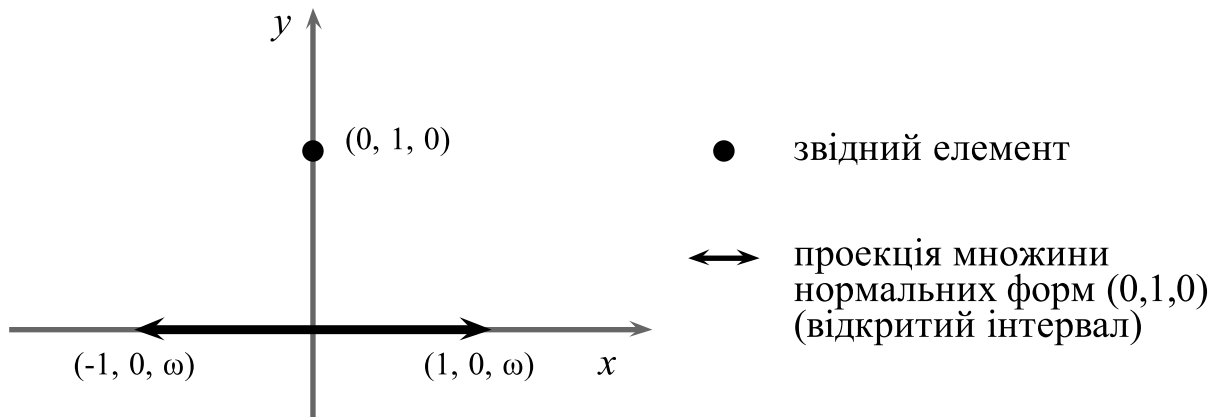


Рисунок 2.2 — Ілюстрація множини нормальних форм звідного елементу посиленого контрприкладу Ньюмана, описаного у теоремі 2.1.2.

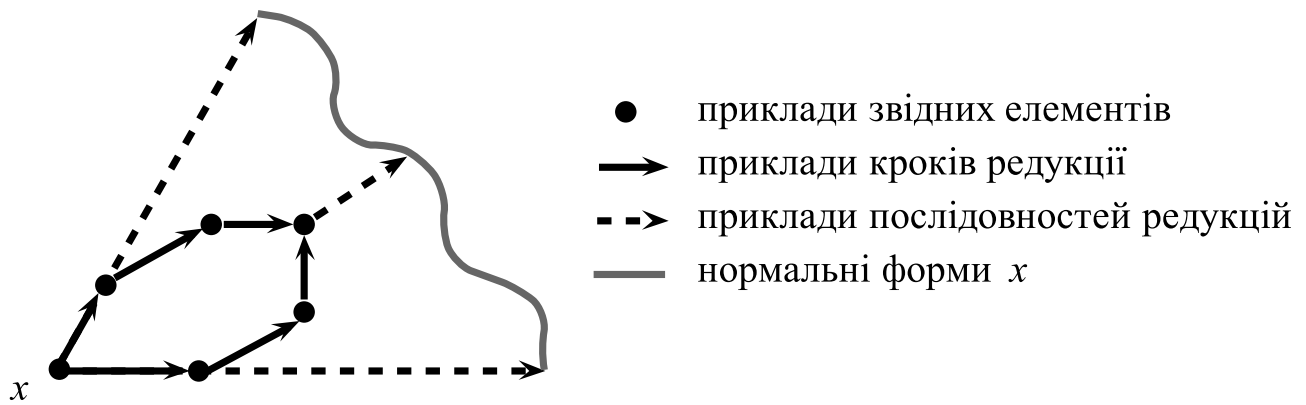


Рисунок 2.3 — Ілюстрація до теореми 2.1.3. Якщо АПС $(X, \rightarrow)$ є ациклічною, строго індуктивною, локально конфлюентною (але *не* обов’язково є зліченною або конфлюентною), то для будь-якої топології T на множині незвідних елементів $(X, \rightarrow)$, що є сумісною вниз із $(X, \rightarrow)$, і для будь-якого елементу $x \in X$, множина нормальних форм x , проілюстрована на рисунку як крива лінія, є зв’язною множиною у сенсі топології T .

Теорема 2.1.3. Нехай $(X, \rightarrow)$ є ациклічною строго індуктивною локально конфлюентною АПС, а T є топологією на множині всіх незвідних елементів $(X, \rightarrow)$, що є сумісною вниз із $(X, \rightarrow)$. Тоді для кожного елементу $x \in X$ множина всіх нормальних форм x в $(X, \rightarrow)$ є зв’язною множиною в топологічному просторі (IR, T) , де IR є множиною всіх незвідних елементів АПС $(X, \rightarrow)$.

Доведення. Будемо позначати як IR множину всіх незвідних елементів $(X, \rightarrow)$. Для кожного елементу $x \in X$ введемо такі позначення:

- $U(x) = \{y \in X \mid x \rightarrow^* y\}$;
- $U_{\rightarrow^*}(x)$ є частково впорядкованою множиною $(U(x), \rightarrow^* \cap (U(x) \times U(x)))$;
- $NF(x)$ є множиною всіх нормальних форм x в $(X, \rightarrow)$.

Оскільки $(X, \rightarrow)$ є ациклічною строго індуктивною АПС, то, використовуючи ті ж міркування, що були використані в доведенні теореми 2.1.1 (за допомогою леми Цорна), маємо, що АПС $(X, \rightarrow)$ є слабо нормалізуючою.

Зафіксуємо $x \in X$. Слід зауважити, що $NF(x) \neq \emptyset$. Припустимо, що $NF(x)$ не є зв’язною множиною в топологічному просторі (IR, T) . Тоді існують множини $O_1, O_2 \subseteq IR$, що є відкритими у сенсі топології T і що задовольняють такі умови: $NF(x) \subseteq O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 \cap NF(x) = \emptyset$, $O_1 \cap NF(x) \neq \emptyset$ і $O_2 \cap NF(x) \neq \emptyset$.

Нехай $A = NF(x) \setminus O_1$ і $B = NF(x) \setminus O_2$. Тоді $A \cup B = NF(x)$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$ і $B \neq \emptyset$. Слід зауважити, що $NF(x) \subseteq U(x)$, тому $A, B \subseteq U(x)$.

Нехай D_1 є замиканням вниз множини A в $U_{\rightarrow^*}(x)$, а D_2 є замиканням вниз множини B в $U_{\rightarrow^*}(x)$.

Оскільки T є сумісною вниз із АПС $(X, \rightarrow)$, то замикання вниз множин $IR \setminus O_1$ та $IR \setminus O_2$ в $(X, \rightarrow^*)$ є замкненими в $(X, \rightarrow^*)$ (у сенсі означення 2.1.2). Тоді D_1 і D_2 є замкненими в $U_{\rightarrow^*}(x)$ (у сенсі означення 2.1.2).

Оскільки $x \in U(x)$, $A, B \subseteq NF(x)$ і $A, B \neq \emptyset$, то маємо $x \in D_1$ і $x \in D_2$, тому $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. При цьому, має місце рівність $D_1 \cap D_2 \cap NF(x) = \emptyset$, оскільки для кожного елементу $y \in D_1 \cap D_2 \cap NF(x)$ виконуються умови $NF(y) = \{y\}$, $NF(y) \cap A \neq \emptyset$ та $NF(y) \cap B \neq \emptyset$, звідки випливає суперечність $y \in A \cap B = \emptyset$.

Як було зазначено вище, АПС $(X, \rightarrow)$ є слабко нормалізуючою, тому для кожного елементу $y \in U(x)$ маємо $NF(y) \neq \emptyset$, а також $NF(y) \subseteq NF(x) = A \cup B$, тому $NF(y) \cap A \neq \emptyset$ або $NF(y) \cap B \neq \emptyset$, звідки $y \in D_1 \cup D_2$. Таким чином, $U(x) \subseteq D_1 \cup D_2$, а також $D_1, D_2 \subseteq U(x)$, звідки $D_1 \cup D_2 = U(x)$.

Слід зауважити, що виконується рівність $A \cap D_2 = \emptyset$, оскільки якщо $y \in D_2$, то існує елемент $b \in B$, такий, що $y \rightarrow^* b$, тому якщо y є незвідним у $(X, \rightarrow)$, то $y = b \notin A$ (оскільки $A \cap B = \emptyset$), а якщо y є звідним у $(X, \rightarrow)$, то $y \notin A$.

Аналогічно, маємо $B \cap D_1 = \emptyset$.

Визначимо бінарне відношення $\leq'$ на $U(x)$, таке, що для всіх $y_1, y_2 \in U(x)$:

$$y_1 \leq' y_2 \Leftrightarrow (y_1 \rightarrow^* y_2 \vee (y_1 \in D_1 \wedge y_2 \in A) \vee (y_1 \in D_2 \wedge y_2 \in B)).$$

Використовуючи ті факти, що D_1, D_2 є замкненими множинами, $A \cap D_2 = \emptyset$, $B \cap D_1 = \emptyset$ і $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною АПС, маємо, що $\leq'$ є передпорядком на множині $U(x)$ і, крім того, кожний непорожній ланцюг у передвпорядкованій множині $(U(x), \leq')$ має точну верхню межу.

Зафіксуємо деякі елементи $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ (такі елементи існують, оскільки $A, B \neq \emptyset$). Слід зауважити, що для всіх $y \in U(x)$ має місце $y \leq' a_0$ або $y \leq' b_0$.

Нехай $D = \{y \in U(x) \mid y \leq' a_0 \wedge y \leq' b_0\}$. Тоді D є замкненою множиною в $(U(x), \leq')$ у сенсі означення 2.1.2 і $D \neq \emptyset$, оскільки $x \in D$. Тоді оскільки $(U(x), \leq')$ має точну верхню межу для кожного непорожнього ланцюга, за допомогою леми Цорна (як у теоремі 2.1.1) можемо зробити висновок, що D має деякий максимальний елемент відносно $\leq'$. Позначимо його як d . Тоді $d \in U(x)$, $d \leq' a_0$ і $d \leq' b_0$. Оскільки відношення $\leq'$ визначається як диз'юнкція трьох умов $(y_1 \rightarrow^* y_2 \vee (y_1 \in D_1 \wedge y_2 \in A) \vee (y_1 \in D_2 \wedge y_2 \in B))$, кон'юнкція $d \leq' a_0 \wedge d \leq' b_0$ може бути переписана у формі диз'юнкції 9-ти умов: $d \rightarrow^* a_0 \wedge d \rightarrow^* b_0$,

$(d \in D_1 \wedge a_0 \in A) \wedge d \rightarrow^* b_0$ і т.д. З визначень цих умов випливає, що у кожному з цих випадків маємо суперечність (наприклад, якщо $d \rightarrow^* a_0 \wedge d \rightarrow^* b_0$, то за допомогою локальної конфлюентності $(X, \rightarrow)$ можна отримати суперечність з максимальністю елементу d в множині D відносно $\leq'$ як в аналогічній ситуації у доведенні теореми 2.1.1). Тоді припущення про те, що $NF(x)$ не є зв'язною множиною в топологічному просторі (IR, T) є хибним.

Таким чином, множина всіх нормальних форм x в $(X, \rightarrow)$ є зв'язною множиною в топологічному просторі (IR, T) . $\square$

2.1.4. Формалізація у системі інтерактивного доведення теорем

Теореми 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 було формалізовано в системі Isabelle/HOL [57]. Відповідна формальна теорія доступна за посиланням [84] і має назву NLNT.

Формулювання формалізованого варіанту теореми 2.1.1 в [84] має такий вигляд (тут символ σ позначає відношення редукції):

definition *is_atmost_countable_set* :: "'a set $\Rightarrow$ bool"

("_ is AT MOST COUNTABLE")

where "(A is AT MOST COUNTABLE) $\equiv$ ($\exists f :: 'a \Rightarrow \text{nat. } (\forall x \in A. \forall y \in A. ((f\ x = f\ y) \longrightarrow (x = y))))$)"

theorem *thm_1*:

- Theorem 1: An acyclic strictly inductive abstract rewriting system
- with at most countable set of irreducible elements
- is confluent if and only if it is locally confluent.

fixes $X\ \sigma$

assumes " X, σ is ACYCLIC ARS" **and** " X, σ is S.I.ARS"

and " $\{x \in X. x \text{ is IRREDUCIBLE in } X, \sigma\}$ is AT MOST COUNTABLE"

shows " $(X, \sigma \text{ is CONFLUENT ARS}) = (X, \sigma \text{ is L.CONFLUENT ARS})$ "

Позначення ACYCLIC ARS (ациклічна АПС), S.I.ARS (строго індуктивна АПС), IRREDUCIBLE (незвідний елемент), CONFLUENT ARS (конфлюентна АПС), L.CONFLUENT ARS (локально конфлюентна АПС) визначені в теорії GNL [76], від якої залежить теорія NLNT [84].

Формулювання теореми 2.1.2 в NLNT [84] має такий вигляд:

theorem *thm_2*:

- Theorem 2 (Strengthened Newman's counterexample).
- This is an example of an acyclic, strictly inductive, locally confluent abstract rewriting system that is not confluent.

```

fixes  $P :: "(real \times real \times enat) \text{ set}"$ 
and  $\sigma :: "(real \times real \times enat) \Rightarrow (real \times real \times enat) \Rightarrow bool"$ 
assumes " $P = \{x :: real. \text{True}\} \times \{y :: real. \text{True}\} \times \{n :: enat. \text{True}\}"$ 
and " $\forall (x :: real) (y :: real) (n :: enat) (x' :: real) (y' :: real)$ 
 $(m :: enat).$ 
 $\sigma (x, y, n) (x', y', m) =$ 
 $( (n < \infty \wedge m = n + 1 \wedge |x' - x| < y' / 2^{(the\_enat\ m)} \wedge$ 
 $0 < y' \wedge y' < y) \vee (n < \infty \wedge m = \infty \wedge x' = x \wedge 0 = y' \wedge y' < y) )"$ 
shows " $(P, \sigma \text{ is ACYCLIC ARS}) \wedge (P, \sigma \text{ is S.I.ARS}) \wedge$ 
 $(P, \sigma \text{ is L.CONFLUENT ARS}) \wedge (\neg (P, \sigma \text{ is CONFLUENT ARS}))"$ 

```

Формулювання теореми 2.1.3 в NLNT [84] має такий вигляд:

```

definition  $is\_dw\_compatible :: "('n :: topological\_space) \Rightarrow 'a \Rightarrow$ 
 $'a \text{ set} \Rightarrow ('a \Rightarrow 'a \Rightarrow bool) \Rightarrow bool"$ 
 $("\_ \text{ is DW-COMPATIBLE with } \_,\_")$ 
where
 $"(f \text{ is DW-COMPATIBLE with } X, \sigma) \equiv$ 
 $(bij\_betw\ f\ \{n :: 'n. \text{True}\}\ \{x \in X. x \text{ is IRREDUCIBLE in } X, \sigma\})$ 
 $\wedge (\forall A :: ('n \text{ set}). \text{closed } A \longrightarrow$ 
 $(\{y \in X. \exists a \in A. \sigma^{**} y (f\ a)\} \text{ is c-CLOSED in } X, (\sigma^{**})))"$ 

```

theorem *thm_3*:

- Theorem 3: given an acyclic strictly inductive locally confluent abstract rewriting system and a topology on the set of all irreducible elements that is downward-compatible with the system, the set of all normal forms of any element is a connected subset of the space of irreducible elements.

```

fixes  $X :: "'a \text{ set}"$  and  $\sigma :: "'a \Rightarrow 'a \Rightarrow bool"$  and
 $f :: "'n :: topological\_space \Rightarrow 'a"$ 
assumes " $X, \sigma \text{ is ACYCLIC ARS}"$  and " $X, \sigma \text{ is S.I.ARS}"$  and

```

" X, σ is L.CONFLUENT ARS" and " f is DW-COMPATIBLE with X, σ " shows " $\forall x \in X. \text{connected } \{ n :: 'n. (f\ n) \text{ is N.F. of } x \text{ in } X, \sigma \}$ "

Позначення *c-CLOSED* (замкнена підмножина у передвпорядкованій множині) і *N.F.* (нормальна форма елементу) визначені в теорії GNL [76], від якої залежить теорія NLNT [84].

2.2. Узагальнена лема Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем

2.2.1. Попередні зауваження

У даному підрозділі пропонується узагальнення леми Ньюмана для всіх строго індуктивних АПС, що використовує топологію на передвпорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$, породженій АПС $(X, \rightarrow)$, де $\rightarrow^*$ позначає рефлексивно-транзитивне замикання відношення редукції $\rightarrow$, у спосіб, подібний до того, як вона використовується у принципі відкритої індукції Рауля [174]. Використовуючи запропонований підхід, буде отримано теорему 2.2.1 у пункті 2.2.3, що надає необхідну і достатню умову конфлюентності для класу АПС $(X, \rightarrow)$ таких, що $(X, \rightarrow^*)$ є строго індуктивною [134] передвпорядкованою множиною (кожний непорожній ланцюг має точну верхню межу). Звичайна лема Ньюмана для термінальних систем [145, 56] може розглядатись як наслідок даної теореми (наслідок 2.2.1 з теореми 2.2.1).

Також, у даному підрозділі буде надано опис формального доказу формалізованої версії вищезазначеної теореми (узагальненої леми Ньюмана) у системі Isabelle/HOL [57, 151, 206]. Формальний доказ доступний за посиланням [76]. Слід зауважити, що цей формальний доказ не заснований на прямому застосуванні принципу нетерової або відкритої індукції. Однак, принцип нетерової індукції і (відповідним чином адаптований) принцип відкритої індукції можуть бути використані для опису підкласів ациклічних АПС, для яких узагальнена лема Ньюмана може бути використана як критерій конфлюентності (твердження 2.2.1 і 2.2.2).

2.2.2. Допоміжні означення та факти

Нижче надані означення понять, необхідних для формулювання та обговорення головного результату підрозділу. Означення і твердження, наведені у цьому пункті та теорема 2.2.1 у пункті 2.2.3 (головний результат підрозділу) сформульовані природною мовою. Формалізовані версії означень, формулювання тверджень 2.2.1-2.2.11 і теореми 2.2.1 в Isabelle і тексти формальних доказів доступні за поси-

ланням [76]. Формальні тексти можуть бути перевірені автоматично за допомогою програмного забезпечення інтерактивного доведення теорем Isabelle 2025 [57].

2.2.2.1. Принцип нетерової індукції для АПС

Відомо [56, 133], що властивість термінальності АПС $(X, \rightarrow)$ може бути охарактеризована за допомогою варіанту принципу нетерової індукції. Даний принцип індукції може бути використаний для того, щоб довести, що деяка задана властивість $P(x)$ виконується для всіх $x \in X$ [56].

Далі будемо використовувати варіант принципу нетерової індукції, подібний до того, що наведений у [133, пункт 1.3.15], але будемо формулювати такий принцип в екстенціональній формі, припускаючи, що властивість $P(x)$ подається як $x \in S$, де S є множиною. Наведені нижче означення використовують терміни *індуктивність* та *нетерова індукція* подібно до [174, 133, 56].

Означення 2.2.1 ([174]). S є *нетерово-індуктивною* підмножиною в АПС $(X, \rightarrow)$, якщо $S \subseteq X$ і

$$\forall x \in X ((\forall y \in X (x \rightarrow^+ y \Rightarrow y \in S)) \Rightarrow x \in S).$$

Означення 2.2.2 ([133]). В АПС $(X, \rightarrow)$ *виконується принцип нетерової індукції*, якщо для кожної множини $S \subseteq X$ виконується така умова: якщо S є нетерово-індуктивною підмножиною в АПС $(X, \rightarrow)$, то $S = X$.

Наведене нижче твердження 2.2.1 є модифікованим варіантом теореми про індукцію з [133, пункт 1.3.15].

Твердження 2.2.1 ([133]). Для будь-якої АПС $(X, \rightarrow)$ такі умови еквівалентні:

1. $(X, \rightarrow)$ є *термінальною*;
2. $(X, \rightarrow)$ *виконується принцип нетерової індукції*.

Доведення. Аналогічне доведенню [133, теорема 1.3.16]. □

2.2.2.2. Принцип відкритої індукції для АПС

Нехай $(X, \leq)$ є передвпорядкованою множиною ($\leq$ є рефлексивним і транзитивним бінарним відношенням на X).

Означення 2.2.3 нижче засноване на [174], але має невеликі відмінності, що будуть використані далі.

Означення 2.2.3 ([174]). Підмножина $A \subseteq X$ є

1. ланцюгом (в $(X, \leq)$), якщо $\forall x, y \in A (x \leq y \vee y \leq x)$;
2. замкнутою (в $(X, \leq)$), якщо для кожного непорожнього ланцюга C в $(X, \leq)$, якщо C має точну верхню межу $x \in X$ і $C \subseteq A$, то $x \in A$;
3. відкритою (в $(X, \leq)$), якщо $X \setminus A$ є замкнутою в $(X, \leq)$;
4. відносно відкритою в B відносно відношення передпорядку $\leq$, де $B \subseteq X$ є надмножиною A , якщо A відкрита у $(B, \leq \cap (B \times B))$.

Зауваження 2.2.1. Відкрита за Скоттом підмножина у частково впорядкованій множині є відкритою у вищезгаданому сенсі, але обернене твердження може не виконуватись [174, 45].

Приклад 2.2.1. Якщо $X = [0, 1]$, де $[0, 1]$ є дійсним проміжком, а $\leq$ є обмеженням звичайного порядку на дійсних числах на X , то в $(X, \leq)$

- кожна підмножина X є ланцюгом;
- множина $\{1\}$ замкнена: кожний непорожній ланцюг у $\{1\}$ містить лише 1, тому його точною верхньою межею є 1, а $1 \in \{1\}$;
- множина $\{1\}$ є *не* відкрита: елемент $1 \in \{1\}$ може бути наближений знизу за допомогою непорожнього ланцюга елементів, що не належать $\{1\}$, наприклад, $1 - 10^{-n}$ для $n = 1, 2, 3, \dots$;
- множина $(0, 1)$ є відкритою: жодне число в $(0, 1)$ може бути наближене знизу за допомогою непорожнього ланцюга, що не має елементів у $(0, 1)$.

Приклад 2.2.2. Якщо X є множиною всіх скінченних рядків в алфавіті $\{0, 1\}$ (наприклад, $01010 \in X$) і $s \leq s'$ тоді і тільки тоді, коли s є префіксом s' (наприклад, $01 \leq 010$, але $01 \not\leq 110$), то в $(X, \leq)$

- множина $\{0, 00\}$ є ланцюгом;
- множина $\{0, 1\}$ є *не* ланцюгом: елементи 0, 1 є непорівнюваними;
- множина $\{1\}$ є відкритою і замкнутою (відкрито-замкнутою).

Означення 2.2.4 нижче засноване на [174], але має відмінності, що будуть використані далі.

Означення 2.2.4. АПС $(X, \rightarrow)$ має *коректний принцип відкритої індукції*, якщо для кожної відкритої множини $S \subseteq X$ у передвпорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$, якщо S є нетерово-індуктивною підмножиною в АПС $(X, \rightarrow)$, то $S = X$.

Твердження 2.2.2. Для будь-якої АПС $(X, \rightarrow)$ такі умови еквівалентні:

1. $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною і ациклічною АПС;
2. $(X, \rightarrow)$ має коректний принцип відкритої індукції.

Доведення. Формальний доказ в Isabelle доступний за посиланням [76, формальна лема `lem_prop_14`]. Доведення того, що з пункту 1 випливає пункт 2 аналогічне доведенню теореми Рауля [174, теорема 3.3]. Доведення того, що з пункту 2 випливає пункт 1 складається з двох частин.

- Доведення того, що АПС з коректним принципом відкритої індукції є строго індуктивною аналогічне доведенню зворотного принципу відкритої індукції, запропонованого у [73, теорема 1].
- Доведення того, що АПС з коректним принципом відкритої індукції є ациклічною проводиться від супротивного (припускаючи, що $x \rightarrow^+ x$ виконується для деякого $x \in X$, у означенні 2.2.4 використовується множина $S = X \setminus \{y \in X \mid y \rightarrow^* x\}$).

□

Твердження 2.2.3. *Термінальна АПС є строго індуктивною та ациклічною.*

Доведення. Формальний доказ в Isabelle доступний за посиланням [76, формальна лема `lem_prop_15`]. Доведення випливає з тверджень 2.2.1, 2.2.2 враховуючи, що АПС з коректним принципом нетерової індукції також має також коректний принцип відкритої індукції (означення 2.2.2 і 2.2.4).

□

Твердження 2.2.4. *Якщо $(X, \rightarrow)$ є АПС і X є скінченною множиною, то $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною АПС.*

Доведення. Формальний доказ в Isabelle доступний за посиланням [76, формальна лема `lem_prop_16`]. Доведення випливає з означення 2.1.3, враховуючи, що кожний непорожній скінченний ланцюг у передвпорядкованій множині має точну верхню межу.

□

2.2.2.3. Квазі-нормальні форми

На відміну від термінальних АПС, строго індуктивні АПС не обов'язково є слабо нормалізуючими (наприклад, АПС $(\{0\}, \{(0, 0)\})$ є строго індуктивною, але не є слабо нормалізуючою). Однак, термінальні і строго індуктивні АПС мають деякі подібні властивості. Введені нижче означення можуть бути використані для того, щоб виділити і підкреслити такі властивості.

Означення 2.2.5. Нехай $(X, \rightarrow)$ є АПС і $x, x' \in X$. Тоді

1. елемент x є *квазі-незвідним*, якщо для кожного $y \in X$ з умови $x \rightarrow^* y$ випливає, що $y \rightarrow^* x$;
2. елемент x' є *квазі-нормальною формою* x (або, скорочено, $x' \in \text{КВНФ } x$), якщо $x \rightarrow^* x'$ і x' є квазі-незвідним елементом;
3. елементи $x, x' \in \text{КВНФ-еквівалентними}$, якщо

$$\{y \in X \mid y \in \text{КВНФ } x\} = \{y \in X \mid y \in \text{КВНФ } x'\}.$$

Означення 2.2.6. АПС $(X, \rightarrow)$

1. *квазі-нормалізуюча*, якщо для кожного елементу $x \in X$ існує елемент $x' \in X$, такий, що x' є квазі-нормальною формою x ;
2. *відкрито квазі-нормалізуюча*, якщо $(X, \rightarrow)$ є квазі-нормалізуючою і для кожних $x, x' \in X$, таких, що x' є квазі-нормальною формою x , множина

$$\{y \in X \mid x \rightarrow^* y \wedge y \text{ та } x' \in \text{КВНФ-еквівалентними}\}$$

відносно відкрита у множині $\{y \in X \mid x \rightarrow^* y\}$ відносно відношення передпорядку $\rightarrow^*$.

Умова квазі-нормалізації аналогічна (слабкій) умові нормалізації. В загальному випадку, умова відкритої квазі-нормалізації є більш сильною умовою, важливість якої для перевірки конфлюентності буде показана нижче у теоремі 2.2.1 і прикладі 2.2.3 (АПС, наведена у прикладі 2.2.3 є строго індуктивною і квазі-нормалізуючою, але не є ні відкрито квазі-нормалізуючою, ні конфлюентною, і в цьому прикладі відсутність властивості конфлюентності пов'язана з невиконанням умови відкритої квазі-нормалізації).

Твердження 2.2.5. *Кожна строго індуктивна АПС є квазі-нормалізуючою.*

Доведення. Формальний доказ в Isabelle доступний за посиланням [76, формальна лема `lem_prop_19`]. Доведення випливає з леми Цорна. $\square$

Твердження 2.2.6. *Нехай $(X, \rightarrow)$ є термінальною АПС. Тоді для будь-яких множин A, B , таких, що $A \subseteq B \subseteq X$, множина A є відносно відкритою в B відносно відношення передпорядку $\rightarrow^*$.*

Доведення. Формальний доказ в Isabelle доступний за посиланням [76, формальна лема `lem_prop_20`]. Доведення випливає з означення 2.2.3, враховуючи, що для термінальної АПС $(X, \rightarrow)$ кожний непорожній ланцюг C в $(X, \rightarrow^*)$ має найбільший елемент (тобто $x \in C$, такий, що $\forall c \in C \ c \rightarrow^* x$). $\square$

Твердження 2.2.7. *Будь-яка термінальна АПС є відкрито квазі-нормалізуючою.*

Доведення. Формальний доказ в Isabelle доступний за посиланням [76, формальна лема `lem_prop_21`]. Доведення випливає з тверджень 2.2.3, 2.2.5, 2.2.6. $\square$

Ще одна проста достатня умова, яка гарантує, що АПС є відкрито квазі-нормалізуючою наведена нижче.

Означення 2.2.7. АПС $(X, \rightarrow)$ називається *скінченно-нормалізуючою*, якщо вона нормалізуюча і множина всіх незвідних елементів у $(X, \rightarrow)$ є скінченною.

Твердження 2.2.8. *Будь-яка скінченно-нормалізуюча АПС є відкрито квазі-нормалізуючою.*

Доведення. Формальний доказ в Isabelle доступний за посиланням [76, формальна лема `lem_prop_23`]. Доведення випливає з означення 2.2.6 враховуючи, що для скінченно-нормалізуючої АПС $(X, \rightarrow)$, множина

$$\{y \in X \mid x \rightarrow^* y \wedge y \text{ та } x' \in \text{КВНФ-еквівалентними}\}$$

може бути виражена як доповнення скінченного об'єднання замкнених множин в $\{y \in X \mid x \rightarrow^* y\}$, що розглядається як породжена передвпорядкована множина в передвпорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$. $\square$

2.2.2.4. Квазі-локальна конфлюентність

Слід зауважити, що поняття локальної конфлюентності втрачає корисний зміст, коли відношення редукції $\rightarrow$ є рефлексивним і транзитивним, оскільки, в цьому випадку, визначення конфлюентності і локальної конфлюентності стають тривіально еквівалентними (і еквівалентними властивості алмазу). В такій ситуації поняття квазі-локальної конфлюентності, введене нижче, може бути використане замість локальної конфлюентності.

Означення 2.2.8. АПС $(X, \rightarrow)$ є *квазі-локально конфлюентною*, якщо для кожного елементу $a \in X$ існує підмножина $S \subseteq \{x \in X \mid a \rightarrow^+ x\}$, така, що наведені нижче умови 1-2 виконуються:

1. умова 2-консистентності:

$$\forall b, c \in S \exists d \in X (b \rightarrow^* d \wedge c \rightarrow^* d);$$

2. умова коініціальності:

$$\forall x \in X (a \rightarrow^+ x \Rightarrow (x \rightarrow^* a) \vee (\exists b \in S b \rightarrow^* x \wedge \neg(b \rightarrow^* a))).$$

Зауваження 2.2.2. Назва умови 2-консистентності в означенні 2.2.8 пов'язана з умовою 2-консистентності або пов'язаності (англ. linkedness) [37] для підмножин передвпорядкованих множин (кожні два елементи мають верхню межу [37]).

Назва умови коініціальності в означенні 2.2.8 пов'язана з коініціальними підмножинами у передвпорядкованих множинах, визначеними дуально до кофінальних [174] (якщо $(X, \leq)$ є передвпорядкованою множиною і $A, B \subseteq X$, то A є коініціальною підмножиною B , якщо $A \subseteq B$ і для кожного $b \in B$ існує $a \in A$, такий, що $a \leq b$). Зокрема, коли відношення редукції $\rightarrow$ є деяким строгим частковим порядком $<$ на X , умова коініціальності разом з умовою $S \subseteq \{x \in X \mid a \rightarrow^+ x\}$ виражають вимогу, що S є коініціальною підмножиною $\{x \in X \mid a < x\}$ у частково впорядкованій множині $(X, \leq)$, де $x \leq y \Leftrightarrow (x = y \vee x < y)$.

Зауваження 2.2.3. Напівформально, множина S в означенні 2.2.8 може розглядатись як заміна для множини прямих наступників елементу a (тобто множини $\{x \in X \mid a \rightarrow x\}$). Остання множина дійсно задовольняє умови 1 і 2 означення 2.2.8 у випадку, коли АПС є локально конфлюентною і ациклічною, як показано у твердженні 2.2.10 нижче. Загалом, умови 1 і 2 означення 2.2.8 аксіоматизують властивості множини прямих наступників. Вони будуть використані далі для отримання загального критерію конфлюентності.

Твердження 2.2.9. *Кожна конфлюентна АПС є квазі-локально конфлюентною.*

Доведення. Формальний доказ в Isabelle доступний за посиланням [76, формальна лема lem_prop_25]. Припустимо, що АПС $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною. Тоді для будь-якого елементу $a \in X$ множина $S = \{x \in X \mid a \rightarrow^* x \wedge \neg(x \rightarrow^* a)\}$ задовольняє умови означення 2.2.8. Таким чином, $(X, \rightarrow)$ є квазі-локально конфлюентною. $\square$

Твердження 2.2.10. *Нехай $(X, \rightarrow)$ є локально конфлюентною ациклічною АПС і $a \in X$. Тоді множина $S = \{x \in X \mid a \rightarrow x\}$ задовольняє умови 1-2 означення 2.2.8.*

Доведення. Формальний доказ в Isabelle доступний за посиланням [76, формальна лема `lem_prop_26`]. Доведення випливає з відповідних визначень. $\square$

Твердження 2.2.11. *Кожна локально конфлюентна ациклічна АПС є квазі-локально конфлюентною.*

Доведення. Формальний доказ в Isabelle доступний за посиланням [76, формальна лема `lem_prop_27`]. Доведення випливає з означення 2.2.8 і твердження 2.2.10. $\square$

2.2.3. Головний результат підрозділу

Теорема 2.2.1. *Нехай $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною АПС. Тоді $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною тоді і тільки тоді, коли $(X, \rightarrow)$ є відкрито квазі-нормалізуючою і квазі-локально конфлюентною.*

Доведення. Спочатку припустимо, що $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною, відкрито квазі-нормалізуючою, квазі-локально конфлюентною АПС. Доведемо, що $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною АПС.

Нехай $a \in X$. Щоб довести, що для кожних b, c з умови $a \rightarrow^* b \wedge a \rightarrow^* c$ випливає, що існує елемент $d \in X$, такий, що $b \rightarrow^* d \wedge c \rightarrow^* d$, достатньо довести, що всі максимальні елементи в множині $X' = \{x \in X \mid a \rightarrow^* x\}$, що розглядається як породжена передвпорядкована підмножина $(X, \rightarrow^*)$, є еквівалентними у сенсі такого відношення еквівалентності $\approx$ на X , що $x \approx x'$ тоді і тільки тоді, коли $x \rightarrow^* x' \wedge x' \rightarrow^* x$.

Зафіксуємо довільні максимальні елементи $M, M' \in X'$ (вони також є максимальними елементами у передвпорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$ і є квазі-нормальними формами в АПС $(X, \rightarrow)$). Введемо допоміжну передвпорядковану множину $(X', \leq')$, де

$$x \leq' y \Leftrightarrow (x \rightarrow^* y \vee ((\exists x' \in X' \ x \rightarrow^* x' \wedge \neg(x' \rightarrow^* M)) \wedge M' \rightarrow^* y)).$$

Тоді для кожного елементу $x \in X'$ виконується $x \leq' M \vee x \leq' M'$ (слід зауважити, що передвпорядкована множина $(X', \leq')$ введена для зручності аналізу відношень між максимальними елементами $(X, \rightarrow^*)$). Тоді $(X', \leq')$ не має елементів, непорівнюваних з M і M' .

З припущення про те, що АПС $(X, \rightarrow)$ є відкрито квазі-нормалізуючою випливає, що $(X', \leq')$ є строго індуктивною передвпорядкованою множиною.

Також, множини $\{x \in X' \mid x \leq' M\}$, $\{x \in X' \mid x \leq' M'\}$ є замкненими в $(X, \leq')$. Позначимо їх перетин як D . Тоді D є замкненою множиною в $(X', \leq')$ і вона є непорожньою, оскільки $(X', \leq')$ має найменший елемент. Оскільки $(X', \leq')$ є строго індуктивною, використовуючи лему Цорна можна зробити висновок, що D має деякий $\leq'$ -максимальний елемент m .

Для будь-якої передвпорядкованої множини $(P, \leq)$ будемо називати підмножину $A \subseteq P$ 2-консистентною (або пов'язаною, англ. linked [37]), якщо для кожних $a_1, a_2 \in A$ існує елемент $x \in P$, такий, що $a_1 \leq x \wedge a_2 \leq x$. З цього випливає такий критерій 2-консистентності: підмножина $A \subseteq P$ є 2-консистентною тоді і тільки тоді, коли для будь-яких замкнених вниз множин (нижніх множин) $X_1, X_2 \subseteq P$ з умови $P = X_1 \cup X_2$ випливає $A \subseteq X_1 \vee A \subseteq X_2$.

Враховуючи припущення про те, що АПС $(X, \rightarrow)$ є квазі-локально конфлюентною, існує коініціальна підмножина N множини $\{x \in X' \mid m \leq' x \wedge \neg x \leq' m\}$, яка є 2-консистентною в $(X', \leq')$. Зі згаданого вище критерію 2-консистентності випливає, що $N \subseteq \{y \in X' \mid y \leq' M\} \vee N \subseteq \{y \in X' \mid y \leq' M'\}$.

Припустимо, що елементи M і M' є непорівнюваними відносно $\leq'$. Тоді, використовуючи коініціальність N , існують елементи $b \in N$ і $c \in N$, такі, що $b \leq' M$ і $c \leq' M'$. Якщо $N \subseteq \{y \in X' \mid y \leq' M\}$, то $c \leq' M$, звідки $m \leq' c \wedge \neg c \leq' m$ і $c \in D$. Якщо $N \subseteq \{y \in X' \mid y \leq' M'\}$, то $b \leq' M'$, звідки $m \leq' b \wedge \neg b \leq' m$ і $b \in D$. Також, як було зазначено вище, $N \subseteq \{y \in X' \mid y \leq' M\} \vee N \subseteq \{y \in X' \mid y \leq' M'\}$.

Отже, в будь-якому випадку маємо суперечність з $\leq'$ -максимальністю елементу m в множині D . Таким чином, елементи M і M' є порівнюваними відносно $\leq'$, з чого випливає, що $M \approx M'$.

Тепер припустимо, що АПС $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною і конфлюентною. Доведемо, що АПС $(X, \rightarrow)$ є відкрито квазі-нормалізуючою і квазі-локально конфлюентною. З твердження 2.2.5 випливає, що $(X, \rightarrow)$ є квазі-нормалізуючою. Оскільки $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною, то для будь-якого $x \in X$ і для будь-яких $x', x'' \in X$, що є квазі-нормальними формами x виконується $x' \rightarrow^* x'' \wedge x'' \rightarrow^* x'$. З вищезазначеного випливає, що $(X, \rightarrow)$ є відкрито квазі-нормалізуючою. Також, $(X, \rightarrow)$ є квазі-локально конфлюентною АПС за твердженням 2.2.9. $\square$

2.2.4. Наслідки головного результату підрозділу та приклади

Наведені нижче твердження можуть розглядатись як наслідки з теореми 2.2.1.

Наслідок 2.2.1 (лема Ньюмана [145, 56]). *Кожна термінальна локально конфлюентна АПС є конфлюентною.*

Доведення. Випливає безпосередньо з теореми 2.2.1 і таких тверджень:

- термінальна АПС є строго індуктивною та ациклічною (твердження 2.2.3);
- термінальна АПС є відкрито квазі-нормалізуючою (твердження 2.2.7);
- локально конфлюентна ациклічна АПС є квазі-локально конфлюентною (твердження 2.2.11).

Слід зауважити, що доведення цих тверджень не спираються на (звичайну) лему Ньюмана. □

Наслідок 2.2.2. *Кожна локально конфлюентна АПС, що є строго індуктивною, ациклічною і скінченно-нормалізуючою, є конфлюентною.*

Доведення. Випливає безпосередньо з теореми 2.2.1 і таких тверджень:

- кожна скінченно-нормалізуюча АПС є відкрито квазі-нормалізуючою (твердження 2.2.8);
- кожна локально конфлюентна ациклічна АПС є квазі-локально конфлюентною (твердження 2.2.11).

□

Слід зауважити, що в загальному випадку, жодна з умов строгої індуктивності, відкритої квазі-нормалізації та квазі-локальної конфлюентності *не* може бути сама по собі вилучена з формулювання теореми 2.2.1:

1. з контрприкладу Ньюмана [56, рисунок 6a] випливає, що твердження “якщо $(X, \rightarrow)$ є індуктивною АПС, то $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною тоді і тільки тоді, коли $(X, \rightarrow)$ є відкрито квазі-нормалізуючою та квазі-локально конфлюентною” є хибним (контрприклад Ньюмана є індуктивним, скінченно-нормалізуючим, локально конфлюентним і ациклічним, тому за твердженнями 2.2.8 і 2.2.11 він є індуктивним, відкрито квазі-нормалізуючим, квазі-локально конфлюентним, але він не є конфлюентним);
2. з контрприкладу Хіндлі [56, рисунок 6b] випливає, що твердження “якщо $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною АПС, то $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною тоді і тільки тоді, коли $(X, \rightarrow)$ є відкрито квазі-нормалізуючою та локально конфлюентною” є хибним (контрприклад Хіндлі є скінченим, скінченно-нормалізуючим і локально конфлюентним, тому за твердженнями 2.2.4, 2.2.8

він є строго індуктивним, відкрито квазі-нормалізуючим, локально конфлюентним, але він не є конфлюентним);

3. твердження “якщо $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною АПС, то $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною тоді і тільки тоді, коли $(X, \rightarrow)$ є квазі-нормалізуючою та квазі-локально конфлюентною” також є хибним, що випливає з наведеного нижче прикладу 2.2.3.

Приклад 2.2.3. Розглянемо АПС $(P, \rightarrow)$, де $P = [0, 1] \times [0, 1]$ (де $[0, 1]$ позначає дійсний проміжок), а відношення редукції $\rightarrow$ визначене таким чином (де компоненти елементів P позначені як x і t):

$$(x, t) \rightarrow (x', t') \Leftrightarrow (x \leq x' \wedge t < t' \wedge x' - x \leq t' - t).$$

Тоді АПС $(P, \rightarrow)$ є строго індуктивною, квазі-локально конфлюентною, але не є конфлюентною. Тоді $(P, \rightarrow)$ не є відкрито квазі-нормалізуючою за теоремою 2.2.1, однак, $(P, \rightarrow)$ є квазі-нормалізуючою за твердженням 2.2.5. Таким чином, у даному прикладі можна пов’язати відсутність властивості конфлюентності з відсутністю властивості відкритої квазі-нормалізації. Описана АПС $(P, \rightarrow)$ проілюстрована на рисунку 2.4.

Зауваження 2.2.4. Одна з можливих інтерпретацій АПС $(P, \rightarrow)$ з прикладу 2.2.3 є такою. Розглянемо x як просторову координату, t як часову координату, P як підмножину простору-часу. Відношення

$$t < t' \wedge |x' - x| \leq t' - t,$$

яке також може бути виражене як

$$(t' - t) > 0 \wedge c^2(t' - t)^2 - (x' - x)^2 \geq 0,$$

де $c = 1$, є відношенням строгого причинного порядку [156] на $(1 + 1)$ вимірному просторі-часі Мінковського, тому редукція $(x, t) \rightarrow (x', t')$ є кон’юнкцією умови виконання цього відношення і умови $x \leq x'$, що обмежені на P .

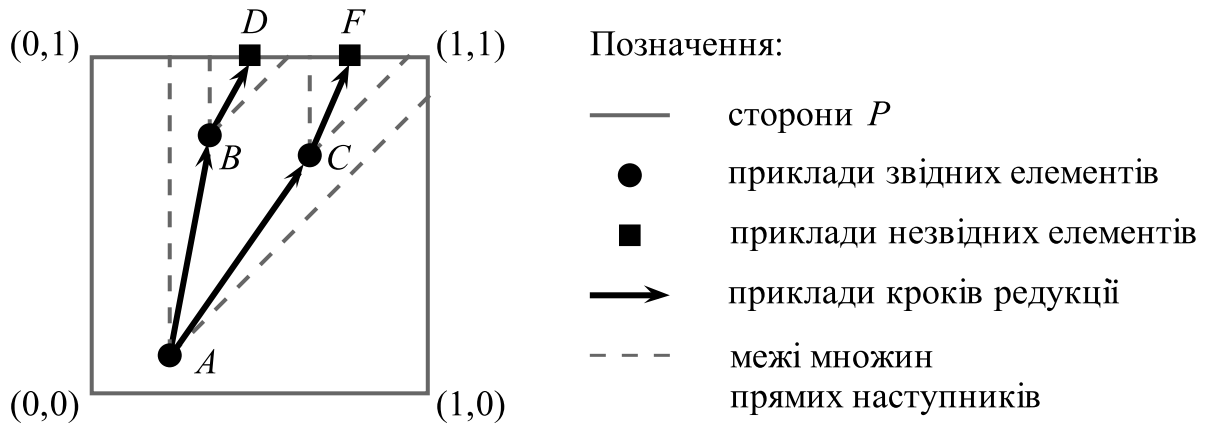


Рисунок 2.4 — Ілюстрація АПС $(P, \rightarrow)$ з прикладу 2.2.3 (горизонтальна вісь x , вертикальна вісь t).

Приклад 2.2.4. Розглянемо АПС $(X, \rightarrow)$, де $X = [0, 1] \times [0, 1]$ (де $[0, 1]$ позначає дійсний проміжок), а $\rightarrow \subseteq X \times X$ є таким відношенням, що для кожних елементів $x, y, x', y' \in [0, 1]$, відношення $(x, y) \rightarrow (x', y')$ виконується тоді і тільки тоді, коли

$$(x < x' \vee (x = x' \wedge y' < y \wedge (x < 1 \vee y < 1))) \wedge (x - y \leq x' - y') \wedge (x = y \Rightarrow x' = y') \wedge (x \leq y \Rightarrow x' \leq y').$$

Відношення $\rightarrow$ проілюстроване на рисунку 2.5 нижче.

З визначень випливає, що ця АПС є строго індуктивною та ациклічною, а $(1, 0), (1, 1)$ є єдиними незвідними елементами. Тоді за допомогою твердження 2.2.5 можна зробити висновок, що АПС $(X, \rightarrow)$ є скінченно-нормалізуючою, тому з твердження 2.2.8 і теореми 2.2.1 випливає, що для АПС $(X, \rightarrow)$ умови конфлюентності і квазі-локальної конфлюентності є еквівалентними. Щоб довести квазі-локальну конфлюентність, для кожної точки $a \in X$ достатньо обрати деяку множину S (наприклад, множину точок $p \in X$, таку, що $a \rightarrow^+ p$ і $d(a, p) \in (0, \varepsilon)$ для малого додатного числа ε , що може залежати від a , де d позначає відстань між точками), що задовольняє умову коініціальності з означення 2.2.8, і перевірити, що вона задовольняє умову 2-консистентності, тобто пари елементів в S можуть бути з'єднані за допомогою скінченних послідовностей редукцій, що можуть закінчуватись поза межами S . Слід зауважити, що дана АПС $(X, \rightarrow)$ є дійсно конфлюентною.

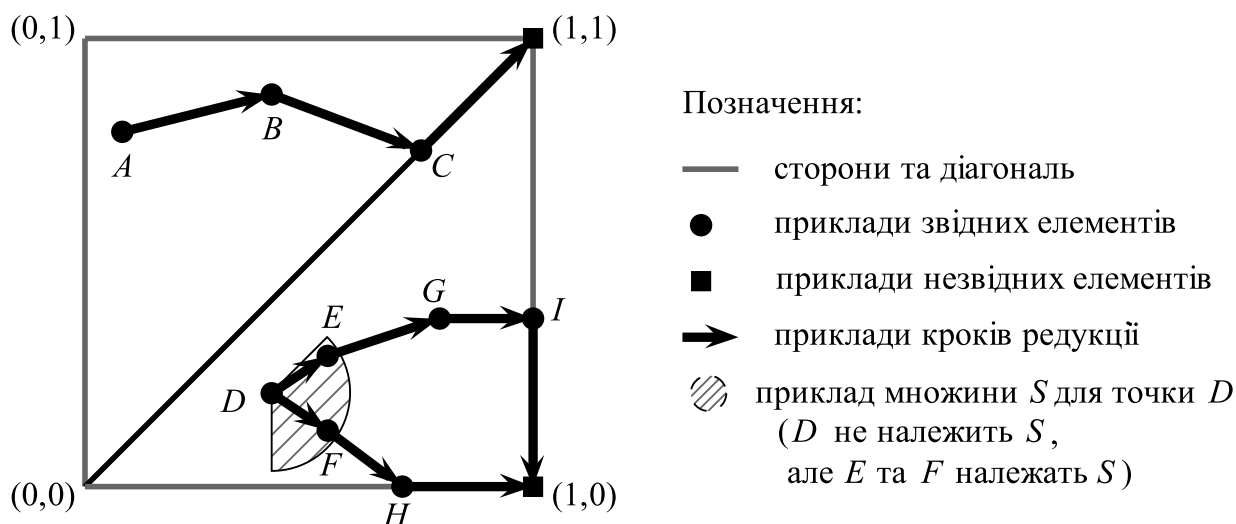


Рисунок 2.5 — Ілюстрація до прикладу 2.2.4. Елементами АПС є точки в $[0, 1] \times [0, 1]$. Відношення редукції $\rightarrow$ описане у прикладі 2.2.4. Горизонтальна вісь x , вертикальна вісь y . Більш детально ілюстрація описана в зауваженні 2.2.5.

Зауваження 2.2.5. Рисунок 2.5 може бути пояснений таким чином. Для точок над або на діагоналі єдиною нормальною формою є точка $(1, 1)$. Для точок, розташованих строго під діагоналлю єдиною нормальною формою є точка $(1, 0)$. Для такої АПС з властивості квазі-локальної конфлюентності випливає властивість конфлюентності. Напівформально, властивість квазі-локальної конфлюентності для цієї (ациклічної) АПС може бути перевірена шляхом перевірки того, що для кожної точки (x, y) (наприклад, (x, y) може бути точкою D на рисунку 2.5) існує множина S (наприклад, перетин множини $\{(x', y') \mid (x, y) \rightarrow^+ (x', y')\}$ із оточенням D), така, що для будь-яких двох точок з S (наприклад, точок E, F) є деякі скінченні послідовності редукцій, що починаються в них і закінчуються в одній і тій же точці (наприклад, $E \rightarrow G \rightarrow I \rightarrow (1, 0)$ і $F \rightarrow H \rightarrow (1, 0)$), і будь-яка точка, що є досяжною з точки (x, y) за допомогою непорожньої скінченної послідовності редукцій, може бути досягнута з деякого елементу S за допомогою скінченної (можливо порожньої) послідовності редукцій. Така множина S є узагальненням множини прямих наступників елементу, а вищезгадані умови можуть розглядатись як такі, що замінюють умову локальної конфлюентності.

Зауваження 2.2.6. Використовуючи процедуру поповнення частково-впорядкованих множин, що наведена у [134], теорема 2.2.1 може бути опосередковано застосована до АПС, які не є строго індуктивними.

Зауваження 2.2.7. Інші приклади АПС можуть бути отримані на основі відношень

досяжності на множинах станів різних (недетермінованих) динамічних моделей. Наприклад, розглянемо гібридний автомат [43], проілюстрований на рисунку 2.6.

Слід зауважити, що в багатьох джерелах наводиться простіший варіант такого автомату, що має один дискретний стан (дискретний стан 1 на рисунку 2.6), однак, модель з одним дискретним станом є детермінованою і має зенонівську поведінку [43] (напівформально, виконує нескінченно багато дискретних переходів протягом обмеженого проміжку неперервного часу). Для того, щоб врахувати, що така детермінована модель може не бути адекватною у випадку дуже коротких проміжків часу і дуже малих відстаней, у недетермінованій моделі на рисунку 2.6 введено новий дискретний стан [119] (дискретний стан 2, стан спокою) і недетермінований перехід між дискретними станами, що відбувається у невизначений момент, коли об'єкт припиняє рух. Наявність такого переходу не виключає зенонівські виконання, але дозволяє врахувати обмежену здатність моделі передбачати поведінку реального об'єкта [119] (слід зауважити, що це лише один з можливих підходів і що є інші підходи, що, наприклад, виключають зенонівські виконання [43, 119]).

З отриманою моделлю може бути асоційована АПС $(X, \rightarrow)$, така, що $X = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ і $(y_1, v_1) \rightarrow (y_2, v_2)$, якщо (y_2, v_2) може бути досягнуто з (y_1, v_1)

- або шляхом неперервного виконання межах одного дискретного стану,
- або внаслідок одного переходу між дискретними станами (з дискретного стану 1 до дискретного стану 1 або 2).

Перевірка виконання властивості конфлюентності для подібної АПС може бути здійснена у спосіб, аналогічний тому, що описаний у попередньому прикладі.

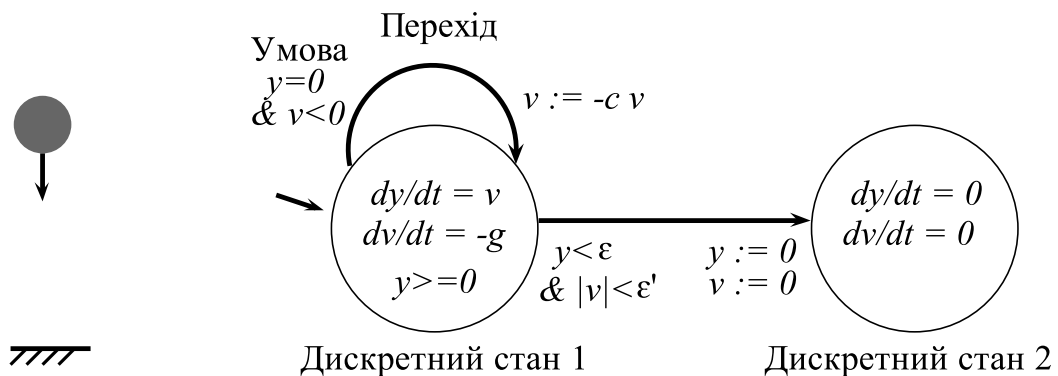


Рисунок 2.6 — Ілюстрація простої недетермінованої дискретно-неперервної моделі з двома дискретними станами. Тут t позначає час, y позначає поточне положення об'єкта, v позначає швидкість, $g, c, \epsilon, \epsilon'$ є константами.

2.2.5. Формалізація в системі інтерактивного доведення теорем

Нижче наведені формалізовані версії означень, необхідних для формулювання теореми 2.2.1 в системі Isabelle/HOL [57]. Ряд інших допоміжних формальних визначень, формальні версії тверджень 2.2.1-2.2.11 та тексти формальних доведень теореми 2.2.1 і тверджень 2.2.1-2.2.11 наведені за посиланням [76] у файлі для програмного забезпечення Isabelle [57].

Поняття АПС і конфлюентності АПС формалізовані у [76] таким чином.

— Definition 1: (X, σ) is an abstract rewriting system (ARS) with a single reduction relation

definition *is_ars* :: "'a set $\Rightarrow$ ('a $\Rightarrow$ 'a $\Rightarrow$ bool) $\Rightarrow$ bool"
 ("_,_ is ARS")

where "*X, σ is ARS* $\equiv (\forall x y. \sigma x y \longrightarrow x \in X \wedge y \in X)$ "

— Definition 4(1): (X, σ) is a confluent ARS

definition *is_confl_ars* ("_,_ is CONFLUENT ARS")

where "*X, σ is CONFLUENT ARS* $\equiv (X, \sigma \text{ is ARS}) \wedge$
 $(\forall a \in X. \forall b \in X. \forall c \in X. (\sigma^{**} a b \wedge \sigma^{**} a c \longrightarrow$
 $(\exists d \in X. \sigma^{**} b d \wedge \sigma^{**} c d)))$ "

Формальні визначення основних понять, пов'язаних з передпорядками у [76] наведені нижче.

— Definition 8(1): x is an upper bound of A (in preordered set (X, ρ))

abbreviation *is_upperbound* ::

"'a $\Rightarrow$ 'a set $\Rightarrow$ 'a set $\Rightarrow$ ('a $\Rightarrow$ 'a $\Rightarrow$ bool) $\Rightarrow$ bool"
 ("_ is anUPPER BOUND of _ in _,_")

where "*x is anUPPER BOUND of A in X, ρ* $\equiv x \in X \wedge (\forall a \in A. \rho a x)$ "

— Definition 8(2): x is a least element of A (in preordered set (X, ρ))

abbreviation *is_leastelem* ::

"'a $\Rightarrow$ 'a set $\Rightarrow$ 'a set $\Rightarrow$ ('a $\Rightarrow$ 'a $\Rightarrow$ bool) $\Rightarrow$ bool"
 ("_ is LEAST of _ in _,_")

where "*x is LEAST of A in X, ρ* $\equiv x \in A \wedge (\forall a \in A. \rho x a)$ "

— Definition 8(3): x is a least upper bound of A (in preordered set (X, ϱ))

definition *is_lub* ("_ is l.u.b. of _ in _,_")

where " x is l.u.b. of A in $X, \varrho \equiv (x$ is *LEAST* of $\{u. u$ is an *UPPER BOUND* of A in $X, \varrho\}$ in $X, \varrho)$ "

— Definition 9(1): A is a chain (in preordered set (X, ϱ))

definition *is_achain* ("_ is aCHAIN in _,_")

where " A is aCHAIN in $X, \varrho \equiv A \subseteq X \wedge (\forall x \in A. \forall y \in A. \varrho x y \vee \varrho y x)$ "

Топологія на передвпорядкованих множинах, необхідна для узагальненої леми Ньюмана формалізована у [76] таким чином.

— Definition 9(2): A is a closed subset (in preordered set (X, ϱ))

definition *is_cclosedset* ("_ is CLOSED SUBSET in _,_")

where " A is CLOSED SUBSET in $X, \varrho \equiv A \subseteq X \wedge$
 $(\forall C x. (C$ is aCHAIN in $X, \varrho) \wedge C \neq \{\}$ $\wedge$
 $(x$ is l.u.b. of C in $X, \varrho) \wedge C \subseteq A \longrightarrow x \in A)$ "

— Definition 9(3): A is an open subset (in preordered set (X, ϱ))

definition *is_copenset* ("_ is OPEN SUBSET in _,_")

where

" A is OPEN SUBSET in $X, \varrho \equiv A \subseteq X \wedge ((X-A)$ is CLOSED SUBSET in $X, \varrho)$ "

— Definition 9(4): A is relatively open in B w.r.t. preorder ϱ

definition *is_relopenset* ("_ is REL.OPEN SUBSET in _ wrt _")

where " A is REL.OPEN SUBSET in B wrt $\varrho \equiv$

A is OPEN SUBSET in $B, (\lambda x y. \varrho x y \wedge x \in B \wedge y \in B)$ "

Строго індуктивні АПС формалізовані у [76] таким чином.

— Definition 10: (X, ϱ) is a strictly inductive preordered set

definition *is_siprset* ("_,_ is S.I.PREORDERED")

where " X, ϱ is S.I.PREORDERED $\equiv$

$(\forall x \in X. \varrho x x) \wedge$

$$(\forall x \in X. \forall y \in X. \forall z \in X. \varrho \ x \ y \wedge \varrho \ y \ z \longrightarrow \varrho \ x \ z) \wedge$$

$$(\forall C. (C \text{ is aCHAIN in } X, \varrho) \wedge C \neq \{\} \longrightarrow (\exists x. (x \text{ is l.u.b. of } C \text{ in } X, \varrho)))"$$

— Definition 11(1): (X, σ) is a strictly inductive ARS

definition *is_si_ars* ("_,_ is S.I.ARS")

where " X, σ is S.I.ARS $\equiv (X, \sigma \text{ is ARS}) \wedge$
 $(X, (\sigma^{**}) \text{ is S.I.PREORDERED})$ "

Поняття, пов'язані з квазі-нормальними формами формалізовані у [76] таким чином.

— Definition 17(1): x is quasi-irreducible in (X, σ)

abbreviation *is_qirreduc* :: "'a $\Rightarrow$ 'a set $\Rightarrow$ ('a $\Rightarrow$ 'a $\Rightarrow$ bool) $\Rightarrow$ bool"
 ("_ is Q.IRREDUCIBLE in _,_")

where " x is Q.IRREDUCIBLE in $X, \sigma \equiv \forall y \in X. \sigma^{**} \ x \ y \longrightarrow \sigma^{**} \ y \ x$ "

— Definition 17(2): x' is a quasi-normal form of x in (X, σ)

definition *is_qnform* ("_ is Q.N.F. of _ in _,_")

where " x' is Q.N.F. of x in $X, \sigma \equiv$
 $x' \in X \wedge \sigma^{**} \ x \ x' \wedge (x' \text{ is Q.IRREDUCIBLE in } X, \sigma)"$

— Definition 17(3): x, x' are quasi-equivalent in (X, σ)

definition *are_qequiv* ("_,_ are QNF-EQUIVALENT in _,_")

where " x, x' are QNF-EQUIVALENT in $X, \sigma \equiv$
 $\{y \in X. y \text{ is Q.N.F. of } x \text{ in } X, \sigma\} = \{y \in X. y \text{ is Q.N.F. of } x' \text{ in } X, \sigma\}"$

— Definition 18(1): (X, σ) is a quasi-normalizing ARS

definition *is_qn_ars* ("_,_ is Q.N.ARS")

where " X, σ is Q.N.ARS $\equiv (X, \sigma \text{ is ARS}) \wedge$
 $(\forall x \in X. \exists x' \in X. (x' \text{ is Q.N.F. of } x \text{ in } X, \sigma))"$

— Definition 18(2): (X, σ) is an openly quasi-normalizing ARS

definition *is_oqn_ars* ("_,_ is O.Q.N.ARS")

where " X, σ is O.Q.N.ARS $\equiv (X, \sigma \text{ is Q.N.ARS}) \wedge$
 $(\forall x \in X. \forall x' \in X. (x' \text{ is Q.N.F. of } x \text{ in } X, \sigma) \longrightarrow$

$$(\{y \in X. \sigma^{**} x y \wedge (y, x' \text{ are QNF-EQUIVALENT in } X, \sigma)\} \\ \text{is REL.OPEN SUBSET in } \{y \in X. \sigma^{**} x y\} \text{ wrt } (\sigma^{**}))"$$

Умова квазі-локальної конфлюентності формалізована у [76] таким чином.

— A set S satisfies the two-consistency condition in ARS (X, σ)

definition *sat_two_consist_cond* ("_ sat.2-CONSISTENCY in _,_"")

where " S sat.2-CONSISTENCY in $X, \sigma \equiv (\forall b \in S. \forall c \in S. \\ \exists d \in X. \sigma^{**} b d \wedge \sigma^{**} c d)$ "

— A set S satisfies the coinitiality condition in ARS (X, σ) wrt. element a

definition *sat_coinit_cond* ("_ sat.COINITIALITY in _,_ wrt _")

where " S sat.COINITIALITY in X, σ wrt $a \equiv$

$$(\forall x \in X. \sigma^{++} a x \longrightarrow ((\sigma^{**} x a) \vee \\ (\exists b \in S. \sigma^{**} b x \wedge \neg (\sigma^{**} b a))))"$$

— Definition 24: (X, σ) is a quasi-locally confluent ARS

definition *is_qlconfl_ars* ("_,_ is Q.L.CONFLUENT ARS")

where " X, σ is Q.L.CONFLUENT ARS $\equiv (X, \sigma$ is ARS) $\wedge$

$$(\forall a \in X. \exists S \subseteq \{x \in X. \sigma^{++} a x\}.$$

$$(S \text{ sat.2-CONSISTENCY in } X, \sigma) \wedge (S \text{ sat.COINITIALITY in } X, \sigma \text{ wrt } a))"$$

Узагальнена лема Ньюмана формалізована у [76] таким чином.

theorem *thm_28*:

— Theorem 28 (main result, generalized Newman's lemma)

fixes $X \ \sigma$

assumes " X, σ is S.I.ARS"

shows " $(X, \sigma$ is CONFLUENT ARS) = $((X, \sigma$ is O.Q.N.ARS) $\wedge$ $(X, \sigma$ is Q.L.CONFLUENT ARS))"

2.3. Висновки до розділу 2

У підрозділі 2.1 було отримано узагальнення леми Ньюмана для ациклічних строго індуктивних систем зі зліченною множиною нормальних форм (теорема

2.1.1 наслідки з неї). Було доведено, що еквівалентність умов локальної конфлюентності і конфлюентності для ациклічних строго індуктивних АПС має місце, якщо множина незвідних елементів АПС є не більш ніж зліченною. Однак, при цьому, існує ациклічна, строго індуктивна, локально конфлюентна АПС, що не є конфлюентною (теорема 2.1.2). Остання АПС може розглядатись як посилення контрприкладу Ньюмана, однак вона є необхідно незліченною і суттєво відрізняється від звичайного контрприкладу Ньюмана (який є зліченим).

У підрозділі 2.2 було отримано третій основний результат дисертаційного дослідження – запропоновано узагальнення леми Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем (теорема 2.2.1). Звичайна лема Ньюмана для термінальних АПС [145, 56] може розглядатись як наслідок даної теореми (наслідок 2.2.1 з теореми 2.2.1).

Основні результати розділу було формалізовано та автоматичні перевірено за допомогою системи інтерактивного доведення теорем Isabelle [57]. Тексти формальних доказів доступні за посиланнями [84, 76].

РОЗДІЛ 3. ПРИНЦИПИ ІНДУКЦІЇ ДЛЯ СИСТЕМ, ЩО НЕ ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ ПРИПУЩЕННЯМ ПРО ТЕРМІНАЛЬНІСТЬ ТА ЗЛІЧЕННІСТЬ

3.1. Принцип індукції для вільних від алмазів повних частково впорядкованих множин

3.1.1. Попередні зауваження

З класичної теорії переписувальних систем відомо [56, 133], що АПС є термінальною тоді і тільки тоді, коли для неї виконується принцип нетерової індукції [133, пункт 1.3.15]. Даний факт є корисним для доведення універсальних властивостей елементів термінальних АПС. Однак АПС, породжені недискретними моделями часто не задовольняють умові термінальності. Тому для них принцип нетерової індукції не може бути застосованим і є актуальним пошук альтернативних принципів доведення універсальних властивостей елементів АПС, що не обов'язково є термінальними.

Як було вказано у підрозділі 2.2 (твердження 2.2.2), АПС є строго індуктивною і ациклічною тоді і тільки тоді, коли вона має коректний принцип відкритої індукції ([174], означення 2.2.4) і цей факт є безпосередньо пов'язаним з методом доведення універсальних властивостей елементів частково впорядкованих множин за індукцією (для будь-якої ациклічної АПС $(X, \rightarrow)$ пара $(X, \rightarrow^*)$ є частково впорядкованою множиною).

У зв'язку з цим у даному підрозділі буде більш детально розглянуто причину, через яку принцип відкритої індукції не є коректним для частково впорядкованих множин, що не є строго індуктивними (теорема 3.1.1, зворотний принцип відкритої індукції). Також, буде виділено підклас класу повних частково впорядкованих множин (клас вільних від алмазів повних частково впорядкованих множин), для якого буде сформульовано принцип індукції, у якому не використовується безпосередньо топологічне припущення з принципу відкритої індукції [174] (про відкритість множини або предикату). Такий принцип є більш близьким за формою до відомих принципів індукції для натуральних чисел, фундованої індукції і дійсної індукції [46, 19, 20]. Він також є зручним для використання у формалізаціях в системах інтерактивного доведення теорем. У наступному підрозділі 3.2 ідея вищезазначеної

ного принципу індукції для вільних від алмазів повних частково впорядкованих множин буде використана для отримання непрямого принципу індукції для класу всіх частково впорядкованих множин (або, відповідно, всіх ациклічних АПС).

Наведені у даному підрозділі і у решті розділу результати також описані у [75, 74, 73, 62, 63, 65, 60, 85].

3.1.2. Пов'язані роботи інших авторів

Пов'язаними з темою даного підрозділу і решти розділу є роботи, що стосуються принципів індукції для натуральних чисел, фундованої індукції, нетерової індукції, дійсної індукції, відкритої індукції [46, 19, 20, 174]. Інформація про історію принципів математичної індукції наведена в [46, 135]. Математична індукція має багато застосувань в інформатиці та математиці [46], в тому числі у формальних доведеннях, побудованих у системах інтерактивного доведення теорем [207], що можуть використовуватись для формальної верифікації програмного забезпечення [35].

Добре відомим є принцип індукції для натуральних чисел [46] (якщо P є предикатом на $\mathbb{N}_0$ – натуральних числах разом з нулем, значення $P(0)$ є істинним і $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ для кожного n , то $P(n)$ є істинним для всіх $n \in \mathbb{N}_0$). Варіанти формулювання цього принципу використовуються в аксіомах Пеано та арифметиці Пеано першого порядку [137]. В останньому випадку, принцип індукції може бути сформульовано як $\forall \bar{y} ((\varphi(0, \bar{y}) \wedge \forall x (\varphi(x, \bar{y}) \rightarrow \varphi(s(x), \bar{y}))) \rightarrow \forall x \varphi(x, \bar{y}))$ для кожної формули $\varphi(x, \bar{y})$ у мові арифметики Пеано, де s позначає операцію наступника (тобто $x+1$) і $\bar{y}$ є скороченням для $y_1, \dots, y_k$. Слід зауважити, що у деяких теоріях використання принципів індукції для доведення деяких тверджень є необхідним (наприклад [190], загальне твердження $x+y = y+x$ не може бути доведене в арифметиці Робінсона, що виключає принцип індукції, але може бути доведене в арифметиці Пеано, що включає його).

У деяких роботах, наприклад, [179, 193], пропонуються суттєві узагальнення вищезазначеного принципу індукції для натуральних чисел. Зокрема, у [179] розглядається як принцип індукції твердження про мінімальність F -алгебри (що узагальнює поняття алгебри) і розглядає принцип індукції для натуральних чисел як частковий випадок цього твердження: алгебра $A = (\mathbb{N}, 0, s)$, де s є функцією наступника, є мінімальною, тому будь-якою підалгеброю $A \in A$, і розгортаючи визначення підалгебри, якщо підмножина $S \subseteq \mathbb{N}$ містить 0 з A і є замкненою відносно s (з належності $n \in S$ випливає $s(n) \in S$), то $S = \mathbb{N}$. Іншим прикладом

є принцип індукції нерухомої точки [179, 194]: якщо p є перед-нерухомою точкою монотонної функції F на повній ґратці (тобто $F(p) \leq p$), то $x \leq p$, де x є найменшою нерухомою точкою F (така ґратка може розглядатись як категорія, перед-нерухомі точки як F -алгебри, а найменша нерухома точка як ініціальна F -алгебра [179, розділ 14]).

З іншого боку, у [193] найбільш загальними вважаються принципи нетерової і фундової індукції. У випадку частково впорядкованих множин, принцип фундової індукції може бути сформульований таким чином [174, 193]: нехай P є унарним предикатом на X , а $\leq$ є фундованим частковим порядком на X (кожна непорожня підмножина X має мінімальний елемент); припустимо, що для кожного елементу $x \in X$ виконується $(\forall y < x P(y)) \Rightarrow P(x)$; тоді $P(x)$ для всіх $x \in X$.

У роботах [20, 19, 102, 169] були запропоновані інші принципи індукції, що мають вигляд, відмінний від того, що був прийнятий у вищезазначених підходах. Наприклад, принцип дійсної індукції з [19, теорема 2] стверджує, що підмножина дійсного сегменту $S \subseteq [a, b]$ ($a < b$ є дійсними числами) збігається з усім сегментом $[a, b]$ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє такі 3 умови: (1) $a \in S$; (2) якщо $a \leq x < b$, то з $x \in S$ випливає $[x, y] \subseteq S$ для деякого $y > x$; (3) якщо $a < x \leq b$ і $[a, x) \subseteq S$, то $x \in S$ (цей принцип можна переформулювати в термінах предикату P на $[a, b]$, такого, що $P(x) \Leftrightarrow x \in S$; формулювання в термінах P іноді називають інтенсіональною формою принципу індукції [135], а формулювання в термінах множини S називають екстенсіональною формою [135]).

Ідея застосування умов (1)–(3) може бути проілюстрована таким чином. Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією. Розглянемо початкову задачу

$$\frac{dy}{dx} = 1 - xy + f(y)(1 - y), \quad y(0) = 1 \quad (3.1)$$

Покажемо, що якщо $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є диференційовною функцією, яка задовольняє (3.1), то $y(x) \geq 1$ для всіх $x \in [0, 1]$ (слід зауважити, що тут не стверджується, що така функція існує, або що вона є єдиною для даної функції f).

Спрощено, міркування проводяться таким чином [19, 20].

Нехай $S = \{x \in [0, 1] \mid y(x) \geq 1\}$.

База індукції. Нерівність $y(0) \geq 1$ виконується (тобто $0 \in S$).

Індукційний перехід. Нехай $x_0 \in [0, 1)$. Припустимо, що $y(x_0) \geq 1$.

– Якщо $y(x_0) > 1$, то (за неперервністю) $y(x) > 1$ для всіх x у деякому правому

півколі x_0 .

- Якщо $y(x_0) = 1$, то $y'(x_0) = 1 - x_0 \cdot 1 + f(1) \cdot 0 > 0$, тому $y(x) \geq y(x_0) = 1$ для всіх x у деякому правому півколі x_0 .

Таким чином, якщо $x \in [0, 1)$ і $x \in S$, то $[x, x_1] \subseteq S$ для деякого $x_1 > x$.

Крім того, якщо $x_0 \in (0, 1]$ і $[0, x_0) \subseteq S$, то $y(x) \geq 1$ для $x \in [0, x_0)$, тому $y(x_0) \geq 1$ (за неперервністю), звідки $x_0 \in S$.

З цього можна зробити висновок, що $S = [0, 1]$, тобто y приймає значення не менше 1, коли $x \in [0, 1]$. Слід зауважити, що доведення того факту, що $\forall x \in [0, 1] y(x) \geq 1$ не спирається на глобальну монотонність y : наприклад, якщо зафіксувати $f(y) \equiv 0$, то диференціальне рівняння в (3.1) стане лінійним, а його розв'язком, що задовольняє умові $y(0) = 1$ буде

$$y(x) = e^{-x^2/2} \left(1 + \sqrt{2} \int_0^{x/\sqrt{2}} e^{t^2} dt \right), \quad (3.2)$$

але можна перевірити, що ця функція *не* є монотонною на $[0, 1]$.

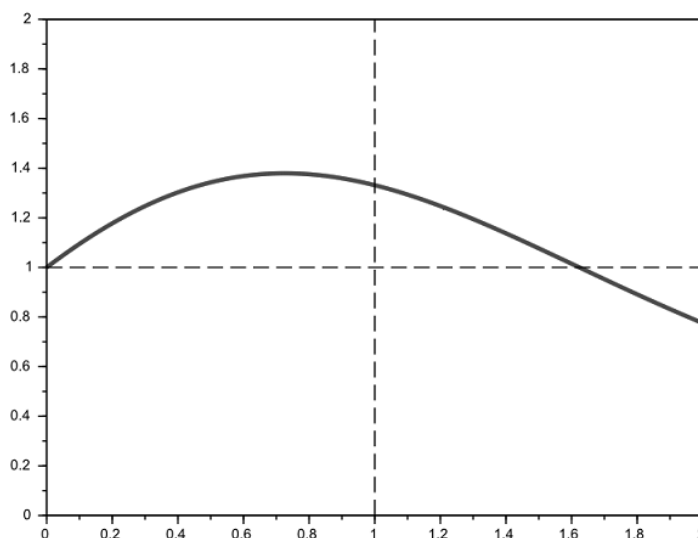


Рисунок 3.1 — Графік функції, визначеної рівнянням (3.2) для $x \in [0, 2]$.

Горизонтальна вісь x , вертикальна вісь y .

Інші приклади застосувань принципу дійсної індукції з [19, 20] можна отримати за допомогою результатів роботи [166] про аксіоматизацію інваріантності для звичайних диференціальних рівнянь, у якій використовується аксіома дійсної індукції, пов'язана зі згаданим вище принципом дійсної індукції.

3.1.3. Позначення

Будемо використовувати такі позначення для частково впорядкованої множини $(X, \leq)$:

- $<$ є строгим порядком, що відповідає $\leq$;
- $[a, b] = \{x \in X \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$;
- $[a, b) = \{x \in X \mid a \leq x \wedge x < b\}$;
- $\sup_{\leq} A$ позначає точну верхню межу підмножини $A \subseteq X$ в $(X, \leq)$.

Будемо казати, що передвпорядкована (в т.ч. частково впорядкована) множина $(X, \leq)$ є *вільною від алмазів* (англ. diamond-free) [18], якщо для всіх $a, b, c, d \in X$ виконується імплікація:

$$(a \leq b \leq d \wedge a \leq c \leq d) \Rightarrow (b \leq c \vee c \leq b).$$

3.1.4. Зворотний принцип відкритої індукції

У даному пункті запропонована теорема, що може розглядатись як зворотна до теореми Рауля про відкриту індукцію [174, теорема 3.3]. З неї випливає, що принцип відкритої індукції *не* є коректним для частково впорядкованих множин, що *не* є строго індуктивними. Формалізація дещо загальнішої версії цього результату в системі інтерактивного доведення теорем Isabelle доступна посиланням [76, формальна лема `lem_converse_open_ind`].

Нижче під *повною* частково впорядкованою множиною буде розумітися частково впорядкована множина, де кожна спрямована множина має точну верхню межу [174, 134, 21] (англ. directed complete partial order, dcpo). Слід зауважити, що тут *не* вимагається, щоб така множина мала найменший елемент.

Теорема 3.1.1 (зворотний принцип відкритої індукції). *Нехай $(X, \leq)$ є частково впорядкованою множиною. Припустимо, що єдиною відкритою множиною $S \subseteq X$ (в сенсі означення 2.2.3 в підрозділі 2.2), що задовольняє умову*

$$(1) \text{ для кожного } x \in X, \text{ якщо } \forall y \in X (x < y \Rightarrow y \in S), \text{ то } x \in S,$$

є сама множина X (тобто з того, що $S \subseteq X$, S відкрита і (1) випливає $S = X$).

Тоді $(X, \leq)$ є повною частково впорядкованою множиною.

Доведення. Припустимо, що $(X, \leq)$ *не* є повною частково впорядкованою множиною. Тоді з [134, наслідок 2 з теореми 1] випливає, що $(X, \leq)$ *не* є строго індуктивною [134, означення 1], тобто не всі непорожні ланцюги мають точну верхню межу. Тоді існує непорожній $\leq$ -ланцюг $C \subseteq X$, що не має супремуму в $(X, \leq)$.

Нехай C' є замиканням C (в сенсі означення 2.2.3). Нехай $S = X \setminus C'$. Доведемо, що S задовольняє умову (1) даної теореми.

Нехай $x \in X$. Припустимо, що виконується $\forall y \in X (x < y \Rightarrow y \in S)$. Припустимо, що $x \notin S$. Тоді $x \in C'$. Множина

$$\{\sup_{\leq} C'' \mid C'' \subseteq C, C'' \neq \emptyset \text{ і } C'' \text{ має супремум}\}$$

є замкненою. Тоді $x = \sup_{\leq} C''$ для деякого непорожнього $\leq$ -ланцюга $C'' \subseteq C$. Доведемо, що C і C'' є кофінальними множинами [174]. Нехай $c \in C$. Припустимо, що для кожного елементу $c'' \in C''$ нерівність $c < c''$ не виконується. Оскільки $C'' \subseteq C$, кожний елемент C'' є порівнюваним з c . Тоді c є верхньою межею C'' . Тоді $x \leq c$. Відношення $x < c$ не може виконуватись, оскільки з нього випливає, що $c \in S = X \setminus C'$, але $c \in C \subseteq C'$. Тому $x = c \in C$. Тоді кожний елемент $y \in C$, що задовольняє умову $x < y$ належить S . З цього випливає, що x є найбільшим елементом C . Тоді $x = \sup_{\leq} C$. Це суперечить припущенню, що C не має супремуму. Таким чином, існує елемент $c'' \in C''$, такий, що виконується $c < c''$. Оскільки елемент $c \in C$ є довільним, можемо зробити висновок, що C і C'' є кофінальними множинами. Тоді $x = \sup_{\leq} C$ і маємо суперечність з припущенням, що C не має супремуму. Таким чином, $x \in S$.

Тоді S задовольняє умову (1). Слід зауважити, що множина S є відкритою. Тоді $S = X$. Тоді $C' = \emptyset$ і маємо суперечність з тим, що C є непорожнім ланцюгом.

Таким чином, $(X, \leq)$ є повною частково впорядкованою множиною. $\square$

3.1.5. Головні результати підрозділу

Означення 3.1.1. Підмножина $S \subseteq X$ у частково впорядкованій множині $(X, \leq)$ називається *df-індуктивною*, якщо

- (1) для кожного $x \in X$, якщо $\forall y \in X (x < y \Rightarrow y \in S)$, то $x \in S$;
- (2) для кожних елементів $x \in X$ і $z \in S$, таких, що $x < z$ і $\sup_{\leq} [x, z) = z$ існує елемент $y \in [x, z)$, такий, що $[y, z) \subseteq S$.

Принцип індукції для вільних від алмазів повних частково впорядкованих множин надається наведеною нижче теоремою.

Теорема 3.1.2. Нехай $(X, \leq)$ є вільною від алмазів частково впорядкованою множиною. Тоді $(X, \leq)$ є повною частково впорядкованою множиною тоді і тільки тоді, коли єдиною df-індуктивною підмножиною множини X є сама множина X .

Доведення. Спочатку припустимо, що X є єдиною df-індуктивною підмножиною X і доведемо, що $(X, \leq)$ є повною частково впорядкованою множиною.

Доведемо, що кожна відкрита множина S (в сенсі означення 2.2.3 в підрозділі 2.2) задовольняє умову (2) означення 3.1.1. Нехай $S \subseteq X$ є відкритою множиною, а $x \in X$ і $z \in S$ є такими, що $x < z$ і $\sup_{\leq}[x, z) = z$. Припустимо, що для кожного $y \in [x, z)$ маємо $[y, z) \setminus S \neq \emptyset$. Тоді множини $[x, z)$ і $[x, z) \setminus S$ є кофінальними [174]. Позначимо $C = [x, z) \setminus S$. Тоді $\sup_{\leq} C = z \in S$. Крім того, C є $\leq$ -ланцюгом, оскільки $[x, z) \setminus S \subseteq [x, z]$ і $(X, \leq)$ є вільною від алмазів. Оскільки S є відкритою множиною, то $C \cap S \neq \emptyset$. Тоді маємо суперечність з визначенням $C = [x, z) \setminus S$. Таким чином, існує елемент $y \in [x, z)$, такий, що $[y, z) \subseteq S$.

Таким чином, X є єдиною відкритою підмножиною X , що задовольняє умову (1) означення 3.1.1. Тоді $(X, \leq)$ є повною частково впорядкованою множиною за теоремою 3.1.1.

Тепер припустимо, що $(X, \leq)$ є вільною від алмазів повною частково впорядкованою множиною і доведемо, що X є єдиною df-індуктивною підмножиною множини X .

Слід зауважити, що множина $S = X$ задовольняє умови (1), (2) означення 3.1.1, тому вона є df-індуктивною. Нехай $S \subseteq X$. Припустимо, що S є df-індуктивною. Доведемо, що $S = X$.

Спочатку, доведемо, що S є відкритою множиною.

Нехай C є непорожнім $\leq$ -ланцюгом, таким, що $\sup_{\leq} C = z \in S$.

Доведемо, що $C \cap S \neq \emptyset$. Без втрати загальності, припустимо, що $z \notin C$. Нехай x є деяким елементом ланцюга C . Слід зауважити, що $x < z$.

Нехай $C_1 = \{y \in C \mid x \leq y\}$. Тоді C_1 є непорожнім $\leq$ -ланцюгом. Крім того, C і C_1 є кофінальними множинами, тому $\sup_{\leq} C_1 = z$. Оскільки $z \notin C$, то маємо $C_1 \subseteq [x, z)$.

Нехай $y \in [x, z)$. Оскільки $\sup_{\leq} C_1 = z$, то y не є верхньою межею C_1 . Тоді існує елемент $c \in C_1$, такий, що $c \leq y$ не виконується. Слід зауважити, що c і y є порівнюваними, оскільки $c, y \in [x, z]$ і $(X, \leq)$ є вільною від алмазів. Тоді $y < c$.

Оскільки елемент y є довільним, то множини C_1 і $[x, z)$ є кофінальними. Тоді $\sup_{\leq}[x, z) = z$.

Тоді з умови (2) означення 3.1.1, випливає, що існує елемент $y \in [x, z)$, такий, що $[y, z] \subseteq S$. Оскільки $x \leq y < z$ і $\sup_{\leq} C = z$, то існує елемент $c \in C \cap [x, z]$, такий, що $c \leq y$ не виконується. Слід зауважити, що c і y є порівнюваними,

оскільки $c, y \in [x, z]$ і $(X, \leq)$ є вільною від алмазів. Тоді $y < c$, тому $c \in [y, z] \subseteq S$ і $C \cap S \neq \emptyset$.

Оскільки ланцюг C є довільним, маємо, що S є відкритою множиною в $(X, \leq)$. З умови (1) означення 3.1.1, випливає, що S є множиною елементів, що мають індуктивну властивість в сенсі [174, твердження 1.2].

Тоді $S = X$ за принципом відкритої індукції з [174]. $\square$

Зауваження 3.1.1. Умови (1), (2) означення 3.1.1 можуть бути виражені формулами першого порядку в сигнатурі, що включає символи для предикату належності множині S і відношення $\leq$. Також, умова (1) означення 3.1.1 відповідає формулюванню принципу нетерової індукції.

Зауваження 3.1.2. Теорема 3.1.2 може бути переформульована для ациклічних АПС $(X, \rightarrow)$, вважаючи, що $\leq \in \rightarrow^*$.

Зауваження 3.1.3. Теорема 3.1.2 є застосовною до лінійно впорядкованих множин. У спеціальному випадку, коли X є дійсним проміжком $[0, 1]$ і $\leq \in$ обмеженням порядку, оберненого до звичайного порядку на дійсних числах, $(X, \leq)$ є повною лінійно впорядкованою множиною і з теореми 3.1.2 випливає, що $[0, 1]$ є єдиною підмножиною $S \subseteq [0, 1]$, що задовольняє умови (1)-(2) означення 3.1.1, де (1)-(2) є еквівалентними твердженню про те, що S є індуктивною підмножиною $[0, 1]$ у сенсі роботи [19] про принцип дійсної індукції.

Нижче буде надане узагальнення теореми 3.1.2.

Означення 3.1.2. Якщо $(X, \leq)$ є частково впорядкованою множиною, ланцюг c в A буде називатись *насиченим вниз*, якщо

- c є насиченим, тобто для всіх $a, b \in c$ і $x \in X$, таких, що $a \leq x \leq b$, якщо $c \cup \{x\}$ є ланцюгом в $(X, \leq)$, то $x \in c$;
- c містить всі його нижні межі, тобто $\forall x \in X ((\forall y \in c x \leq y) \Rightarrow x \in c)$.

Будемо позначати як $\mathcal{C}(A)$ або $\mathcal{C}(X, \leq)$ множину всіх насичених вниз ланцюгів у частково впорядкованій множині $A = (X, \leq)$.

Означення 3.1.3. Підмножина $S \subseteq X$ у частково впорядкованій множині $(X, \leq)$ називається *загальною індуктивною відносно підмножини $S' \subseteq \mathcal{C}(X, \leq)$* , якщо виконуються такі умови:

1. якщо $c \in S'$ і x є найбільшим елементом c , то $x \in S$;
2. якщо $a \in \mathcal{C}(X, \leq)$ і $\forall b \in \mathcal{C}(X, \leq) (a \subset b \Rightarrow b \in S')$, то $a \in S'$;

3. якщо $c \in S'$ не має найбільшого елементу, то існує елемент $a \in \mathcal{C}(X, \leq)$, такий, що $a \subset c$ і

$$\forall b \in \mathcal{C}(X, \leq) (a \subseteq b \subseteq c \Rightarrow b \in S').$$

Лема 3.1.1. Нехай $A = (X, \leq)$ є частково впорядкованою множиною, $S \subseteq X$ і $S' \subseteq \mathcal{C}(A)$. Якщо S є загально індуктивною відносно S' , то $S = X$.

Доведення. Припустимо, що S є загально індуктивною відносно S' .

Слід зауважити, що $\mathcal{C}(A) \neq \emptyset$, оскільки $(X, \leq)$ має деякий максимальний ланцюг і кожний максимальний ланцюг є насиченим вниз.

Доведемо, що $(\mathcal{C}(A), \subseteq)$ є повною частково впорядкованою множиною (тут $\subseteq$ позначає звуження включення на $\mathcal{C}(A) \times \mathcal{C}(A)$). Нехай C є непорожнім $\subseteq$ -ланцюгом у $\mathcal{C}(A)$ і $a = \bigcup_{c \in C} c$. Тоді a є $\leq$ -ланцюгом. Якщо для деяких елементів $x, y \in a$ і $z \in X \setminus \{a\}$ виконується відношення $x < z < y$, а $a \cup \{z\}$ є $\leq$ -ланцюгом, то існує елемент $c \in C$, такий, що $x, y \in c$ і $x < z < y$. Крім того, $c \cup \{z\}$ є $\leq$ -ланцюгом і $z \in X \setminus \{c\}$, тому c не є насиченим в $(X, \leq)$, що суперечить припущенню про те, що $C \in \mathcal{C}(A)$. Таким чином, a є насиченим. Якщо x є нижньою межею a в $(X, \leq)$, то x є нижньою межею деякого $c \in C$ (оскільки $C \neq \emptyset$), тому $x \in c$ (оскільки c є насиченим вниз), звідки $x \in a$. Таким чином, a є насиченим вниз і $a \in \mathcal{C}(A)$. Таким чином, у $\mathcal{C}(A)$ кожний непорожній $\subseteq$ -ланцюг має точну верхню межу. Тоді $(\mathcal{C}(A), \subseteq)$ є повною частково впорядкованою множиною.

Покажемо, що якщо $a, b, c \in \mathcal{C}(A)$ і $a \subseteq c, b \subseteq c$, то для всіх $x \in a$ і $y \in b$ з умови $x \leq y$ випливає, що $x \in b$. Нехай $a, b, c \in \mathcal{C}(A)$, $a \subseteq c, b \subseteq c, x \in a, y \in b$ і $x \leq y$. Якщо x є нижньою межею b , то $x \in b$, оскільки b є насиченим вниз. Якщо x не є нижньою межею b , то існує елемент $z \in b$, такий, що $x \leq z$ не виконується. Тоді $z < x$, оскільки $x, y \in c$. Тоді $x \in b$, оскільки $z, y \in b, z < x \leq y, b \cup \{x\} \subseteq c$ є ланцюгом і b є насиченим.

Аналогічно, якщо $a, b, c \in \mathcal{C}(A)$ і $a \subseteq c, b \subseteq c$, то для всіх $x \in a$ і $y \in b$ з умови $y \leq x$ випливає, що $y \in a$.

Покажемо, що якщо $a, b, c \in \mathcal{C}(A)$ і $a \subseteq c$ і $b \subseteq c$, то a і b є $\subseteq$ -порівнювані. Нехай $a, b, c \in \mathcal{C}(A)$ і $a \subseteq c, b \subseteq c$. Розглянемо такі випадки:

1. a містить верхню межу b . Тоді існує елемент $x \in a$, такий, що $y \leq x$ для всіх $y \in b$. Як було показано вище, $y \in a$ для всіх $y \in b$. Таким чином, $b \subseteq a$.
2. a не містить верхньої межі b . Тоді для кожного $x \in a$ існує елемент $y \in b$,

такий, що $y \leq x$ не виконується, а тому $x \leq y$, оскільки $x, y \in c$ і c є ланцюгом, звідки $x \in b$. Таким чином, $a \subseteq b$.

Тоді $a, b \in \subseteq$ -порівнювані. Таким чином, $(\mathcal{C}(A), \subseteq)$ є вільним від алмазів.

З умови 2 означення 3.1.3 для S і S' випливає, що умова 1 означення 3.1.1 виконується для частково впорядкованої множини $(\mathcal{C}(A), \subseteq)$ і підмножини S' .

Покажемо, що умова 2 означення 3.1.1 виконується для $(\mathcal{C}(A), \subseteq)$ і підмножини S' . Нехай $a \in \mathcal{C}(A)$ і $c \in S'$ є такими елементами, що $a \subset c$ і c є точною верхньою межею множини $\{b' \in \mathcal{C}(A) \mid a \subseteq b' \subset c\}$ в $(\mathcal{C}(A), \subseteq)$. Покажемо, що існує елемент $b \in \mathcal{C}(A)$, такий, що $a \subseteq b \subset c$ і $\{b' \in \mathcal{C}(A) \mid b \subseteq b' \subset c\} \subseteq S'$. Позначимо $U = \{b' \in \mathcal{C}(A) \mid a \subseteq b' \subset c\}$. Слід зауважити, що $U \neq \emptyset$ і $\bigcup U \in \mathcal{C}(A)$, тому $c = \bigcup U$. Оскільки $X \neq \emptyset$, а множина $\emptyset$ не містить всіх її нижніх меж, то $\emptyset \notin \mathcal{C}(A)$. Тоді c не є одноелементною множиною.

Доведемо, що c не має найбільшого елемента. Припустимо, що c має найбільший елемент t . Нехай $b' \in \mathcal{C}(A)$ і $b' \subset c$. Припустимо, що $t \in b'$. Нехай $x \in c$. Тоді $x \leq t$. Тоді, як було показано вище, оскільки $c \subseteq c$, $b' \subseteq c$, $x \in c$, $t \in b'$ і $x \leq t$, то маємо $x \in b'$. Таким чином, $c \subseteq b'$, що суперечить тому факту, що $b' \subset c$. Таким чином, $t \notin b'$. Отже, $t \notin \bigcup U$. Це суперечить тому факту, що $c = \bigcup U$. Таким чином, c не має найбільшого елемента.

Тоді з умови 3 означення 3.1.3 випливає, що існує елемент $a' \in \mathcal{C}(A)$, такий, що $a' \subset c$ і $\forall b' \in \mathcal{C}(A) (a' \subseteq b' \subseteq c \Rightarrow b' \in S')$. Тоді $a' \subseteq c$ і $a \subseteq c$, тому, як було показано вище, a і a' є $\subseteq$ -порівнюваними. Розглянемо такі випадки:

1. $a' \subseteq a$. Нехай $b = a$. Тоді $b \in \mathcal{C}(A)$, $a \subseteq b \subset c$. Крім того, $\{b' \in \mathcal{C}(A) \mid b \subseteq b' \subset c\} \subseteq S'$, оскільки, якщо $b' \in \mathcal{C}(A)$ і $b \subseteq b' \subset c$, то $a' \subseteq b \subseteq b' \subseteq c$, звідки $b' \in S'$.
2. $a \subseteq a'$. Нехай $b = a'$. Тоді $b \in \mathcal{C}(A)$, $a \subseteq b \subset c$. Крім того, $\{b' \in \mathcal{C}(A) \mid b \subseteq b' \subset c\} \subseteq S'$, оскільки, якщо $b' \in \mathcal{C}(A)$ і $b \subseteq b' \subset c$, то $a' \subseteq b \subseteq b' \subseteq c$, звідки $b' \in S'$.

В обох випадках існує елемент $b \in \mathcal{C}(A)$, такий, що $a \subseteq b \subset c$ і виконується включення $\{b' \in \mathcal{C}(A) \mid b \subseteq b' \subset c\} \subseteq S'$.

Таким чином, $S' = \mathcal{C}(A)$ за теоремою 3.1.2. Слід зауважити, що для кожного елемента $x \in X$ існує максимальний ланцюг c в $(X, \leq)$, такий, що $x \in c$, і, крім того, $c \cap \{y \in X \mid y \leq x\}$ є насиченим вниз ланцюгом, таким, що x є його найбільшим елементом. Тоді $S = X$, оскільки множина S є загально індуктивною відносно $S' = \mathcal{C}(A)$. □

Означення 3.1.4. У частково-впорядкованій множині $(X, \leq)$ виконується *загальний принцип індукції*, якщо для будь-яких $S \subseteq X$ та $S' \subseteq \mathcal{C}(X, \leq)$, якщо S є загальною індуктивною відносно S' , то $S = X$.

Означення 3.1.5. У АПС $(X, \rightarrow)$ виконується *загальний принцип індукції*, якщо $(X, \rightarrow^*)$ є частково-впорядкованою множиною та у $(X, \rightarrow^*)$ виконується загальний принцип індукції.

Теорема 3.1.3. У будь-якій частково-впорядкованій множині виконується загальний принцип індукції.

Доведення. Випливає безпосередньо з леми 3.1.1. □

Наслідок 3.1.1. У будь-якій ациклічній АПС виконується загальний принцип індукції.

З теореми 3.1.3 можуть бути отримані спеціальні принципи індукції для доведення універсальних властивостей елементів конкретних впорядкованих структур або АПС. Більш детально це буде розглянуто у підрозділі 3.2.

Приклад 3.1.1. Нехай $(X, \leq)$ є множиною цілих чисел $\mathbb{Z}$ зі звичайним лінійним порядком на них. Зафіксуємо множину

$$S' = \{\{y \in X \mid y \leq x\} \mid x \in S\} \cup \{X\}.$$

Тоді умова загальної індуктивності множини $S \subseteq X$ відносно S' зводиться до таких:

- $((\forall b > a \ b \in S) \Rightarrow a \in S)$, що відповідає припущенню принципу нетерової індукції;
- $\exists a \in X \ \forall x \geq a \ x \in S$ – додаткова умова (база індукції), необхідна, оскільки у $(X, \leq)$ не виконується принцип нетерової індукції.

Таким чином, для доведення того, що предикат $P(x)$, такий, що $P(x) \Leftrightarrow (x \in S)$, є істинним на всіх елементах X , достатньо довести:

$$((\forall b > a \ b \in S) \Rightarrow a \in S) \wedge (\exists a \in X \ \forall x \geq a \ x \in S).$$

Приклад 3.1.2. Нехай $(X, \leq)$ є проміжком дійсних чисел $[0, 1]$ зі звичайним порядком. Зафіксуємо множину

$$S' = \{[0, x] \mid x \in S\} \cup \{[0, x) \mid x \in S \wedge x > 0\}.$$

Тоді умова загальної індуктивності множини $S \subseteq X$ відносно S' зводиться до таких:

- $\forall x \in [0, 1] ((x, 1] \subseteq S \Rightarrow x \in S)$;
- $\forall x \in (0, 1] (x \in S \Rightarrow \exists y < x [y, x] \subseteq S)$.

Дані умови відповідають припущенням принципу дійсної індукції [19], застосованому до $([0, 1], \leq^{-1})$, тобто до $[0, 1]$ з порядком, оберненим до звичайного.

3.1.6. Принцип поповнення

Однією з умов застосовності теореми 3.1.2 для доведення тверджень вигляду $\forall x P(x)$ у $(X, \leq)$ є повнота $(X, \leq)$. Якщо $(X, \leq)$ не є повною, можна розглянути пов'язану з нею повну (поповнену) частково впорядковану множину і застосувати принцип індукції до неї.

Слід зауважити, що деякі конструкції поповнення не є придатними для такого застосування (наприклад, поповнення Дедекінда-МакНейла [18]), оскільки вони можуть не забезпечувати виконання умови зазначеної теореми.

У цьому пункті описано підхід до побудови вільної від алмазів повної передвпорядкованої множини на основі заданої вільної від алмазів частково впорядкованої множини, що має властивість супремуму (кожна непорожня підмножина, що має верхню межу, має точну верхню межу), але яка не обов'язково є повною частково впорядкованою множиною. Результат поповнення може бути використаний з теоремою 3.1.2 або з принципом індукції dfinduct2 для вільних від алмазів повних вниз передвпорядкованих множин, що буде розглядатись у пункті 3.1.7.

Нехай $X \neq \emptyset$ і $(X, \leq)$ є частково впорядкованою множиною. Будемо казати, що $(X, \leq)$ має властивість супремуму, якщо кожна непорожня підмножина X , що має верхню межу в $(X, \leq)$, має точну верхню межу в $(X, \leq)$.

Нехай $C_{\leq}^*(X)$ є множиною всіх максимальних (за включенням) ланцюгів у $(X, \leq)$, які не мають максимального елементу.

Нехай $\mathcal{X} = (\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times C_{\leq}^*(X))$ і $\leq_{\mathcal{X}}$ є бінарним відношенням на $\mathcal{X}$, таким, що $(i, x) \leq_{\mathcal{X}} (j, y)$ тоді і тільки тоді, коли одна з таких умов виконується:

- $i = j = 0$ і $x \leq y$;
- $i = 0, j = 1$ і існує елемент $y' \in y$, такий, що $x \leq y'$;
- $i = j = 1$ і x, y є кофінальними підмножинами в $(X, \leq)$ [174].

Лема 3.1.2. *Якщо $(X, \leq)$ є вільною від алмазів частково впорядкованою множиною, то $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$ є вільною від алмазів передвпорядкованою множиною.*

Доведення. Припустимо, що $(X, \leq)$ є вільною від алмазів. Слід зауважити, що $\leq_X$ є рефлексивним відношенням. Крім того, якщо $(i, x) \leq_X (j, y) \leq_X (k, z)$, де $i, j, k \in \{0, 1\}$, $x, y, z \in X \cup C_{\leq}^*(X)$, то має місце один з таких випадків.

1. $i = j = k = 0$. Тоді $(i, x) \leq_X (k, z)$, оскільки $\leq$ є транзитивним відношенням.
2. $i = j = k = 1$. Тоді x, y і y, z є кофінальними множинами, тому x, z є кофінальними множинами.
3. $i = 0, j = k = 1$. Тоді $x \in X$, y, z є кофінальними множинами, і існує елемент $y' \in y$, такий, що $x \leq y'$. Тоді існує елемент $z' \in z$, такий, що $y' \leq z'$, тому $x \leq z'$. Таким чином, $(i, x) \leq_X (k, z)$ виконується.
4. $i = j = 0$ і $k = 1$. Тоді $x \leq y$ і існує елемент $z' \in z$, такий, що $y \leq z'$, тому $x \leq z'$ і $(i, x) \leq_X (k, z)$ виконується.

Таким чином, $\leq_X$ є транзитивним відношенням.

Тоді $(\mathcal{X}, \leq_X)$ є передвпорядкованою множиною. Доведемо, що $(\mathcal{X}, \leq_X)$ є вільною від алмазів.

Нехай $(i, a), (j, b), (k, c), (l, d) \in \mathcal{X}$, де $i, j, k, l \in \{0, 1\}$, $a, b, c, d \in X \cup C_{\leq}^*(X)$. Припустимо, що $(i, a) \leq_X (j, b)$, $(i, a) \leq_X (k, c)$ і $(j, b) \leq_X (l, d)$, $(k, c) \leq_X (l, d)$. Можливі такі випадки:

1. $l = 0$. Тоді $i = j = k = 0$ і $a \leq b$, $a \leq c$, $b \leq d$, $c \leq d$, звідки $b \leq c$ або $c \leq d$, оскільки $(X, \leq)$ є вільною від алмазів, тому $(j, b) \leq_X (k, c)$ або $(k, c) \leq_X (j, b)$.
2. $i = 1$. Тоді $j = k = l = 1$ і b, d є кофінальними множинами і c, d є кофінальними множинами. Тоді b, c є кофінальними множинами, звідки $(j, b) \leq_X (k, c)$.
3. $i = 0$ і $l = 1$. Тоді можливі такі підвипадки:
 - $j = 1$. Тоді b, d є кофінальними множинами, тому $(l, d) \leq_X (j, b)$, тому $(k, c) \leq_X (j, b)$ за транзитивністю $\leq_X$ (показаною вище).
 - $k = 1$. Тоді c, d є кофінальними множинами, тому $(l, d) \leq_X (k, c)$, тому $(j, b) \leq_X (k, c)$ за транзитивністю $\leq_X$ (показаною вище).
 - $j = k = 0$. Тоді $a \leq b$, $a \leq c$, $d \in C_{\leq}^*(X)$ і існують елементи $d', d'' \in d$, такі, що $b \leq d'$ і $c \leq d''$. Крім того, $d' \leq d''$ або $d'' \leq d'$, оскільки d є $\leq$ -ланцюгом. Тоді за транзитивністю відношення $\leq$, виконується або $a \leq b \leq d''$ і $a \leq c \leq d''$, або $a \leq b \leq d'$ і $a \leq c \leq d'$. Слід зауважити, що $a, b, c, d', d'' \in X$ і $(X, \leq)$ є вільною від алмазів, тому b і c є $\leq$ -

порівнюваними. Тоді $(j, b) \leq_{\mathcal{X}} (k, c)$ або $(k, c) \leq_{\mathcal{X}} (j, b)$.

Отже, $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$ є вільною від алмазів передвпорядкованою множиною. $\square$

Лема 3.1.3. Припустимо, що $(X, \leq)$ є вільною від алмазів частково впорядкованою множиною. Нехай C_1, C_2 є ланцюгами у $(X, \leq)$ і $\forall x \in C_1 \exists y \in C_2 x \leq y$. Тоді для кожного елементу $x_0 \in X$ множина $\{x \in C_1 \cup C_2 \mid x_0 \leq x\}$ є ланцюгом в $(X, \leq)$.

Доведення. Нехай $x_0 \in X$. Нехай $a, b \in C_1 \cup C_2$ є такими елементами, що $x_0 \leq a$ і $x_0 \leq b$. Доведемо, що $a, b \in \leq$ -порівнюваними. Без втрати загальності, припустимо, що $a \in C_1$ і $b \in C_2$. За припущенням, для елементу a існує елемент $y \in C_2$, такий, що $a \leq y$. Нехай y' є $\leq$ -найбільшим елементом множини $\{b, y\}$ (який існує, оскільки C_2 є ланцюгом). Тоді $x_0 \leq b \leq y'$ і $x_0 \leq a \leq y \leq y'$, тому a і $b \in \leq$ -порівнюваними, оскільки $(X, \leq)$ є вільною від алмазів.

Таким чином, $\{x \in C_1 \cup C_2 \mid x_0 \leq x\}$ є ланцюгом в $(X, \leq)$. $\square$

Конструкція поповнення описана у наведеній нижче теоремі.

Теорема 3.1.4. Якщо $(X, \leq)$ є вільною від алмазів повною частково впорядкованою множиною, що має властивість супремуму, то $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$ є вільною від алмазів повною передвпорядкованою множиною.

Доведення. Припустимо, що $(X, \leq)$ є вільною від алмазів повною частково впорядкованою множиною, що має властивість супремуму. За лемою 3.1.2 $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$ є вільною від алмазів передвпорядкованою множиною.

Нехай $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$ є непорожнім $\leq_{\mathcal{X}}$ -ланцюгом. Доведемо, що $\mathcal{C}$ має точну верхню межу в $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$. Можливі такі два випадки.

Випадок 1. Існує елемент $c \in C_{\leq}^*(X)$, такий, що $(1, c) \in \mathcal{C}$. Тоді з визначення відношення $\leq_{\mathcal{X}}$ випливає, що $(1, c) \in \leq_{\mathcal{X}}$ -найбільшим елементом у $\mathcal{C}$, оскільки $\mathcal{C}$ є $\leq_{\mathcal{X}}$ -ланцюгом. Тоді $\mathcal{C}$ має супремум в $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$.

Випадок 2. $\mathcal{C} \subseteq \{0\} \times X$. Нехай $c = \{x \in X \mid (0, x) \in \mathcal{C}\}$. Тоді c є непорожнім $\leq$ -ланцюгом, оскільки $\mathcal{C}$ є непорожнім $\leq_{\mathcal{X}}$ -ланцюгом.

Розглянемо такі два підвипадки.

Підвипадок 2.1: c має верхню межу в $(X, \leq)$. Тоді c є непорожньою, обмеженою згори підмножиною в $(X, \leq)$, тому c має точну верхню межу в $(X, \leq)$ за властивістю супремуму. Позначимо цю точну верхню межу як x^* . Тоді $(0, x^*) \in \mathcal{X}$ є верхньою межею ланцюга $\mathcal{C}$ в $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$, оскільки $\mathcal{C} \subseteq \{0\} \times X$.

Доведемо, що $(0, x^*)$ є точною верхньою межею ланцюга $\mathcal{C}$ в $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$.

Нехай (i, x) є верхньою межею C в $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$. Покажемо, що $(0, x^*) \leq_{\mathcal{X}} (i, x)$.

Якщо $i = 0$, то $x \in X$ і $(0, x') \leq_{\mathcal{X}} (0, x)$ для всіх елементів $x' \in c$, звідки x є верхньою межею c в $(X, \leq)$, тому $x^* \leq x$ і $(0, x^*) \leq_{\mathcal{X}} (i, x)$.

Розглянемо випадок, коли $i = 1$.

Спочатку припустимо, що немає пари (a_0, x_0) , такої, що $a_0 \in c$, $x_0 \in x$ і $x_0 \leq a_0$. Нехай a'_0 є деяким елементом c (який існує, оскільки $c \neq \emptyset$). Маємо $x \in C_{\leq}^*(X)$ і $(0, a) \leq_{\mathcal{X}} (1, x)$ для всіх елементів $a \in c$, звідки для кожного елементу $a \in c$ існує елемент $x' \in x$, такий, що $a \leq x'$. Тоді за лемою 3.1.3, $\{t \in c \cup x \mid a'_0 \leq t\}$ є ланцюгом в $(X, \leq)$. Нехай $x'_0 \in x$ є елементом, таким, що $a'_0 \leq x'_0$ (який існує, як було зазначено вище). Тоді $x'_0 \in \{t \in c \cup x \mid a'_0 \leq t\}$. Тоді x'_0 є верхньою межею $\{t \in c \mid a'_0 \leq t\}$, оскільки в іншому випадку, існує елемент $t \in c$, такий, що $a'_0 \leq t$ і $t \not\leq x'_0$, звідки $x'_0 \leq t$ (оскільки тут x'_0 і t належать $\leq$ -ланцюгу), що суперечить припущенню про відсутність пари (a_0, x_0) , такої, що $a_0 \in c$, $x_0 \in x$ і $x_0 \leq a_0$. Слід зауважити, що x^* є точною верхньою межею множини $\{t \in c \mid a'_0 \leq t\}$ (оскільки c і $\{t \in c \mid a'_0 \leq t\}$ є кофінальними) в $(X, \leq)$, тому $x^* \leq x'_0$. Крім того, $x'_0 \in x$. Таким чином, $(0, x^*) \leq_{\mathcal{X}} (1, x) = (i, x)$.

Тепер, припустимо, що існують елементи $a_0 \in c$ і $x_0 \in x$, такі, що $x_0 \leq a_0$. Маємо $x \in C_{\leq}^*(X)$ і $(0, a) \leq_{\mathcal{X}} (1, x)$ для всіх $a \in c$, звідки для кожного елементу $a \in c$ існує елемент $x' \in x$, такий, що $a \leq x'$. Тоді за лемою 3.1.3 множина $\{t \in c \cup x \mid x_0 \leq t\}$ є ланцюгом в $(X, \leq)$. Припустимо, що для кожного елементу $x' \in x$ існує елемент $a \in c$, такий, що $x' \leq a$. Тоді ланцюг x обмежений згори елементом x^* . Тоді x^* є максимальним елементом x (оскільки $x \in C_{\leq}^*(X)$ і x є максимальним), і отримуємо суперечність з тим фактом, що $x \in C_{\leq}^*(X)$. Таким чином, існує елемент $x' \in x$, такий, що для всіх $a \in c$ виконується $x' \not\leq a$. Нехай x'' є $\leq$ -найбільшим елементом множини $\{x_0, x'\}$ (який існує, оскільки x є $\leq$ -ланцюгом). Тоді $x'' \in \{t \in c \cup x \mid x_0 \leq t\}$ і для всіх $a \in c$ виконується $x'' \not\leq a$ (оскільки в іншому випадку $x' \leq x'' \leq a$ для деякого $a \in c$). Тоді для кожного елементу $a \in c$, якщо $x_0 \leq a$, то $a \leq x''$ (оскільки в цьому випадку a і x'' є $\leq$ -порівнюваними). Зокрема, для кожного елементу $a \in c$ з умови $a_0 \leq a$ випливає, що $a \leq x''$ (оскільки $x_0 \leq a_0$). Тоді x'' є верхньою межею множини $\{a \in c \mid a_0 \leq a\}$. Слід зауважити, що x^* є точною верхньою межею множини $\{a \in c \mid a_0 \leq a\}$ (оскільки c і $\{a \in c \mid a_0 \leq a\}$ є кофінальними), тому $x^* \leq x''$. Крім того, $x'' \in x$, тому $(0, x^*) \leq_{\mathcal{X}} (1, x) = (i, x)$.

Отже, ланцюг C має точну верхню межу в $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$.

Підвипадок 2.2: c не має верхньої межі в $(X, \leq)$. За лемою Цорна існує максимальний за включенням $\leq$ -ланцюг c_m в $(X, \leq)$, такий, що $c \subseteq c_m$.

Слід зауважити, що c_m не має $\leq$ -максимального елементу (оскільки c не має верхньої межі), тому $c_m \in C_{\leq}^*(X)$. Тоді $(1, c_m) \in \mathcal{X}$ і $(0, a) \leq_{\mathcal{X}} (1, c_m)$ для кожного елементу $a \in c \subseteq c_m$. Тоді $(1, c_m)$ є верхньою межею $\mathcal{C}$ в $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$, оскільки $\mathcal{C} \subseteq \{0\} \times X$.

Доведемо, що $(1, c_m)$ є точною верхньою межею $\mathcal{C}$ в $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$.

Нехай (i, x) є верхньою межею $\mathcal{C}$ в $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$. Покажемо, що $(1, c_m) \leq_{\mathcal{X}} (i, x)$. Слід зауважити, що $i = 1$, оскільки в іншому випадку $x \in X$ і $(0, a) \leq_{\mathcal{X}} (0, x)$ для всіх $a \in c$, звідки $a \leq x$ для всіх $a \in c$, що суперечить припущенню про те, що c не має верхньої межі в $(X, \leq)$. Тоді $x \in C_{\leq}^*(X)$.

Доведемо, що c і x є кофінальними множинами в $(X, \leq)$.

Оскільки (i, x) є верхньою межею $\mathcal{C}$, маємо $(0, a) \leq_{\mathcal{X}} (1, x)$ для всіх $a \in c$. Тоді для кожного елементу $a \in c$ існує елемент $x' \in x$, такий, що $a \leq x'$. Тоді за лемою 3.1.3, для будь-якого $x_0 \in X$ множина $\{t \in c \cup x \mid x_0 \leq t\}$ є ланцюгом в $(X, \leq)$. Тоді $\{a \in c \mid x_0 \leq a\} \subseteq x$ для будь-якого $x_0 \in x$, оскільки в іншому випадку існує елемент $a \in \{t \in c \cup x \mid x_0 \leq t\}$, такий, що $a \notin x$ і a є $\leq$ -порівнюваним з усіма елементами t з x , такими, що $x_0 \leq t$, тому $x \cup \{a\}$ є $\leq$ -ланцюгом і власною надмножиною x , що суперечить тому факту, що $x \in C_{\leq}^*(X)$.

Доведемо, що для кожного $x' \in x$ існує елемент $a \in c$, такий, що $x' \leq a$.

Спочатку доведемо, що існує пара (a_0, x_0) , така, що $a_0 \in c$, $x_0 \in x$ і $x_0 \leq a_0$. Припустимо, що не існує пари (a_0, x_0) , такої, що $a_0 \in c$, $x_0 \in x$ і $x_0 \leq a_0$. Нехай a'_0 є деяким елементом c (який існує, оскільки c є непорожнім). Як було зазначено вище, множина $\{t \in c \cup x \mid a'_0 \leq t\}$ є ланцюгом в $(X, \leq)$. Нехай $x'_0 \in x$ є елементом, таким, що $a'_0 \leq x'_0$ (який існує, як було зазначено вище). Тоді $x'_0 \in \{t \in c \cup x \mid a'_0 \leq t\}$. Тоді x'_0 є верхньою межею множини $\{t \in c \mid a'_0 \leq t\}$, оскільки в іншому випадку існує елемент $t \in c$ такий, що $a'_0 \leq t$ і $t \not\leq x'_0$, звідки $x'_0 \leq t$ (оскільки тут x'_0 і t належать $\leq$ -ланцюгу), що суперечить припущенню про відсутність пари (a_0, x_0) , такої, що $a_0 \in c$, $x_0 \in x$ і $x_0 \leq a_0$. Тоді x'_0 є верхньою межею c (оскільки $a'_0 \in c$ і c є $\leq$ -ланцюгом), що суперечить припущенню про те, що c не має верхньої межі в $(X, \leq)$.

Таким чином, існує пара (a_0, x_0) , така, що $a_0 \in c$, $x_0 \in x$ і $x_0 \leq a_0$.

Нехай $x' \in x$. Припустимо, що для всіх $a \in c$ виконується $x' \not\leq a$.

Слід зауважити, що $\{a \in c \mid a_0 \leq a\} \subseteq \{a \in c \mid x_0 \leq a\} \subseteq x$. Тоді для

кожного елементу $a \in c$, такого, що $a_0 \leq a$, елементи a і x' належать $\leq$ -ланцюгу, тому $a \leq x'$. Тоді, оскільки $a_0 \in c$ і $c \in \leq$ -ланцюгом, то x' є верхньою межею c , що суперечить припущенню про те, що c не має верхньої межі в $(X, \leq)$. Таким чином, існує елемент $a \in c$, такий, що $x' \leq a$.

Враховуючи, що для кожного елементу $a \in c$ існує елемент $x' \in x$, такий, що $a \leq x'$ (як було зазначено вище), можемо зробити висновок, що c і x є кофінальними множинами в $(X, \leq)$. Слід зауважити, що c є кофінальною підмножиною c_m , оскільки в іншому випадку існує елемент $a \in c_m$, такий, що $a \not\leq y$ для всіх $y \in c$, тому $y \leq a$ для всіх $y \in c$, що суперечить припущенню про те, що c не має верхньої межі в $(X, \leq)$. Тоді c_m і x є кофінальними множинами в $(X, \leq)$. Таким чином, $(1, c_m) \leq_x (i, x)$.

Отже, ланцюг C має супремум в $(\mathcal{X}, \leq_x)$.

Таким чином, $(\mathcal{X}, \leq_x)$ є повною передвпорядкованою множиною. $\square$

3.1.7. Формалізація в системі інтерактивного доведення теорем

У [85] надана формалізація в Isabelle/HOL принципу індукції, аналогічного тому, що наданий в означенні 3.1.1 і теоремі 3.1.2, але для вільних від алмазів повних *вниз* частково впорядкованих множин (де кожний непорожній ланцюг має точну *нижню* межу) замість вільних від алмазів повних частково впорядкованих множин (ця зміна не є суттєвою, оскільки можна розглянути частково впорядковану множину з оберненим порядком). Дана формалізація побудована на основі існуючої формалізації [154] принципу відкритої індукції Рауля (що також використовує повні *вниз* порядки).

Більш детально, у [85] наведене формальне доведення такого твердження `dfinduct` в Isabelle/HOL (де позначення `lb P B x` означає, що множина B має нижню межу x в сенсі бінарного відношення P , як визначено у [154], `glbrel` формалізує поняття точної нижньої межі, `dc_onrel` формалізує умову повноти *вниз*, а `df_on` виражає умову, що множина є вільною від алмазів):

definition `glbrel` **where**

`"glbrel P A B x  $\equiv$  lb P B x  $\wedge$  ( $\forall y \in A. lb P B y \longrightarrow P y x$ )"`

definition `dc_onrel` **where**

`"dc_onrel P A $\equiv$ $\forall C. chain_on P C A \wedge C \neq \{\}$ $\longrightarrow$
 $(\exists x \in A. glbrel P A C x)$ "`

definition *df_on* where

$$\text{"df_on } P \ A \equiv \forall a \ b \ c \ d. (a \in A \wedge b \in A \wedge c \in A \wedge d \in A \wedge \\ P \ a \ b \wedge P \ b \ d \wedge P \ a \ c \wedge P \ c \ d \longrightarrow P \ b \ c \vee P \ c \ b) \text{"}$$

lemma (in *order*) *dfinduct*:

assumes *dccond*: "*dc_onrel* (*op* $\leq$) *UNIV*"

and *dfcond*: "*df_on* (*op* $\leq$) *UNIV*"

and *cond*: " $\bigwedge z \ x. (Q \ z \wedge z < x \wedge (\forall e. (z < e \wedge e \leq x \longrightarrow$
 $(\exists e'. z < e' \wedge e' < e))) \implies$
 $(\exists y. z < y \wedge y \leq x \wedge (\forall t. z < t \wedge t \leq y \longrightarrow Q \ t)))$ "

and *ind*: " $\bigwedge x. (\bigwedge y. y < x \implies Q \ y) \implies Q \ x$ "

shows "*Q* *x*"

Слід зауважити, що тут $\leq$ є частковим порядком, *dccond* є припущенням про повноту вниз, *dfcond* означає, що частково впорядкована множина є вільною від алмазів, *ind* відповідає умові (1) означення 3.1.1, а *cond* відповідає умові (2) означення 3.1.1, сформульованому без використання позначень вигляду $[x, y]$, $[x, y]$ для проміжків у частково впорядкованій множині.

У [85] також наведене узагальнення цього твердження на передвпорядковані множини:

lemma (in *preorder*) *dfinduct2*:

assumes *dccond*: "*dc_onrel* (*op* $\leq$) *UNIV*"

and *dfcond*: "*df_on* (*op* $\leq$) *UNIV*"

and *ind1*: " $\bigwedge x. (\bigwedge y. y < x \implies Q \ y) \implies Q \ x$ "

and *ind2*: " $\bigwedge z \ x. (Q \ z \wedge z < x \wedge (\forall e. (z < e \wedge e \leq x \longrightarrow$
 $(\exists e'. z < e' \wedge e' < e))) \implies$
 $(\exists y. z < y \wedge y \leq x \wedge (\forall t. z < t \wedge t \leq y \longrightarrow Q \ t)))$ "

shows "*Q* *x*"

Альтернативне (більш явне) формулювання принципу *dfinduct2* у [85] має такий вигляд (де *dcorder* позначає повні вниз передпорядки, визначені у [154]):

theorem (in *dcorder*) *df_induction*:

assumes

diamond_free: " $\forall a b c d . (a \leq b \wedge b \leq d) \wedge (a \leq c \wedge c \leq d) \longrightarrow (b \leq c) \vee (c \leq b)$ "

and *ind1*: " $\forall x . (\forall y . y < x \longrightarrow P y) \longrightarrow P x$ "

and *ind2*: " $\forall z x . (P z \wedge z < x \wedge (\forall e . (z < e \wedge e \leq x \longrightarrow (\exists e' . z < e' \wedge e' < e)))) \longrightarrow (\exists y . z < y \wedge y \leq x \wedge (\forall t . z < t \wedge t \leq y \longrightarrow P t))$ "

shows " $\forall x . P x$ "

3.2. Узагальнені принципи індукції для частково впорядкованих множин і ациклічних АПС

3.2.1. Попередні зауваження

Принципи індукції для натуральних чисел, фундованої індукції і дійсної індукції [46, 19, 20] мають деякі спільні риси. А саме, кожен з цих принципів

1. має конкретний синтаксичний вираз (наприклад, принцип фундованої індукції для частково впорядкованих множин може бути виражений у формі формули, що включає символ $\leq$ для позначення відношення порядку і символ P для унарного предикату на частково впорядкованій множині);
2. дозволяє отримати доведення того, що даний предикат P на множині X є істинними на X за допомогою припущення (гіпотези індукції) про те, що P є істинним на деяких інших елементах X (наприклад, можна довести, що $n < 2^n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, використовуючи припущення про те, що $n' < 2^{n'}$ для всіх $n' < n$).

З цього випливає природне питання про те, яким чином вищезазначені загальні риси 1, 2 можуть бути формалізовані. Також, оскільки індуктивні доведення часто пов'язані з впорядкованими множинами, то інше питання – які принципи індукції, що мають риси 1, 2, є застосовними до широкого класу частково впорядкованих множин. Слід зауважити, що деякі принципи доведення універсальних властивостей елементів можуть бути застосовними до довільних частково впорядкованих множин, але, при цьому, вони можуть бути тривіальними в певному сенсі. Такі випадки бажано виключити з розгляду.

Також, слід зауважити, що хоча згадані вище принципи фундованої та дійсної індукції є безпосередньо застосовними до задачі доведення $\forall x \in X P(x)$ тільки

коли X має необхідну структуру, якщо X не має цієї структури, ці принципи можуть бути опосередковано застосовні до задачі доведення $\forall x \in X P(x)$ в тому сенсі, що можливо перетворити предикат P на X у еквівалентний предикат Q на іншій множині Y (тобто $\forall y \in Y Q(y)$ тоді і тільки тоді, коли $\forall x \in X P(x)$) з необхідною для обраного принципу індукції структурою. Практична користь від такого перетворення може залежати від того, яким чином P визначено і які його властивості відомі. Наприклад, припускаючи аксіому вибору, будь-яка множина може бути цілком впорядкована, тому, в цьому сенсі, принцип фундової індукції є опосередковано застосовним до будь-якого предикату на будь-якій множині. Наприклад, такою множиною може бути дійсний проміжок $[0, 1]$ (можна визначити $Y = ([0, 1], \leq_{wo})$, де $\leq_{wo}$ є цілком впорядкуванням $[0, 1]$ і $Q(y) \Leftrightarrow P(y)$ для всіх $y \in [0, 1]$), але цей факт може не бути практично корисним, якщо істинність P зручно доводити спираючись на звичайний порядок на $[0, 1]$ (в останньому випадку, принцип дійсної індукції є більш практично корисним, ніж принцип фундової індукції). Щодо цього виникає питання про те, яким чином подібне опосередковане застосування принципів індукції може бути формалізоване.

Щоб надати відповіді на вищезазначені питання, у даному підрозділі:

- пропонується підхід до формалізації принципів індукції, що розглядає принцип індукції як правило, виражене за допомогою мови логіки першого порядку, яке може бути використане для доведення того, що властивість P виконується для всіх елементів певної множини за допомогою припущення про те, що P виконується для деяких її елементів; також пропонується формалізація поняття непрямого (опосередкованого) застосування принципу індукції;
- цей підхід застосовано до принципів індукції для частково впорядкованих множин; на базі принципу індукції для вільних від алмазів повних частково впорядкованих множин (що описаний у підрозділі 3.1) отримано фіксований принцип індукції $\mathcal{I}$, що є опосередковано застосовним до всіх частково впорядкованих множин в тому сенсі, що можливо перетворити дану частково впорядковану множину A на частково впорядковану множину A' і даний предикат P на A на предикат P' на A' таким чином, що
 1. A' належить класу частково впорядкованих множин, для яких $\mathcal{I}$ є застосовним;
 2. P' є всюди істинним на A' тоді і тільки тоді, коли P є всюди істинним на A .

Дані результати можуть бути застосовані до ациклічних АПС $(X, \rightarrow)$, якщо розглядати $\rightarrow^*$ як частковий порядок.

Підрозділ структуровано таким чином: у пункті 3.2.3 введено поняття прямого принципу індукції, вираженого за допомогою мови логіки першого порядку, у пункті 3.2.4 введено поняття непрямого принципу індукції, у пункті 3.2.5 вищезгадані поняття застосовані до частково впорядкованих множин.

3.2.2. Позначення і терміни

Будемо позначати як *Bool* множину істиннісних значень $\{False, True\}$.

Нижче будуть використовуватись поняття сигнатури, мови першого порядку, інтерпретації, що визначені відповідно до [188], однак, замість терміну “символ відношення” (сигнатури) буде використовуватись термін “предикатний символ”.

Скінченна багатосортна сигнатура Σ [188] є трійкою $(Sorts, Pr, Func)$, де

- *Sorts* є скінченною множиною елементів, що будуть називатись *сортами*;
 - *Pr* є скінченною множиною елементів, що будуть називатись *предикатними символами*, разом з функцією $ar : Pr \rightarrow Sorts^*$ (де $Sorts^*$ позначає множину скінченних послідовностей елементів множини *Sorts*), що асоціює арність з кожним предикатним символом;
- позначення вигляду $p : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow Bool$ буде використовуватись, щоб вказати, що p є предикатним символом з $ar(p) = A_1 \dots A_n$ (моноширинний шрифт в *Bool* буде використовуватись, щоб підкреслити, що p позначає символ, а не функцію, що приймає значення в множині *Bool*);
- *Func* є скінченною множиною елементів, що будуть називатись *функціональними символами*, разом з функцією $\langle dom, cod \rangle : Func \rightarrow Sorts^* \times Sorts$, що асоціює арність із кожним функціональним символом; позначення вигляду $f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ буде використовуватись, щоб вказати, що f є функціональним символом з $\langle dom, cod \rangle(f) = \langle A_1 \dots A_n, B \rangle$.

Будемо припускати, що множини *Sorts*, *Pr*, *Func* попарно не перетинаються.

Нехай $(V_S)_{S \in Sorts}$ є індексованою сім'єю множин, що попарно не перетинаються. Елементи цих множин будуть називатись змінними: $x \in V_S$ є змінною сорту *S*.

З сигнатурою Σ будемо пов'язувати множину (не обов'язково правильно типізованих) формул першого порядку, визначених такою граматиною (де $*$ позначає нуль або більше повторів):

$$\begin{aligned} Formula ::= & AtomicFormula \mid \neg Formula \mid Formula \vee Formula \\ & \mid Formula \wedge Formula \mid Formula \rightarrow Formula \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& | \forall Variable Formula | \exists Variable Formula \\
AtomicFormula & ::= False | True | Term = Term | Pr(Term^*) \\
Term & ::= Variable | Func(Term^*)
\end{aligned}$$

Тут припускається, що Pr і $Func$ приймають у якості значень предикатні і функціональні символи з Σ , $Variable$ приймає значення у $\bigcup_{S \in Sorts} V_S$, а $False$, $True$ є позначеннями для відповідних логічних констант.

Множиною замкнених термів Σ , що буде позначатись як $GT(\Sigma)$, є множина всіх термів $t \in Term$, таких, що t не містить змінних (у якості підтерму).

Мовою першого порядку Σ , що буде позначатись як $F(\Sigma)$, є множина всіх формул $\Phi \in Formula$, таких, що $wt(\Phi')$ є істинним для кожної атомарної підформули Φ' в Φ , де

1. $wt : AtomicFormula \cup Term \rightarrow Bool$ є предикатом перевірки типу, що визначений таким чином:
 - $wt(False)$ є істинним, $wt(True)$ є істинним;
 - $wt(t_1 = t_2) \Leftrightarrow (type(t_1) = type(t_2) \wedge wt(t_1) \wedge wt(t_2))$, якщо $t_1, t_2 \in Term$;
 - $wt(p(t_1, \dots, t_n)) \Leftrightarrow (ar(p) = type(t_1) \dots type(t_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^n wt(t_i))$, якщо p є предикатним символом, $n \geq 0$ і $t_1, \dots, t_n \in Term$;
 - $wt(f(t_1, \dots, t_n)) \Leftrightarrow (dom(f) = type(t_1) \dots type(t_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^n wt(t_i))$, якщо f є функціональним символом, $n \geq 0$ і $t_1, \dots, t_n \in Term$;
2. $type : Term \rightarrow Sorts$ є функцією, визначеною таким чином:
 - $type(x) = S$ для кожних $S \in Sorts$ і $x \in V_S$;
 - $type(f(t_1, \dots, t_n)) = cod(f)$, якщо $t_1, \dots, t_n$ належать $Term$.

Також, будемо використовувати таку підмножину $F(\Sigma)$:

- $F_{\rightarrow, \wedge, \vee}(\Sigma)$ є множиною усіх формул $\Phi \in F(\Sigma)$, що не містять $\neg, \vee, \exists$.

Інтерпретацією Σ будемо називати функцію I , що асоціює

1. непорожню множину (що буде позначатись як $I(S)$) із кожним $S \in Sorts$;
2. тотальну функцію (предикат) $I(p) : I(A_1) \times \dots \times I(A_n) \rightarrow Bool$ із кожним предикатним символом $p : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow Bool$ в Pr ;
3. тотальну функцію $I(f) : I(A_1) \times \dots \times I(A_n) \rightarrow I(A)$ із кожним функціональним символом $f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A$ в $Func$.

Будемо припускати, що кожна інтерпретація I є неявно продовженою з $Sorts$, Pr , $Func$ на $GT(\Sigma)$, тобто якщо I є інтерпретацією і t є замкненим термом, то $I(t)$ є значенням в $I(type(t))$, визначеним у відповідності з рекурсивним визначенням:

$$I(f(t_1, \dots, t_n)) = I(f)(I(t_1), \dots, I(t_n)) \text{ для кожних } f \in Func \text{ і } n \geq 0, \text{ таких, що}$$

n є довжиною $dom(f)$ (що розглядається як рядок сортів).

Також будемо припускати, що кожна інтерпретація I є неявно продовженою з $Sorts, Pr, Func$ на речення (замкнені формули, англ. sentence) в $F(\Sigma)$, тобто якщо I є інтерпретацією і Φ є реченням у $F(\Sigma)$, то $I(\Phi)$ є істиннісним значенням (“істинне” або “хибне”), що отриманим відповідно до таких визначень (що можуть розглядатись як індуктивні за кванторним рангом формули):

- $I(\text{False})$ є хибним, $I(\text{True})$ є істинним;
- $I(t_1 = t_2)$ є істинним, якщо $I(t_1) = I(t_2)$, де t_1, t_2 є замкненими термами;
- $I(p(t_1, \dots, t_n))$ є істинним, якщо $I(p)(I(t_1), \dots, I(t_n))$ є істинним, де $p \in Pr$, $n \geq 0$ є такими, що n є довжиною $ar(p)$, а $t_1, \dots, t_n$ є замкненими термами;
- $I(\neg\Phi)$ є істинним, якщо $I(\Phi)$ є хибним;
- $I(\Phi_1 \vee \Phi_2)$ є істинним, якщо $I(\Phi_1)$ є істинним або $I(\Phi_2)$ є істинним;
- $I(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$ є істинним, якщо $I(\Phi_1)$ є істинним і $I(\Phi_2)$ є істинним;
- $I(\Phi_1 \rightarrow \Phi_2)$ є істинним, якщо $I(\Phi_1)$ є хибним або $I(\Phi_2)$ є істинним;
- $I(\forall x \Phi)$ є істинним, якщо $J(\Phi[x \mapsto c])$ є істинним для будь-якої інтерпретації J сигнатури Σ_c , що погоджується з I на всіх сортах і символах Σ , де Σ_c є сигнатурою Σ з доданою новою константою (нуль-арним функціональним символом) c з $cod(c) = S$, де S є (єдиним) сортом, таким, що $x \in V_S$, а $\Phi[x \mapsto c]$ є формулою в $F(\Sigma_c)$, отриманою з Φ підстановкою c замість кожного вільного входження x в Φ ;
- $I(\exists x \Phi)$ є істинним, якщо $J(\Phi[x \mapsto c])$ є істинним для деякої інтерпретації J сигнатури Σ_c , що погоджується з I на всіх сортах і символах Σ , де Σ_c визначено як вище.

Будемо називати Σ -структурою алгебраїчну структуру сигнатури Σ (з носіями, предикатами і операціями, асоційованими з сортами, предикатними символами і функціональними символами Σ).

Будемо казати, що I є інтерпретацією Σ у даному класі Σ -структур $\mathbf{M}$, якщо існує Σ -структура $M \in \mathbf{M}$, така, що I асоціює з $Sorts, Pr, Func$ з Σ ті ж значення, що M .

Також, будемо використовувати поняття розміченої транзиційної системи і відношення бісимуляції [181], що визначені таким чином.

Розмічена транзиційна система [181] є трійкою $(Q, \Lambda, \rightarrow)$, де

- Q є множиною елементів, що будуть називатись *станами*;
- Λ є множиною елементів, що будуть називатись *мітками*;

– $\rightarrow \subseteq Q \times \Lambda \times Q$ є відношенням, що буде називатись *відношенням переходу*.

Слід зауважити, що згідно даного визначення, розмічена транзиційна система *не* має виділених початкових станів.

Якщо $(Q, \Lambda, \rightarrow)$ є розміченою транзиційною системою, будемо використовувати позначення $q_1 \xrightarrow{\lambda} q_2$ для $(q_1, \lambda, q_2) \in \rightarrow$.

Нехай $L_i = (Q_i, \Lambda, \rightarrow_i)$, $i = 1, 2$ є розміченими транзиційними системами. Будемо називати відношення $R \subseteq Q_1 \times Q_2$ *симуляцією* [181] між L_1 і L_2 , якщо для кожних $q_1, q'_1 \in Q_1$, $\lambda \in \Lambda$ і $q_2 \in Q_2$ виконується імплікація

$$q_1 \xrightarrow{\lambda}_1 q'_1 \wedge q_1 R q_2 \Rightarrow \exists q'_2 \in Q_2 (q_2 \xrightarrow{\lambda}_2 q'_2 \wedge q'_1 R q'_2).$$

Відношення $R \subseteq Q_1 \times Q_2$ буде називатись *бісимуляцією* [181, 179] між L_1 і L_2 , якщо R є симуляцією між L_1, L_2 і R^{-1} є симуляцією між L_2, L_1 .

Також, у даному підрозділі будемо припускати, що

- частково впорядковані множини є *непорожніми*;
- порожня множина є ланцюгом, але *не* є спрямованою множиною.

3.2.3. Прямі принципи ФО індукції

3.2.3.1. Ідея принципів ФО індукції

Розглянемо ідею загальної формалізації принципів індукції, як було вказано у підрозділі 3.2.1. Спочатку зауважимо, що принцип індукції для натуральних чисел може бути виражений як правило

$$\frac{P(0) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow P(x+1))}{\forall x P(x)} \quad (3.3)$$

Його засновок

$$P(0) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow P(x+1)) \quad (3.4)$$

може розглядатись як формула в мові формул першого порядку в сигнатурі, що включає функціональні символи для $0, 1, +$ з доданим унарним предикатним символом для P . При цьому, у доведеннях за індукцією різні входження підформул вигляду $P(t)$ у (3.4), де t позначає терм, використовуються різним чином: $P(x)$ використовується як припущення, в той час, як $P(0)$ (“база індукції”) і $P(x+1)$ мають бути доведені. Щоб підкреслити цю різницю, введемо новий унарний

предикатний символ H (“гіпотеза”), переформулюємо (3.4) як

$$P(0) \wedge \forall x (H(x) \rightarrow P(x + 1)) \quad (3.5)$$

і замінімо правило (3.3) на таке:

$$\frac{P(0) \wedge \forall x (H(x) \rightarrow P(x + 1)), \forall x (P(x) \leftrightarrow H(x))}{\forall x P(x)} \quad (3.6)$$

Будемо вважати (3.6) поданням принципу індукції для натуральних чисел.

Подібні за формою подання можуть бути отримані і деяких інших відомих принципів індукції (наприклад, для фундованої індукції для частково впорядкованих множин та для принципу дійсної індукції [19, 20]).

Враховуючи це, у підпункті 3.2.3.2 принцип індукції в загальному випадку (що буде названо (*прямим*) *принципом FO псевдоіндукції*) буде визначено як формулу, подібну до (3.5) (що може включати символ для P , тобто властивості, яку потрібно довести і H , тобто гіпотези, але може відрізнитись від (3.5) і може включати символи операцій та відношень, відмінні від “+”), що робить правило типу (3.6) коректним у всіх інтерпретаціях у даному класі структур. Однак слід зауважити, що деякі з таких формул (наприклад, $\forall x P(x)$) не подають принципи доведення універсальних властивостей елементів, які можна назвати індуктивними в інтуїтивному сенсі, оскільки вони не використовують (суттєво) гіпотезу індукції. Через це будуть запропоновані обмеження на вигляд таких формул, що дозволять виключити з розгляду деякі подібні випадки. Формули, що задовольняють таким обмеженням будуть названі *принципами FO індукції* зі спеціальними властивостями, наприклад, з властивістю *нетривіальності* (означення 3.2.4).

3.2.3.2. Визначення принципів FO індукції

Нехай Σ є скінченною багатосортною сигнатурою і D (“область”) є одним з сортів Σ . Для кожного сорту S в Σ нехай x^S і x_i^S , $i \in \mathbb{N}_0$ є різними іменами змінних сорту S (які не збігаються з жодним символом Σ).

Використовуючи позначення пункту 3.2.2, нехай $F(\Sigma)$ є мовою формул першого порядку у Σ (з рівністю, логічними сполучниками $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ і логічними константами False і True) з іменами змінних з $\{x^S\} \cup \{x_i^S \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ для кожного сорту S в Σ .

Зауваження 3.2.1. Для уникнення неоднозначностей у позначеннях формул і предикатів, у решті даного пункту будемо використовувати моноширинний шрифт

(наприклад, x) для виділення синтаксичних понять; він може бути застосований до сортів, змінних, предикатних і функціональних символів. Наприклад, P буде позначати предикатний символ, в той час, як P буде позначати інтерпретацію P . Однак, моноширинний шрифт *не* буде застосовуватись до неалфавітних позначень, таких як $\leq$ (такі позначення будуть використовуватись як для предикатних символів, так і для предикатів).

Зауваження 3.2.2. Для спрощення позначень, при записі формул з $F(\Sigma)$ нижче *не* будуть вказуватись верхні індекси (сорт) у іменах змінних (тобто, буде використовуватись позначення x замість x^S , де S є сортом), якщо Σ буде мати лише один сорт, або якщо сорти змінних можна буде визначити за способом використання змінних.

Приклад 3.2.1. Якщо Σ є сигнатурою з сортами D і E , предикатним символом $P : D \rightarrow \text{Bool}$ і функціональними символами $f : D \rightarrow D$ і $g : D \times E \rightarrow E$, то

$$\forall x_1^D \exists x_2^E (\neg P(f(f(x_1^D))) \vee g(x_1^D, x_2^E) = x_3^E)$$

є формулою в $F(\Sigma)$. Щоб спростити позначення, будемо також записувати її як

$$\forall x_1 \exists x_2 (\neg P(f(f(x_1))) \vee g(x_1, x_2) = x_3).$$

Нехай $F_{\rightarrow, \wedge, \vee}(\Sigma)$ є множиною всіх $\Phi \in F(\Sigma)$, таких, що $\neg, \vee, \exists$ *не* зустрічаються у Φ . Для спрощення запису, вказуючи формули з $F_{\rightarrow, \wedge, \vee}(\Sigma)$ будемо використовувати такі скорочення (де $\Phi, \Psi \in F_{\rightarrow, \wedge, \vee}(\Sigma)$ і v є іменем змінної):

- $\dot{\neg} \Phi$ є скороченням для $(\Phi \rightarrow \text{False})$;
- $\Phi \dot{\vee} \Psi$ є скороченням для $((\Phi \rightarrow \text{False}) \wedge (\Psi \rightarrow \text{False})) \rightarrow \text{False}$;
- $\dot{\exists} v \Phi$ є скороченням для $((\forall v (\Phi \rightarrow \text{False})) \rightarrow \text{False})$.

Приклад 3.2.2. Якщо Σ є сигнатурою з сортом D і предикатними символами $P_1 : D \rightarrow \text{Bool}$ і $P_2 : D \rightarrow \text{Bool}$, то запис

$$\dot{\exists} x (P_1(x) \wedge \dot{\neg} P_2(x))$$

позначає таку формулу у $F_{\rightarrow, \wedge, \vee}(\Sigma)$:

$$(\forall x^D ((P_1(x^D) \wedge (P_2(x^D) \rightarrow \text{False})) \rightarrow \text{False})) \rightarrow \text{False}.$$

Нехай $\Phi \in F(\Sigma)$. Нехай $\Phi' \in F(\Sigma)$ є формулою, отриманою з Φ шляхом виразу кожного застосування імплікації $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ як $\neg\Phi_1 \vee \Phi_2$. Якщо Q є предикатним символом, будемо казати, що Q є *позитивним* у Φ (або, відповідно, *негативним* у Φ), якщо кожне входження атомарної формули вигляду $Q(t_1, \dots, t_n)$, $n \geq 0$ в Φ' , де $t_1, \dots, t_n$ є термами, знаходиться під дією парної (або, відповідно, непарної) кількості заперечень ($\neg$).

Зауваження 3.2.3. Якщо символ Q не зустрічаються у Φ , будемо припускати, що Q є і позитивним і негативним у Φ .

Приклад 3.2.3. Нехай Φ є формулою

$$\neg(\forall x_1 \forall x_2 (P_1(x_1) \rightarrow P_1(x_2))) \wedge \neg\exists x(\neg P_2(x)).$$

Тоді Φ' є

$$\neg(\forall x_1 \forall x_2 (\neg P_1(x_1) \vee P_1(x_2))) \wedge \neg\exists x(\neg P_2(x)).$$

Тоді P_2 є позитивним у Φ , але P_1 не є ні позитивним, ні негативним у Φ .

Нехай Σ_H^P є розширенням Σ двома новими (унарними) предикатними символами $H : D \rightarrow \text{Bool}$ (“*гіпотеза*”) і $P : D \rightarrow \text{Bool}$ (“*властивість*”), яких немає серед символів Σ .

Нехай Φ_1, Φ_2 є замкненими формулами у $F(\Sigma_H^P)$, а I є інтерпретацією Σ .

Будемо писати

- $\Phi_1 \models_I \Phi_2$, якщо для кожної інтерпретації I' для Σ_H^P , що погоджується з I на всіх сортах і символах Σ , якщо $I'(\Phi_1)$ є істинним, то $I'(\Phi_2)$ є істинним;
- $\Phi_1 \models_{I,H} \Phi_2$, де $H : I(D) \rightarrow \text{Bool}$ є предикатом, якщо для кожної інтерпретації I' для Σ_H^P , що погоджується з I на всіх сортах і символах Σ , якщо $I'(H) \in H$ і $I'(\Phi_1)$ є істинним, то $I'(\Phi_2)$ є істинним.

Для будь-якого цілого числа $n \geq 0$ будемо писати:

- $\Phi_1 \models_I^n \Phi_2$, де Φ_1, Φ_2 є замкненими формулами у $F(\Sigma_{P_0, P_1, \dots, P_{n+1}})$, де $\Sigma_{P_0, P_1, \dots, P_{n+1}}$ є розширенням Σ новими $n+2$ (унарними) предикатними символами $P_i : D \rightarrow \text{Bool}$, $i = 0, 1, \dots, n+1$, якщо для кожної інтерпретації I' для $\Sigma_{P_0, P_1, \dots, P_{n+1}}$, що погоджується з I на всіх сортах і символах Σ , якщо $I'(\Phi_1)$ є істинним, то $I'(\Phi_2)$ є істинним.

Нехай $\mathbf{M}$ є деяким класом структур сигнатури Σ (Σ -структур).

Будемо припускати, що у Σ -структурі носії всіх сортів є *непорожніми*, тому для кожного $M \in \mathbf{M}$, носії всіх сортів у M є непорожніми.

Нижче надане визначення принципу доведення універсальних властивостей елементів сорту D структури з M .

Означення 3.2.1. Речення (замкнена формула) $\mathcal{I} \in F(\Sigma_H^P)$ називається *принципом FO^1 псевдоіндукції* для M і D , якщо виконуються такі умови 1-3:

1. H є негативним у $\mathcal{I}$;
2. P є позитивним у $\mathcal{I}$;
3. $\mathcal{I}[H \mapsto P] \models_I \forall x P(x)$ виконується для будь-якої інтерпретації I для Σ в M , де $\mathcal{I}[H \mapsto P]$ позначає формулу, отриману з $\mathcal{I}$ шляхом заміни $H(t)$ на $P(t)$ для кожного терму t і кожного входження атомарної формули $H(t)$ в $\mathcal{I}$.

Приклад 3.2.4. Нехай $\mathcal{I} \in F(\Sigma_H^P)$ є реченням

$$(\forall x (P(x) \rightarrow H(x))) \rightarrow (\forall x P(x)).$$

Тоді H є негативним у $\mathcal{I}$ і P є позитивним у $\mathcal{I}$. Крім того, $\mathcal{I}[H \mapsto P]$ є такою формулою у $F(\Sigma_H^P)$:

$$(\forall x (P(x) \rightarrow P(x))) \rightarrow (\forall x P(x)).$$

Тоді $\mathcal{I}[H \mapsto P] \models_I \forall x P(x)$ виконується для будь-якої інтерпретації I для Σ в M , тому $\mathcal{I}$ є принципом FO псевдоіндукції для M і D .

Означення 3.2.2. *Принцип FO індукції* для M і D є реченням $\mathcal{I} \in F_{\rightarrow, \wedge, \vee}(\Sigma_H^P)$, таким, що виконуються такі умови 1-2:

1. $\mathcal{I}$ є принципом FO псевдоіндукції для M і D ;
 2. для кожної підформули $\mathcal{I}$ вигляду $\Phi \rightarrow \Psi$, у якій зустрічається H , символ P не зустрічається ні у Φ , ні у A для жодної такої підформули формули Ψ , що має вигляд $A \rightarrow B$, де B не є $False$, і P є позитивним у кожній такій підформулі формули Ψ , що має вигляд $A \wedge B$.
- Надалі сорт “ D ” не буде вказуватись явно, якщо він буде зрозумілим з контексту.

Зауваження 3.2.4. Напівформально, принцип FO індукції $\mathcal{I}$ описує базу індукції та індукційний перехід, що є достатніми для того, щоб довести, що даний унарний предикат P (інтерпретація символу P) є істинним на всіх елементах сорту D . Інтерпретація H подає гіпотезу індукції. Умови 1, 2 означення 3.2.1 і умова 2 означення 3.2.2 вказують, що H використовується як припущення, а P як висновок.

¹ FO означає “першого порядку в розширеній сигнатурі” Σ_H^P (не в Σ).

Сенс умови 3 означення 3.2.1 полягає у тому, що істинність P на всіх елементах його області визначення може бути доведена за допомогою припущення, що включає істинність P на деяких елементах його області визначення.

Приклад 3.2.5. Маємо:

- $\forall x P(x)$ є принципом FO індукції для M і D ;
- $(\forall x (H(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (\forall x P(x)))$ є *не* принципом FO псевдоіндукції для M і D , оскільки дана формула не задовольняє умови 1, 2 означення 3.2.1;
- $(\forall x (P(x) \rightarrow H(x)) \rightarrow (\forall x P(x)))$ є *не* принцип FO індукції для M і D , оскільки дана формула не задовольняє умову 2 означення 3.2.2.

Означення 3.2.3. Якщо речення $\mathcal{I} \in F(\Sigma_H^P)$ є принципом FO (псевдо)індукції для M і D , то

- $\mathcal{I}$ є *точним*, якщо $\forall x P(x) \models_I \mathcal{I}[H \mapsto P]$ для будь-якої інтерпретації I для Σ в M (протилежний напрямок до умови 3 означення 3.2.1);
- $\mathcal{I}$ є *неточним*, якщо $\mathcal{I}$ не є точним;
- *базою* $\mathcal{I} \in \mathcal{I}[H \mapsto \text{False}]$, де $\mathcal{I}[H \mapsto \text{False}]$ позначає формулу, отриману з $\mathcal{I}$ шляхом заміни $H(t)$ на False для кожного терму t і кожного входження атомарної формули $H(t)$ в $\mathcal{I}$.

Зауваження 3.2.5. Напівформально, базою $\mathcal{I}$ є база індукції, що має виконуватись безумовно, для того, щоб довести $\forall x P(x)$ (де P є інтерпретацією символу P). У випадку *неточних* принципів, для деякого $M \in M$ жодний предикат P не задовольняє ліву частину у пункті 3 означення 3.2.1, тому такий принцип не може бути фактично застосований до предикатів на сорті D в M . Для точних принципів такої ситуації немає.

Приклад 3.2.6. Якщо M є класом всіх Σ -структур, то

- False є неточним принципом FO псевдоіндукції для M і D ;
- $\forall x P(x)$ є точним принципом FO індукції для M і D .

Далі будемо розглядати *точні* принципи FO індукції і будемо їх класифікувати таким чином.

Означення 3.2.4. Якщо $\mathcal{I} \in F_{\rightarrow, \wedge, \vee}(\Sigma_H^P)$ є точним принципом FO індукції для M і D , то $\mathcal{I}$ є

- *тривіальним*, якщо база $\mathcal{I}$ є принципом FO індукції для M і D ;

- *нетривіальним*, якщо $\mathcal{I}$ є нетривіальним;
- *n-обмеженим*, де $n \geq 0$ є цілим числом, якщо

$$\bigwedge_{i=0}^n \mathcal{I}[H \mapsto P_{i+1}, P \mapsto P_i] \models_I^n \forall x P_0(x)$$

для будь-якої інтерпретації I для Σ в $\mathbf{M}$, де $\mathcal{I}[H \mapsto P_{i+1}, P \mapsto P_i]$ є формулою в $F(\Sigma_{P_0, P_1, \dots, P_{n+1}})$ отримано з $\mathcal{I}$ шляхом

- заміни $H(t)$ на $P_{i+1}(t)$ для кожного терму t і кожного входження атомарної формули $H(t)$ в $\mathcal{I}$,
- заміни $P(t)$ на $P_i(t)$ для кожного терму t і кожного входження атомарної формули $P(t)$ в $\mathcal{I}$;
- *тривіалізовним*, якщо для будь-якої інтерпретації I для Σ в $\mathbf{M}$ існує предикат $H_0 : I(D) \rightarrow Bool$, такий, що виконується $\mathcal{I} \models_{I, H_0} \forall x P(x)$ і $H_0(x)$ є хибним для деякого $x \in I(D)$;
- *нетривіалізовним*, якщо $\mathcal{I}$ не є тривіалізовним.

Зауваження 3.2.6. Напівформально, введені вище поняття можна пояснити таким чином:

- у випадку *тривіального* $\mathcal{I}$, доведення того, що $\forall x P(x)$ може бути здійснене шляхом доведення того, що умова бази $\mathcal{I}$ виконується для P без використання індукційного переходу;
- у випадку *n-обмеженого* $\mathcal{I}$, можна замінити доведення $\forall x P(x)$ за індукцією доведенням за кон'юнкцією $n + 1$ екземплярів індукційного переходу разом з базою (де n є фіксованим);
- у випадку *тривіалізованого* $\mathcal{I}$, для будь-якого $M \in \mathbf{M}$ можна вилучити гіпотезу з $\mathcal{I}$ шляхом заміни її на фіксовану умову H_0 (предикат на області визначення M), що не є всюди істинною.

Приклад 3.2.7. Якщо $\mathbf{M}$ є класом всіх Σ -структур, то

- $\forall x P(x)$ є тривіальним точним принципом ФО індукції для $\mathbf{M}$ і D ;
- $(\exists x P(x)) \wedge (\forall x_1 \forall x_2 (H(x_1) \rightarrow P(x_2)))$ є нетривіальним точним принципом ФО індукції для $\mathbf{M}$ і D , але цей принцип є 1-обмеженим і тривіалізовним.

Приклад нетривіалізованого принципу буде наведено далі (приклад 3.2.8).

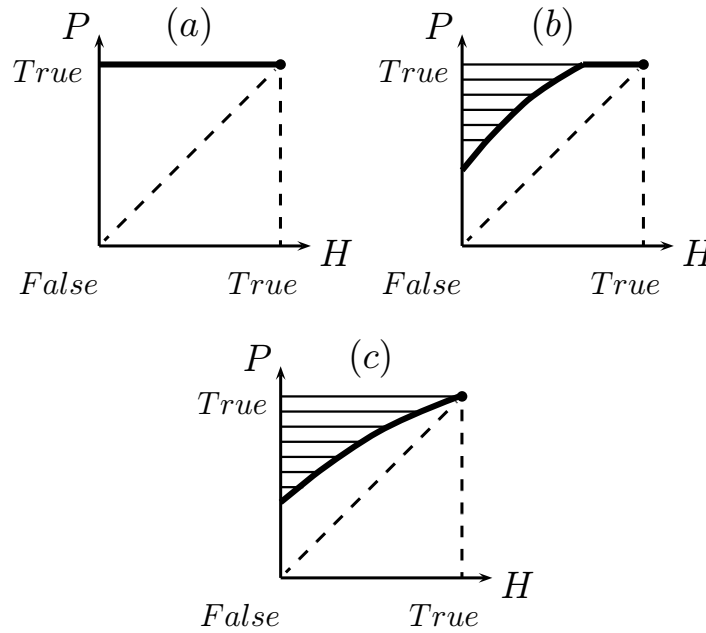


Рисунок 3.2 — Ілюстрація означення 3.2.4 для випадку, коли M є одноелементною множиною $\{M\}$. Підрисунки відповідають випадкам, коли $\mathcal{I} \in (a)$ тривіальним; (b) тривіалізовним; (c) нетривіалізовним. Більш детальне пояснення ілюстрації наведене у зауваженні 3.2.7.

Зауваження 3.2.7. Поняття, введені в означенні 3.2.4 проілюстровані на рисунку 3.2 для випадку, коли M є одноелементною множиною $\{M\}$. Вісі у підрисунках (a) – (c) позначають області істинності предикатів H і P (можливі інтерпретації H і P); “False” означає порожню область істинності, “True” означає, що область істинності (P або H) є усім носієм сорту D в M (слід зауважити, що в загальному випадку, всі можливі області істинності не є лінійно впорядкованими за включенням, тому ілюстрація є умовною). Якщо $I'_{P,H}$ позначає інтерпретацію Σ_H^P , що погоджується з M на сортах і символах Σ і таку, що $I'(P) = P$ і $I'(H) = H$, то $I'_{P,H}(\mathcal{I})$ є істинним для P і H в області, заповненій суцільними горизонтальними лініями. Припускається, що P і H збігаються на діагональній лінії. Підрисунки ілюструють випадки, коли $\mathcal{I} \in (a)$ тривіальним; (b) тривіалізовним; (c) нетривіалізовним.

У якості прикладу тривіального принципу можна навести $\mathcal{I}_a := \forall x P(x)$. У цьому випадку $I'_{P,H}(\mathcal{I}_a)$ не залежить від області істинності H як показано у підрисунку (a) .

Як приклад тривіалізованого принципу можна навести $\mathcal{I}_b := (\exists x P(x)) \wedge (\forall x_1 \forall x_2 (H(x_1) \rightarrow P(x_2)))$. Більш детально, в термінах означення 3.2.4, оберемо деяку константу c з області визначення M і визначимо предикат H_0 таким чином:

- якщо M має область визначення, що не складається з одного елементу, то визначимо: $H_0(x)$ є істинним тоді і тільки тоді, коли $x = c$;
- якщо M має область визначення, що складається з одного елементу, то визначимо H_0 як $False$.

Якщо замінити H на H_0 (що не залежить від P), то з умови $I'_{P,H}(\mathcal{I}_b) = True$ буде впливати, що P є істинним на області визначення M .

Твердження 3.2.1. Нехай $\mathcal{I}$ є точним принципом FO індукції для M і D .

1. Якщо $\mathcal{I}$ є тривіальним, то $\mathcal{I}$ є 0-обмеженим.
2. Для будь-якого цілого числа $n \geq 0$, якщо $\mathcal{I}$ є n -обмеженим, то $\mathcal{I}$ є $n + 1$ -обмеженим.
3. Якщо $\mathcal{I}$ є n -обмеженим для деякого $n \geq 0$, то $\mathcal{I}$ є тривіалізованим.

Доведення. 1. Припустимо, що $\mathcal{I}$ є тривіальним. Нехай I є інтерпретацією Σ в M . Оскільки база $\mathcal{I}$ є принципом FO індукції для M і D , то $\mathcal{I}[H \mapsto False] \models_I \forall x P(x)$. Якщо I' є інтерпретацією Σ_{P_0, P_1} , що погоджується з I на всіх сортах і символах Σ і $I'(\mathcal{I}[H \mapsto P_1, P \mapsto P_0])$ є істинним, то $I'(\mathcal{I}[H \mapsto False, P \mapsto P_0])$ є істинним, оскільки H є негативним у $\mathcal{I}$, звідки $I'(P_0)(x)$ є істинним для всіх $x \in I(D)$. Таким чином,

$$\mathcal{I}[H \mapsto P_1, P \mapsto P_0] \models_I^0 \forall x P_0(x)$$

і $\mathcal{I}$ є 0-обмеженим.

2. Впливає безпосередньо з означення 3.2.4.

3. Припустимо, що $\mathcal{I}$ є n -обмеженим для деякого цілого числа $n \geq 0$. Нехай I є інтерпретацією Σ в M . Для кожного цілого числа $k \geq 0$ нехай Φ_k позначає формулу

$$\bigwedge_{i=0}^k \mathcal{I}[H \mapsto P_{i+1}, P \mapsto P_i]$$

в $F(\Sigma_{P_0, P_1, \dots, P_{k+1}})$. Нехай $m \geq 0$ є найменшим невід'ємним цілим числом, таким, що

$$\Phi_m \models_I^m \forall x P_0(x).$$

Слід зауважити, що таке m існує, оскільки $\mathcal{I}$ є n -обмеженим для деякого n . Розглянемо такі два випадки.

Випадок 1: $m > 0$. Тоді

$$\Phi_{m-1} \not\models_I^{m-1} \forall \mathbf{x} P_0(\mathbf{x}).$$

Тоді існує інтерпретація I_{m-1} сигнатури $\Sigma_{P_0, P_1, \dots, P_m}$, що погоджується з I на сортах і символах Σ , така, що $I_{m-1}(\Phi_{m-1})$ є істинним і $I_{m-1}(\forall \mathbf{x} P_0(\mathbf{x}))$ є хибним.

Нехай $H_0 : I(D) \rightarrow Bool$ є предикатом $I_{m-1}(P_0)$. Оскільки $I(D) \neq \emptyset$, то існує елемент $x \in I(D)$, такий, що $H_0(x)$ є хибним.

Доведемо, що $\mathcal{I} \models_{I, H_0} \forall \mathbf{x} P(\mathbf{x})$. Нехай I' є інтерпретацією $\Sigma_{\mathbb{H}}^P$, що погоджується з I на сортах і символах Σ і є такою, що $I'(\mathbb{H}) \in H_0$. Припустимо, що $I'(\mathcal{I})$ є істинним.

Нехай I_m є інтерпретацією $\Sigma_{P_0, P_1, \dots, P_{m+1}}$, що погоджується з I на сортах і символах Σ , є такою, що $I_m(P_0) \in I'(P)$ і $I_m(P_i) \in I_{m-1}(P_{i-1})$ для $i = 1, 2, \dots, m+1$. Слід зауважити, що $I_{m-1}(\mathcal{I}[\mathbb{H} \mapsto P_{i+1}, P \mapsto P_i])$ є істинним для $i = 0, 1, \dots, m-1$, оскільки $I_{m-1}(\Phi_{m-1})$ є істинним. Тоді $I_m(\mathcal{I}[\mathbb{H} \mapsto P_{i+1}, P \mapsto P_i])$ є істинним для $i = 1, 2, \dots, m$. Крім того, $I_m(\mathcal{I}[\mathbb{H} \mapsto P_1, P \mapsto P_0])$ є істинним, оскільки $I'(\mathcal{I})$ є істинним і $I_m(P_1) \in I_{m-1}(P_0)$, що є $I'(\mathbb{H})$. Таким чином, $I_m(\Phi_m)$ є істинним. Оскільки $\Phi_m \models_I^m \forall \mathbf{x} P_0(\mathbf{x})$, то маємо, що $I_m(\forall \mathbf{x} P_0(\mathbf{x}))$ є істинним. Тоді $I_m(P_0)(x)$ є істинним для всіх $x \in I_m(D)$. Тоді $I'(\forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}))$ є істинним.

Отже, $\mathcal{I} \models_{I, H_0} \forall \mathbf{x} P(\mathbf{x})$.

Випадок 2: $m = 0$. Тоді $\mathcal{I}[\mathbb{H} \mapsto P_1, P \mapsto P_0] \models_I^0 \forall \mathbf{x} P_0(\mathbf{x})$. Нехай $H_0 : I(D) \rightarrow Bool$ є предикатом, таким, що $H_0(x)$ є хибним для всіх $x \in I(D)$. Нехай I' є інтерпретацією $\Sigma_{\mathbb{H}}^P$, що погоджується з I на сортах і символах Σ і є такою, що $I'(\mathbb{H}) \in H_0$. Доведемо, що $\mathcal{I} \models_{I, H_0} \forall \mathbf{x} P(\mathbf{x})$.

Припустимо, що $I'(\mathcal{I})$ є істинним. Зауважимо, що з $\mathcal{I}[\mathbb{H} \mapsto P_1, P \mapsto P_0] \models_I^0 \forall \mathbf{x} P_0(\mathbf{x})$ випливає, що $I'(P)(x)$ є істинним для всіх $x \in I'(D)$. Тоді $I'(\forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}))$ є істинним. Таким чином, $\mathcal{I} \models_{I, H_0} \forall \mathbf{x} P(\mathbf{x})$.

Слід зауважити, що $H_0(x)$ є хибним для деякого $x \in I(D)$, оскільки $I(D) \neq \emptyset$.

Таким чином, в обох випадках існує $H_0 : I(D) \rightarrow Bool$, такий, що $\mathcal{I} \models_{I, H_0} \forall \mathbf{x} P(\mathbf{x})$ виконується і $H_0(x)$ є хибним для деякого $x \in I(D)$.

Отже, принцип $\mathcal{I}$ є тривіалізовним. □

3.2.3.3. Приклади принципів ФО індукції

Приклади подання деяких відомих принципів індукції у формі принципів ФО індукції наведені нижче.

Приклад 3.2.8. Нехай M є структурою $(\mathbb{N}_0, +, 0, 1)$, де $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ (натуральні числа разом з нулем), $+$ є звичайною операцією додавання на $\mathbb{N}_0$, а $0, 1$ є відповідними константами. Нехай Σ є сигнатурою M . Як і раніше, нехай $\Sigma_H^P \in \Sigma$ з доданими унарними предикатними символами P і H .

Нехай $\mathcal{I}$ є таким реченням у $F_{\rightarrow, \wedge, \forall}(\Sigma_H^P)$:

$$P(0) \wedge \forall x (H(x) \rightarrow P(x + 1)).$$

Верхні індекси в іменах змінних не вказуються, як було зазначено у зауваженні 3.2.2. Слід зауважити, що P є позитивним у $\mathcal{I}$, H є негативним у $\mathcal{I}$, а $\mathcal{I}[H \mapsto P]$ є такою формулою:

$$P(0) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow P(x + 1)).$$

Тоді $\mathcal{I}$ є принципом ФО псевдоіндукції для $\{M\}$ оскільки $\mathcal{I}[H \mapsto P] \models_I \forall x P(x)$ виконується для інтерпретації I сигнатури Σ в $\{M\}$ за принципом індукції для натуральних чисел: щоб показати, що предикат $P : \mathbb{N}_0 \rightarrow Bool$ (інтерпретація P) є істинним на $\mathbb{N}_0$, достатньо показати, що

$$P(0) \wedge \forall x \in \mathbb{N}_0 (P(x) \Rightarrow P(x + 1)).$$

Аналогічна умова *не* є достатньою для того, щоб предикат $P : \mathbb{Z} \rightarrow Bool$ був істинним на $\mathbb{Z}$, тому $\mathcal{I}$ *не* є принципом ФО псевдоіндукції для $\{M'\}$, де $M' = (\mathbb{Z}, +, 0, 1)$, $+$ є операцією додавання цілих чисел, а $0, 1$ є відповідними константами. Також слід відмітити, що $\mathcal{I}$ задовольняє умови означення 3.2.2, тому $\mathcal{I}$ є принципом ФО індукції для $\{M\}$.

Базою $\mathcal{I}$ є формула $\mathcal{I}[H \mapsto \text{False}]$, яка є

$$P(0) \wedge \forall x (\text{False} \rightarrow P(x + 1)).$$

Вона подає умову, що $P(0)$ є істинним.

Слід зауважити, що $\forall x P \models_I \mathcal{I}[H \mapsto P]$, оскільки умова $P(0) \wedge \forall x \in \mathbb{N}_0 (P(x) \Rightarrow P(x + 1))$ виконується для предиката P , що є всюди істинним на $\mathbb{N}_0$. Таким чином, $\mathcal{I}$ є точним принципом ФО індукції для $\{M\}$.

Перевіримо, що принцип $\mathcal{I}$ є нетривіалізовним. Нехай I є інтерпретацією Σ в $\{M\}$ і $H_0 : \mathbb{N}_0 \rightarrow Bool$ є предикатом, таким, що $\mathcal{I} \models_{I, H_0} \forall x P(x)$. Доведемо, що $\forall x \in \mathbb{N}_0 H_0(x)$. Припустимо, що існує $x_0 \in \mathbb{N}_0$, такий, що $H_0(x_0)$ є хибним. Нехай

$P_{x_0} : \mathbb{N}_0 \rightarrow Bool$ є предикатом, таким, що $P_{x_0}(x) \Leftrightarrow (x \neq x_0 + 1)$. Тоді $P_{x_0}(0)$ (оскільки $0 \neq x_0 + 1$) і для кожного $x \in \mathbb{N}_0$,

- якщо $x = x_0$, то $H_0(x_0)$ є хибним, тому $H_0(x) \Rightarrow P_{x_0}(x + 1)$;
- якщо $x \neq x_0$, то $x + 1 \neq x_0 + 1$, тому $P(x + 1)$ і $H_0(x) \Rightarrow P_{x_0}(x + 1)$.

Таким чином,

$$P_{x_0}(0) \wedge \forall x \in \mathbb{N}_0 (H_0(x) \Rightarrow P_{x_0}(x + 1)).$$

Оскільки $\mathcal{I} \models_{I, H_0} \forall \mathbf{x} P(\mathbf{x})$, то маємо $\forall x \in \mathbb{N}_0 P_{x_0}(x)$, але це суперечить визначенню P_{x_0} . Тоді $\forall x \in \mathbb{N}_0 H_0(x)$. Отже, принцип $\mathcal{I}$ є нетривіалізовним.

Приклад 3.2.9. Нехай $M = ([0, 1], \leq)$ є дійсним проміжком $[0, 1]$ зі звичайним порядком на ньому. Будемо розглядати позначення $\mathbf{x}_i < \mathbf{x}_j$ як скорочення для

$$(\mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_j \wedge \dot{\neg}(\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j)).$$

Нехай $\mathcal{I}$ є формулою

$$\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \Phi_3,$$

де Φ_1 є формулою

$$\forall \mathbf{x}_1 ((\dot{\exists} \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2 < \mathbf{x}_1) \dot{\vee} P(\mathbf{x}_1)),$$

Φ_2 є формулою

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x}_1 (((\dot{\exists} \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2) \wedge H(\mathbf{x}_1)) \rightarrow \\ \dot{\exists} \mathbf{x}_3 (\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_3 \wedge \forall \mathbf{x}_4 ((\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{x}_4 \leq \mathbf{x}_3) \rightarrow P(\mathbf{x}_4))))), \end{aligned}$$

а Φ_3 є формулою

$$\forall \mathbf{x}_1 (((\dot{\exists} \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2 < \mathbf{x}_1) \wedge \forall \mathbf{x}_3 (\mathbf{x}_3 < \mathbf{x}_1 \rightarrow H(\mathbf{x}_3))) \rightarrow P(\mathbf{x}_1)).$$

Тоді формула $\mathcal{I}$ є принципом FO індукції для $\{M\}$, оскільки вона подає принцип дійсної індукції з [19]. Більш детально, Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 подають умови (RI1), (RI2), (RI3) з [19, підрозділ 1.3] відповідно. База $\mathcal{I}$ подає умову, що $P(0)$ є істинним (де P є інтерпретацією P).

Приклад 3.2.10. Нехай Σ є сигнатурою частково впорядкованих множин і $\mathbf{M}$ є класом фундованих частково впорядкованих множин (де кожна непорожня підмножина має мінімальний елемент).

Як і вище, нехай $x_i < x_j$ є скороченням для

$$(x_i \leq x_j \wedge \neg(x_i = x_j)).$$

Тоді таке речення, що позначимо як $\mathcal{I}$,

$$\forall x_1 ((\forall x_2 (x_2 < x_1 \rightarrow H(x_2))) \rightarrow P(x_1))$$

є принципом FO індукції для $\mathbf{M}$, оскільки воно подає принцип фундової індукції для частково впорядкованих множин, що може бути сформульований як:

$$\frac{\forall x ((\forall y (y < x \rightarrow P(y))) \rightarrow P(x))}{\forall x P(x)}$$

Базою $\mathcal{I}$ є

$$\forall x_1 ((\forall x_2 (x_2 < x_1 \rightarrow \text{False})) \rightarrow P(x_1)).$$

Вона подає умову, що предикат P (інтерпретація P) є істинним для кожного мінімального елемента частково впорядкованої множини. Слід зауважити, що база не виділена явно у звичайному формулюванні засновку $\forall x ((\forall y (y < x \rightarrow P(y))) \rightarrow P(x))$, але вона може бути виділена шляхом окремого розгляду випадку, коли не існує y , такого, що $y < x$ (тобто коли x є мінімальним).

Приклад 3.2.11. Нехай $\mathbf{M}$ є класом повних за Дедекіндом [19] лінійно впорядкованих множин (тобто лінійно впорядкованих множин, де кожна непорожня обмежена згори підмножина має точну верхню межу [19]). Нехай $\mathcal{I}$ є формулою

$$\Phi'_1 \wedge \Phi_2 \wedge \Phi_3,$$

де Φ'_1 є формулою

$$\exists x_1 \forall x_2 (x_2 \leq x_1 \rightarrow P(x_1)),$$

і Φ_2 і Φ_3 визначені як у прикладі 3.2.9. Тоді формула $\mathcal{I}$ є принципом FO індукції для $\mathbf{M}$, оскільки вона подає *принцип лінійно впорядкованої індукції* з [19]. Більш детально, Φ'_1 , Φ_2 , Φ_3 подають умови (IS1), (IS2), (IS3) з [19, розділ 2] відповідно. База $\mathcal{I}$ подає умову, виражену Φ'_1 , а саме, що предикат P (інтерпретація P) є істинним на всіх елементах, що є меншими за певний елемент (x_1 в Φ'_1). Напівформально, індукційний перехід стосується елементів, що є більшими за цей елемент.

Зауваження 3.2.8. Деякі властивості принципів ФО індукції $\mathcal{I}$ для класів структур, визначених скінченними множинами універсальних аксіом (таких, як клас всіх частково впорядкованих множин) можна доводити шляхом застосування загальної форми теореми Ербрана [15, 136, 173] до (пренексної форми) $\mathcal{I}[H \mapsto P] \rightarrow \forall x P(x)$. Наприклад, цей підхід може бути використаний, щоб показати n -обмеженість шляхом подання $\mathcal{I}$ у логічно еквівалентній формі

$$Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_k y_k \bigwedge_{i=1}^L (G_i \wedge H(u_{i1}) \wedge \dots \wedge H(u_{im_i}) \rightarrow (b_i \wedge P(v_i))),$$

де $k \geq 0$, $L \geq 1$ є цілими числами, $Q_1, \dots, Q_k \in \{\exists, \forall\}$ є символами кванторів, $y_1, \dots, y_k \geq 0$ є різними змінними, $m_1, \dots, m_L \geq 0$ є цілими числами, v_i, u_{ij} для $i \in \{1, 2, \dots, L\}$ і $1 \leq j \leq m_i$ є змінними сорту D , такими, що для кожного i , такого, що $m_i > 0$ змінна v_i є серед $y_1, \dots, y_k$ і є зв'язаною квантором загальності, $G_1, \dots, G_L$ є безкванторними формулами з $F(\Sigma)$, а $b_1, \dots, b_L \in \{\text{True}, \text{False}\}$, і перетворення доказу Ербрана (пренексної форми) $\mathcal{I}[H \mapsto P] \rightarrow \forall x P(x)$ на доказ $\bigwedge_{i=0}^k \mathcal{I}[H \mapsto P_{i+1}, P \mapsto P_i]$.

Приклад 3.2.12. Нехай Σ є сигнатурою з одним сортом і одним бінарним предикатним символом $\leq$. Розглянемо такий приклад речення $\mathcal{I}$ в $F_{\rightarrow, \wedge, \forall}(\Sigma_H^P)$:

$$(\dot{\exists} x_1 \dot{\exists} x_2 (x_1 \leq x_2 \wedge P(x_2))) \wedge (\forall x_3 \forall x_4 (H(x_3) \rightarrow P(x_4))).$$

Тоді $\mathcal{I}$ є принципом ФО індукції для класу всіх частково впорядкованих множин. Нехай Σ' є розширенням Σ символом константи c , а $\mathcal{T}$ є такою скінченною множиною універсальних аксіом в сигнатурі Σ_H^P (аксіом часткового порядку):

$$\mathcal{T} = \{\forall x (x \leq x), \forall x_1 \forall x_2 (x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_1 \rightarrow x_1 = x_2), \\ \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_3 \rightarrow x_1 \leq x_3)\}.$$

Нехай $\mathcal{F}$ є формулою $\mathcal{I}[H \mapsto P] \rightarrow \forall x P(x)$, що розглядається як формула в $F(\Sigma_H^P)$. Нехай Φ в $F(\Sigma_H^P)$ є пренексною формою $\mathcal{F}$:

$$\forall x \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4 (x_1 \leq x_2 \wedge P(x_2) \wedge (P(x_3) \rightarrow P(x_4)) \rightarrow P(x)).$$

Тоді

$$\mathcal{T} \models \Phi.$$

Тоді Φ має доказ Ербрана [15, 136, 173]. Зокрема, маємо

$$\mathcal{T} \models (t_1 \leq t_2 \wedge P(t_2) \wedge (P(t_3) \rightarrow P(t_4))) \rightarrow P(t_0)$$

після підстановки $t_0 := x$, $t_1 := x_1$, $t_2 := x_2$, $t_3 := x_2$, $t_4 := x$ (без здійснення розгортання [136] у цьому випадку).

Нехай P_0, P_1, P_2 є новими унарними предикатними символами.

Для $i = 0, 1$ нехай $\Phi_i(t_1, t_2, t_3, t_4)$ (де t_j для $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ є термами) позначає формулу

$$t_1 \leq t_2 \wedge P_i(t_2) \wedge (P_{i+1}(t_3) \rightarrow P_i(t_4)).$$

Слід зауважити, що для будь-яких термів t, t' виконується

$$\mathcal{T} \models \Phi_0(t, t', x_2, x) \wedge \Phi_1(x_1, x_2, x_2, x) \rightarrow P_0(x),$$

оскільки

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \models & (t \leq t' \wedge P_0(t') \wedge (P_1(x_2) \rightarrow P_0(x))) \wedge \\ & (x_1 \leq x_2 \wedge P_1(x_2) \wedge (P_2(x_2) \rightarrow P_1(x))) \\ & \rightarrow P_0(x). \end{aligned}$$

Тоді, узявши у якості t, t' різні свіжі змінні, наприклад, $t := x_5$, $t' := x_6$ (що відповідають змінним, зв'язаним квантором загальності в Φ за винятком x), можна отримати, що

$$\mathcal{T} \models \forall x \forall x_5 \forall x_6 \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4 (\Phi_0(x_5, x_6, x_3, x_4) \wedge \Phi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow P_0(x)).$$

Останнє твердження може бути переформульоване як

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \models & (\exists x_5 \exists x_6 \forall x_3 \forall x_4 \Phi_0(x_5, x_6, x_3, x_4)) \wedge \\ & \wedge (\exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall x_4 \Phi_1(x_1, x_2, x_3, x_4)) \rightarrow \forall x P_0(x), \end{aligned}$$

з чого випливає, що

$$\mathcal{T} \models \left(\bigwedge_{i=0}^1 \mathcal{I}[\mathbb{N} \mapsto P_{i+1}, P \mapsto P_i] \right) \rightarrow \forall x P_0(x).$$

Тоді $\mathcal{I}$ є 1-обмеженим принципом FO індукції (для класу всіх частково впорядкованих множин) і, таким чином, $\mathcal{I}$ є тривіалізовним за твердженням 3.2.1.

Як показують наведені приклади, точні принципи FO індукції для класу структур $\mathbf{M}$ і сорту D надають спеціальні методи доведення універсальних властивостей елементів сорту D для $M \in \mathbf{M}$. Якщо необхідно довести універсальну властивість елементів структури з $\mathbf{M}$, можна використати принаймні такі підходи:

1. “*Пряма FO індукція*”: обрати принцип FO індукції для $\mathbf{M}$ і застосувати його до предикату на $M \in \mathbf{M}$;
2. “*Непряма FO індукція*”: звести задачу доведення того, що предикат P є всюди істинним на $M \in \mathbf{M}$ до задачі доведення того, що еквівалентний предикат Q (тобто $\forall y Q(y)$ тоді і тільки тоді, коли $\forall x P(x)$) є всюди істинним на пов’язаній структурі M' з класу з відомим принципом FO індукції.

У наступному пункті буде розглянуто останній (непрямий) підхід.

3.2.4. Непрямі принципи FO індукції

3.2.4.1. Ідея непрямих принципів індукції

Принцип фундовоаної індукції для частково впорядкованих множин *не* є безпосередньо застосовним до задачі доведення твердження

$$\forall x \in \mathbb{Z} P(x),$$

де P є предикатом на множині цілих чисел $\mathbb{Z}$ зі звичайним порядком, оскільки останній порядок на $\mathbb{Z}$ не є фундованим. Однак, цей принцип є безпосередньо застосовним до задачі доведення еквівалентного твердження

$$\forall y_1 \forall y_2 ((y_1, y_2) \in \omega \times \omega \Rightarrow P(y_1 - y_2)),$$

де $\omega \times \omega$ позначає множину всіх пар натуральних чисел з нулем разом з покомпонентним порядком $\leq_\times$:

$$(a, b) \leq_\times (c, d) \text{ тоді і тільки тоді, коли } a \leq c \text{ і } b \leq d,$$

де $\leq$ є звичайним порядком на натуральних числах з нулем, а “ $-$ ” є операцією віднімання, що приймає значення у цілих числах.

Порядок $\leq_{\times}$ на $\omega \times \omega$ є фундованим. Принцип фундової індукції, застосований до P має як засновок умову

$$\forall c \forall d ((c, d) \in \omega \times \omega \Rightarrow ((\forall a \forall b ((a, b) \in \omega \times \omega \wedge (a, b) <_{\times} (c, d) \Rightarrow P(a - b))) \Rightarrow P(c - d))), \quad (3.7)$$

де $<_{\times}$ є строгим порядком, породженим $\leq_{\times}$.

Розглянемо випадки $0 = c = d$, $0 = c < d$, $0 = d < c$ і $c \neq 0 \wedge d \neq 0$ окремо. Тоді умова (3.7) може бути переформульована як кон’юнкція таких умов:

- $P(0)$ (“база індукції”);
- $\forall d > 0 ((\forall b \geq 0 \ b < d \Rightarrow P(-b)) \Rightarrow P(-d))$ (“зворотний крок”);
- $\forall c > 0 ((\forall a \geq 0 \ a < c \Rightarrow P(a)) \Rightarrow P(c))$ (“прямий крок”).

Таким чином, напівформально, принцип фундової індукції (для частково впорядкованих множин) є опосередковано застосовним до задачі доведення твердження $\forall x \in \mathbb{Z} P(x)$ за допомогою відповідності між $\mathbb{Z}$ і $\omega \times \omega$, породженої операцією віднімання.

Узагальнюючи цей приклад, напівформально, щоб довести $\forall x \in X P(x)$, опосередковано використовуючи принцип індукції $\mathcal{I}$, спочатку необхідно виконати певні перестановки і, можливо, дублювання елементів X (у вищезгаданому прикладі під дублюванням мається на увазі, що різні пари $(y_1, y_2) \in \omega \times \omega$ подають одне і те ж число $x = y_1 - y_2$), таким чином, щоб передумови застосування $\mathcal{I}$ виконувались, а потім застосувати $\mathcal{I}$. У випадку, описаному у (3.7), такі дії визначаються за допомогою операції віднімання. У більш загальному випадку, вони можуть бути визначені у термінах бінарних відношень, як описано нижче.

Нехай X, Y є множинами. Будь-яке тотальне бінарне відношення $R \subseteq X \times Y$ може бути використане для перетворення предиката $P : X \rightarrow Bool$ на предикат $Q : Y \rightarrow Bool$, такий, що $(\forall y Q(y)) \Leftrightarrow (\forall x P(x))$ шляхом визначення для кожного $y \in Y$:

$$Q(y) \Leftrightarrow \forall x (x R y \Rightarrow P(x)). \quad (3.8)$$

Слід зауважити, що у випадку, коли R^{-1} є функціональним відношенням (і R є тотальним відношенням), тобто R^{-1} є графіком деякої сюр’єктивної часткової

функції $f : Y \rightarrow X$, визначення Q може бути переформульоване як

$$Q(y) \Leftrightarrow (\text{якщо } f(y) \text{ визначено, то } P(f(y)) \text{ є істинним}). \quad (3.9)$$

Тоді якщо принцип індукції $\mathcal{I}$ є застосовним до задачі доведення того, що предикат Q є всюди істинним (на його власній області визначення), то, напівформально, будемо вважати $\mathcal{I}$ *непрямим принципом індукції* для доведення того, що P є всюди істинним (на його власній області визначення) за допомогою відповідності R .

Таке поняття непрямого принципу індукції буде більш точно визначене у наступному підпункті (означення 3.2.6).

3.2.4.2. Визначення принципів непрямої індукції

Нехай Σ_1, Σ_2 є скінченними сигнатурами. Нехай D_1 та D_2 є виділеними сортами у Σ_1 та Σ_2 відповідно.

Означення 3.2.5. *Тотальна Σ_1, Σ_2 -відповідність для D_1, D_2 є трійкою (M_1, M_2, R) , де M_1 є Σ_1 -структурою, M_2 є Σ_2 -структурою, а R є тотальним бінарним відношенням між носіями сортів D_1, D_2 у M_1, M_2 відповідно (тобто $R \subseteq D_1 \times D_2$ і $\forall x \in D_1 \exists y \in D_2 x R y$, де для $i = 1, 2$, D_i позначає носій сорту D_i у M_i).*

Надалі сорти “ D_1, D_2 ” не будуть вказуватись явно, якщо вони будуть зрозумілими з контексту.

Зауваження 3.2.9. Умова тотальності відношення R в означенні 3.2.5 буде використана далі в означенні 3.2.6.

Зауваження 3.2.10. Тотальна Σ_1, Σ_2 -відповідність (M_1, M_2, R) для D_1, D_2 може розглядатись як $\Sigma_{1,2,R}$ -структура, де $\Sigma_{1,2,R}$ є диз’юнктним об’єднанням Σ_1 і Σ_2 разом з новим предикатним символом R для R , тобто $\Sigma_{1,2,R}$ має:

- сорт S^i для кожного $i \in \{1, 2\}$ і сорту S у Σ_i (верхній індекс буде використовуватись для позначення сортів і символів Σ_1 і Σ_2 у диз’юнктному об’єднанні);
- функціональний символ $s^i : A_1^i \times \dots \times A_n^i \rightarrow A^i$ для кожного $i \in \{1, 2\}$, $n \geq 0$ і функціонального символу $s : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A$ в Σ_i ;
- предикатний символ $s^i : A_1^i \times \dots \times A_n^i \rightarrow \text{Bool}$ для кожного $i \in \{1, 2\}$, $n \geq 0$ і предикатного символу $s : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \text{Bool}$ в Σ_i ;
- предикатний символ $R : D_1^1 \times D_2^2 \rightarrow \text{Bool}$.

При цьому, символ вигляду s^i для $i = 1, 2$ інтерпретується як операція/предикат s в M_i , а R інтерпретується як предикат R .

Нехай Σ_{2H}^P є розширенням сигнатури Σ_2 новими предикатними символами

$$P : D_2 \rightarrow \text{Bool}, H : D_2 \rightarrow \text{Bool},$$

яких немає серед символів Σ_1 та Σ_2 .

Нехай сигнатура $\Sigma_{1,2,R}$ є визначеною як у зауваженні 3.2.10.

Нехай $\Sigma_{1,2,RH^1}^{P^1}$ є розширенням $\Sigma_{1,2,R}$ новими унарними предикатними символами

$$P^1 : D_1^1 \rightarrow \text{Bool}, H^1 : D_1^1 \rightarrow \text{Bool}.$$

Нехай $\Sigma_{1,2,RH^{1,2}}^{P^{1,2}}$ є розширенням $\Sigma_{1,2,RH^1}^{P^1}$ двома додатковими новими предикатними символами

$$P^2 : D_2^2 \rightarrow \text{Bool}, H^2 : D_2^2 \rightarrow \text{Bool}.$$

Для будь-якої формули $\Phi \in F(\Sigma_{2H}^P)$ введемо такі позначення:

- $(\Phi)_{1,2,R}$ є формулою, що відповідає Φ в $F(\Sigma_{1,2,RH^{1,2}}^{P^{1,2}})$,
а саме, $(\Phi)_{1,2,R}$ є формулою в $F(\Sigma_{1,2,RH^{1,2}}^{P^{1,2}})$, отриманою з Φ шляхом:
 1. заміни s на s^2 для кожного (функціонального або предикатного) символу s в Σ_{2H}^P (включаючи P і H) і кожного входження s в Φ ,
 2. перейменування кожної змінної вигляду x^S та x_i^S , що зустрічається у Φ на x^{S^2} та $x_i^{S^2}$ відповідно для кожного сорту S у Σ_2 ;
- $\Phi[p(\cdot) \mapsto \forall x(R(x, \cdot) \rightarrow p^1(x)) \mid p = P, H]$ є формулою в $F(\Sigma_{1,2,RH^1}^{P^1})$, отриманою з $(\Phi)_{1,2,R}$ шляхом заміни $p^2(t)$ на

$$(\forall x^{D_1^1} (R(x^{D_1^1}, t) \rightarrow p^1(x^{D_1^1})))$$

для кожного терму t і кожного входження атомарної формули $p^2(t)$ в $(\Phi)_{1,2,R}$,
для кожного $p \in \{P, H\}$.

Нехай M_1 є деяким класом Σ_1 -структур.

Нехай R є деяким класом тотальних Σ_1, Σ_2 -відповідностей для D_1, D_2 .

Означення 3.2.6. Речення $\mathcal{I} \in F_{\rightarrow, \wedge, \vee}(\Sigma_{2H}^P)$ є (точним / тривіалізовним точним / нетривіалізовним) R -непрямим принципом FO індукції для M_1 , якщо

1. для кожного $M_1 \in M_1$ існують M_2 та R , такі, що $(M_1, M_2, R) \in R$;
2. $\mathcal{I}[p(\cdot) \mapsto \forall x(R(x, \cdot) \rightarrow p^1(x)) \mid p = P, H]$ є (точним / тривіалізовним точним / нетривіалізовним) принципом FO індукції для R і D_1^1 .

3.2.4.3. Приклад непрямого принципу FO індукції

Приклад 3.2.13. Нехай $M_1 = (\mathbb{Z}, \leq)$ є множиною цілих чисел зі звичайним порядком. Нехай $M_2 = (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \leq_\times)$ є множиною пар натуральних чисел з нулем (де $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$) з покомпонентним порядком $\leq_\times$, тобто $(a, b) \leq_\times (c, d)$ тоді і тільки тоді, коли $a \leq c$ і $b \leq d$, де $\leq$ є звичайним порядком на $\mathbb{N}_0$. Позначимо як $<_\times$ строгий порядок, що відповідає $\leq_\times$.

Нехай $R = \{(x, (y, z)) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \mid x = y - z\}$, де “ $-$ ” є звичайною операцією віднімання, що приймає значення у цілих числах. Оскільки R є тотальним бінарним відношенням між $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, то трійка (M_1, M_2, R) є тотальною Σ_1, Σ_2 -відповідністю, де Σ_1, Σ_2 є сигнатурами M_1, M_2 .

Нехай $\mathbf{M}_1 = \{M_1\}$, $\mathbf{R} = \{(M_1, M_2, R)\}$, а $\mathcal{I} \in F_{\rightarrow, \wedge, \forall}(\Sigma_{2\mathbf{H}}^{\mathbf{P}})$ є таким реченням (що подає принцип фундовоаної індукції):

$$\forall \mathbf{x}_1 ((\forall \mathbf{x}_2 ((\mathbf{x}_2 \leq \mathbf{x}_1 \wedge \neg(\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1)) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{x}_2))) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x}_1)),$$

Нехай $\mathcal{I}'$ є формулою $\mathcal{I}[p(\cdot) \mapsto \forall \mathbf{x}(\mathbf{R}(\mathbf{x}, \cdot) \rightarrow p^1(\mathbf{x})) \mid p = \mathbf{P}, \mathbf{H}]$.

Тоді $\mathcal{I}'$ є таким реченням у $F_{\rightarrow, \wedge, \forall}(\Sigma_{1,2,\mathbf{R}}^{\mathbf{P}^1})$:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x}_1 ((\forall \mathbf{x}_2 ((\mathbf{x}_2 \leq^2 \mathbf{x}_1 \wedge \neg(\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1)) \rightarrow \forall \mathbf{x}(\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) \rightarrow \mathbf{H}^1(\mathbf{x}))) \\ \rightarrow \forall \mathbf{x}(\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{x}))). \end{aligned}$$

Тоді $\mathbf{H}^1$ є негативним у $\mathcal{I}'$, $\mathbf{P}^1$ є позитивним у $\mathcal{I}'$, $\mathcal{I}'$ задовольняє умову 2 означення 3.2.2 (для символів властивості $\mathbf{P}^1$ і гіпотези $\mathbf{H}^1$). Тоді $\mathcal{I}'$ може бути інтерпретовано у структурі (M_1, M_2, R) , розширеній двома довільними фіксованими предикатами $H : \mathbb{Z} \rightarrow Bool$ і $P : \mathbb{Z} \rightarrow Bool$ для символів $\mathbf{H}^1$ і $\mathbf{P}^1$ як таку умову, де $\mathbf{x}_1$ замінено на (a, b) , а $\mathbf{x}_2$ замінено на (c, d) :

для кожної пари $(a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$,

якщо для кожної пари $(c, d) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ виконується:

$$(c, d) <_\times (a, b) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z} ((x, (c, d)) \in R \Rightarrow H(x))),$$

то $\forall x \in \mathbb{Z} ((x, (a, b)) \in R \Rightarrow P(x))$.

Розглядаючи випадки $0 = a = b$, $0 = a < b$, $0 = b < a$ і $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ окремо, можна переформулювати вищезазначену умову як кон'юнкцію таких умов:

1. $P(0)$ (“база індукції”);
2. $\forall b > 0 ((\forall d \geq 0 \ d < b \Rightarrow H(-d)) \Rightarrow P(-b))$ (“зворотний крок”);

3. $\forall a > 0 ((\forall c \geq 0 \ c < a \Rightarrow H(c)) \Rightarrow P(a))$ (“прямий крок”);
4. $\forall a, b > 0 (((\forall c \geq 0 \ c \leq a \Rightarrow H(c)) \wedge (\forall c \geq 0 \ c \leq b \Rightarrow H(-c))) \Rightarrow P(a - b))$
(умова 4 завжди виконується, якщо $P = H$).

Оскільки $\leq_{\times}$ є фундованим порядком на $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, коли P та H збігаються, з вищезгаданої умови випливає, що

$$\forall a \in \mathbb{N}_0 \ \forall b \in \mathbb{N}_0 \ \forall x \in \mathbb{Z} ((x, (a, b)) \in R \Rightarrow P(x))$$

за принципом фундовоаної індукції. Тоді з визначення R випливає, що $\forall x \in \mathbb{Z} P(x)$. Отже, $\mathcal{I}'$ є принципом ФО індукції для $\mathbf{R}$ і D_1^1 , де D_1 є сортом Σ_1 .

Таким чином, $\mathcal{I}$ є $\mathbf{R}$ -непрямим принципом ФО індукції для $\mathbf{M}_1$.

3.2.5. Непрямий принцип індукції для всіх частково впорядкованих множин

3.2.5.1. Відповідності впорядкованих множин

Нижче буде наведена теорема 3.2.1, що надає непрямий принцип ФО індукції для класу всіх частково впорядкованих множин. Її ідея полягає в тому, щоб застосувати до частково впорядкованої множини операцію, що узагальнює розгортання транзитивної системи (рисунок 3.3) і використати певний фіксований (прямий) принцип ФО індукції для частково впорядкованої множини, що відповідає результату такого розгортання.

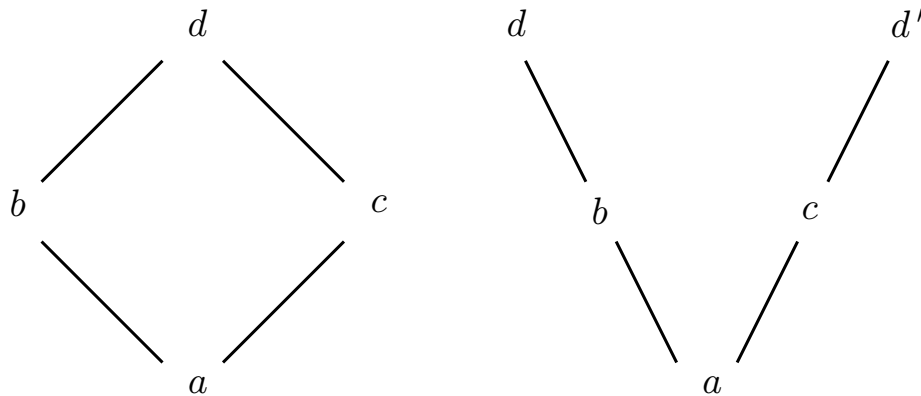


Рисунок 3.3 — *Ліва частина*: ілюстрація діаграми Гассе для часткового порядку: елементи b та c покривають a (і.е. $a < b$, $a < c$ і немає елементу між a та b і між a та c), а d покриває b та c . *Права частина*: розгортання діаграми у дерево.

Нехай Σ_{pos} є сигнатурою частково впорядкованих множин.

Означення 3.2.7. *Тотальна відповідність порядків* є тотальною $\Sigma_{pos}, \Sigma_{pos}$ -відповідністю (M_1, M_2, R) , такою, що M_1 і M_2 є частково впорядкованими множинами.

Будемо розглядати $\mathbf{R}$ -непрямі принципи ФО індукції, де $\mathbf{R}$ є деяким класом тотальних відповідностей порядків (таким чином, будемо розглядати метод доведення універсальних властивостей елементів частково впорядкованої множини за допомогою принципу індукції, що застосовується до предикатів на іншій частково впорядкованій множині, а не на структурі іншого типу).

Для будь-яких частково впорядкованих множин $A = (X, \leq)$, $B = (Y, \leq')$ будемо використовувати такі позначення:

- $A \cong B$ позначає, що A і B є *порядково ізоморфними*, тобто існує бієкція $f : X \rightarrow Y$, така, що $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq' f(x_2)$ і $y_1 \leq' y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2)$ для всіх $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$;
- $\min A = \{x \in X \mid \forall y \in X (y \leq x \Rightarrow y = x)\}$;
- $\max A = \{x \in X \mid \forall y \in X (x \leq y \Rightarrow x = y)\}$;
- $A^{op} = (X, \leq^{-1})$, тобто A^{op} є частково впорядкованою множиною з оберненим порядком.

Нехай $A_1 = (X_1, \leq_1)$, $A_2 = (X_2, \leq_2)$ є частково впорядкованими множинами.

Для $i = 1, 2$ нехай $\mathcal{C}_i$ є множиною всіх частково впорядкованих множин вигляду $(c, \leq_i \cap (c \times c))$, де c є непорожнім ланцюгом у $(X_i, \leq_i)$, тобто $\mathcal{C}_i$ складається з непорожніх ланцюгів у A_i , що розглядаються як породжені частково впорядковані підмножини A_i .

Нехай $ot : \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \rightarrow 2^{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2}$ (“тип порядку”) є функцією, такою, що для кожного $C \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$,

$$ot(C) = \{C' \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \mid C' \cong C\}.$$

Позначимо як $\mathcal{T}$ образ $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ при відображенні ot , тобто

$$\mathcal{T} = \{ot(C) \mid C \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2\}.$$

Означення 3.2.8. Відношення $R \subseteq X_1 \times X_2$ називається *ланцюговою бісимуляцією* між частково впорядкованими множинами $(X_1, \leq_1)$, $(X_2, \leq_2)$, якщо R є бісимуляцією [181, 179] між розміченими транзиційними системами $L_1 = (X_1, \mathcal{T}, \rightarrow_1)$ і $L_2 = (X_2, \mathcal{T}, \rightarrow_2)$, де відношення переходу $\rightarrow_i \subseteq X_i \times \mathcal{T} \times X_i$, $i = 1, 2$ є такими,

що для всіх $i = 1, 2$, $x, x' \in X_i$, $\alpha \in \mathcal{T}$,

$$x \xrightarrow{\alpha}_i x' \Leftrightarrow (\exists C \in \mathcal{C}_i \ x \in \min C \wedge x' \in \max C \wedge \alpha = ot(C)).$$

Зауваження 3.2.11. Якщо $R \subseteq X_1 \times X_2$ є тотальним і сюр'єктивним відношенням, умова означення 3.2.8 забезпечує, що для елементів x, x' в $(X_1, \leq_1)$ з'єднаних ланцюгом (тобто $x = \min C \wedge x' = \max C$ для деякого $C \in \mathcal{C}_1$) існують відповідні елементи у $(X_2, \leq_2)$ з'єднані порядково ізоморфним ланцюгом (тобто деяким $C' \in \mathcal{C}_2$, таким, що $ot(C') = ot(C)$) і навпаки.

Якщо $A = (X, \leq)$, $B = (Y, \leq')$ є частково впорядкованими множинами і $R \subseteq X \times Y$ є відношенням, позначимо як $R_B(A)$ образ A відносно R , що розглядається як породжена частково впорядкована підмножина B , тобто

$$R_B(A) = (R(X), \leq' \cap (R(X) \times R(X))),$$

де $R(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \ x R y\}$.

Означення 3.2.9. Відповідність функціонального ланцюгово бісимуляційного вклядення (FCBE відповідність) є тотальною відповідністю порядків (A, B, R) , такою, що R^{-1} є функціональною ланцюговою бісимуляцією (тобто ланцюговою бісимуляцією, що є графіком функції) між $R_B(A)$ і A .

Зауваження 3.2.12. З вимоги, що відношення R^{-1} є функціональним, випливає, що для відношення R умова (3.8) може бути виражена у формі (3.9).

Слід зауважити, що не всі пари частково впорядкованих множин A, B мають відповідність (A, B, R) , що задовольняє означення 3.2.9, як показує наведене нижче твердження.

Твердження 3.2.2. Нехай (A, B, R) є FCBE відповідністю, де A має найменший елемент. Тоді

1. якщо B є лінійно впорядкованою множиною, то A є лінійно впорядкованою множиною;
2. якщо B є нетеровою частково впорядкованою множиною (тобто B^{op} є фундованою частково впорядкованою множиною), то A є нетеровою частково впорядкованою множиною;
3. якщо B є фундованою частково впорядкованою множиною, то A є фундованою частково впорядкованою множиною.

Доведення. Нехай $(A, B, R) \in \text{FCBE}$ відповіднію, де A має найменший елемент, $A = (X, \leq)$, $B = (Y, \leq')$. Нехай $< i <'$ є строгими порядками, що відповідають $\leq i \leq'$ відповідно. Тоді $R \subseteq X \times Y$ є тотальним відношенням і R^{-1} є функціональною ланцюговою бісимуляцією між $R_B(A)$ і A .

1. Припустимо, що B є лінійно впорядкованою множиною. Нехай $x_1, x_2 \in X$. Оскільки R є тотальним відношенням, існують елементи y_1, y_2 в $R_B(A)$, такі, що $x_1 R y_1$ і $x_2 R y_2$. Тоді y_1 і y_2 є $\leq'$ -порівнюваними. Нехай $c = \{y_1, y_2\}$ і

$$C = (c, \leq' \cap (R(X) \times R(X)) \cap (c \times c)) = (c, \leq' \cap (c \times c)).$$

Розглянемо такі випадки.

- $y_1 = y_2$. Тоді $x_1 = x_2$ оскільки R^{-1} є функціональним відношенням.
- $y_1 <' y_2$. Оскільки R^{-1} є ланцюговою бісимуляцією між $R_B(A)$ і A , $y_1, y_2 \in R(X)$, $x_1 \in X$, c є непорожнім ланцюгом у $R_B(A)$, а також, $y_1 R^{-1} x_1$, $y_1 \in \min C$ і $y_2 \in \max C$, то існують елемент $x'_2 \in X$ і непорожній ланцюг c' в A , такі, що $C' = (c', \leq \cap (c' \times c')) \cong C$, $x_1 \in \min C'$, $x'_2 \in \max C'$ і $y_2 R^{-1} x'_2$. Тоді $x_1 < x'_2$, оскільки $C' \cong C$. Крім того, $x'_2 = x_2$, оскільки $y_2 R^{-1} x_2$ і R^{-1} є функціональним відношенням. Таким чином, $x_1 < x_2$.
- $y_2 <' y_1$. Оскільки R^{-1} є ланцюговою бісимуляцією між $R_B(A)$ і A , $y_1, y_2 \in R(X)$, $x_2 \in X$, c є непорожнім ланцюгом у $R_B(A)$, а також, $y_2 R^{-1} x_2$, $y_2 \in \min C$ і $y_1 \in \max C$, то існують елемент $x'_1 \in X$ і непорожній ланцюг c' в A , такі, що $C' = (c', \leq \cap (c' \times c')) \cong C$, $x_2 \in \min C'$, $x'_1 \in \max C'$ і $y_1 R^{-1} x'_1$. Тоді $x_2 < x'_1$, оскільки $C' \cong C$. Крім того, $x'_1 = x_1$, оскільки $y_1 R^{-1} x_1$ і R^{-1} є функціональним відношенням. Таким чином, $x_2 < x_1$.

У всіх випадках x_1 та x_2 є $\leq$ -порівнюваними. Отже, A є лінійно впорядкованою множиною.

2. Припустимо, що B є нетеровою частково впорядкованою множиною. Припустимо, що A не є нетеровою. Тоді існує непорожня підмножина $X_0 \subseteq X$, що не має максимального елемента. Нехай $Y_0 = \{y \in Y \mid \exists x \in X_0 x R y\}$. Тоді $Y_0 \neq \emptyset$, оскільки R є тотальним відношенням. Доведемо, що Y_0 не має максимального елемента. Припустимо, що $y \in Y_0$ є максимальним елементом Y_0 . Тоді за визначенням Y_0 існує $x \in X_0$, такий, що $x R y$. Оскільки x не є максимальним елементом у X_0 (за припущенням), то існує елемент $x' \in X_0$, такий, що $x < x'$. Нехай $c = \{x, x'\}$ і $C = (c, \leq \cap (c \times c))$. Оскільки R^{-1} є ланцюговою бісимуляцією між $R_B(A)$ і A , $y \in R(X)$, $x, x' \in X$, c є непорожнім ланцюгом у

A , $yR^{-1}x$ і $x \in \min C$, $x' \in \max C$, то існують елемент y' в $R_B(A)$ і непорожній ланцюг c' в $R_B(A)$, такі, що $C' = (c', \leq' \cap (R(X) \times R(X)) \cap (c' \times c')) \cong C$, $y \in \min C'$, $y' \in \max C'$ і $y'R^{-1}x'$. Тоді $y <' y'$, оскільки $C' \cong C$. Слід зауважити, що $y' \in Y_0$, оскільки $x'Ry'$. Тоді маємо суперечність з припущенням, що y є максимальним елементом Y_0 . Таким чином, Y_0 є непорожньою підмножиною у B , що не має максимального елементу. Це суперечить припущенню, що B є нетеровою частково впорядкованою множиною. Таким чином, A є нетеровою частково впорядкованою множиною.

3. Припустимо, що B є фундовою частково впорядкованою множиною. Припустимо, що A не є фундовою частково впорядкованою множиною. Тоді існує нескінченна спадна послідовність $x_n \in X$, $x \in \mathbb{N}_0$, тобто послідовність, така, що $x_{n+1} < x_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Нехай 0_A є найменшим елементом A (що існує за припущенням даного твердження). Нехай $c = \{0_A\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ і $C = (c, \leq \cap (c \times c))$. Оскільки R є тотальним відношенням, то існує елемент $y_* \in Y$, такий, що $0_A R y_*$. Оскільки R^{-1} є ланцюговою бісимуляцією між $R_B(A)$ і A , $y_* \in R(X)$, $0_A, x_0 \in X$, c є непорожнім ланцюгом у A , $y_* R^{-1} 0_A$, $0_A \in \min C$ і $x_0 \in \max C$, то існує непорожній ланцюг c' в $R_B(A)$, такий, що $C' = (c', \leq' \cap (R(X) \times R(X)) \cap (c' \times c')) \cong C$. Нехай f є ізоморфізмом порядку між C і C' і $y_n = f(x_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, $y_n \in Y$ і $y_{n+1} = f(x_{n+1}) <' f(x_n) = y_n$. Тоді y_n , $n \in \mathbb{N}_0$ є нескінченною спадною послідовністю у B , що суперечить припущенню про те, що B є фундовою. Таким чином, A є фундовою. $\square$

3.2.5.2. Непрямий принцип індукції

Теорема 3.2.1. *Існують підклас $\mathbf{R}$ класу всіх FCBE відвідностей і речення $\mathcal{I}$, такі, що $\mathcal{I}$ є нетривіалізовним точним $\mathbf{R}$ -непрямим принципом FO індукції для класу всіх частково впорядкованих множин.*

Зауваження 3.2.13. Твердження теореми 3.2.1 не впливає безпосередньо з прикладів 3.2.8 – 3.2.11 з підпункту 3.2.3.2. Більш детально, у зв'язку з твердженням 3.2.2, у якості $\mathcal{I}$ не може бути узятو принцип фундової (або нетерової) індукції для частково впорядкованих множин або один з відомих принципів індукції для лінійно впорядкованих множин.

Доведення теореми 3.2.1 надано у підпункті 3.2.5.3. У цьому доведенні у якості $\mathbf{R}$ узятو клас усіх тотальних відвідностей порядків (A, B, R) , таких,

що B є множиною усіх насичених ланцюгів у A які містять усі свої нижні межі (такі ланцюги впорядковані відношенням включення $\subseteq$), а відношення R є таким, що xRu тоді і тільки тоді, коли x є найбільшим елементом u у сенсі часткового порядку A . Слід зауважити, що якщо $(A, B, R) \in \mathbf{R}$ і $\leq$ позначає частковий порядок B (порядок включення), то для будь-яких a, b, c в B виконується $a \leq c \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq b \vee b \leq a$. Частково впорядковану множину з цією властивістю іноді називають *деревом* [100, 33] або *префіксно впорядкованою множиною* [22].

У якості непрямого принципу ФО індукції $\mathcal{I}$ у доведенні теореми 3.2.1 узято таке речення (формула (3.10) у підпункті 3.2.5.3):

$$(\forall x_1((\forall x_2(x_1 < x_2 \rightarrow H(x_2))) \rightarrow P(x_1))) \wedge (\forall x_1((H(x_1) \wedge (\dot{\exists} x_2 x_2 < x_1)) \rightarrow \\ \rightarrow (\dot{\exists} x_3(x_3 < x_1 \wedge \forall x_2((x_3 \leq x_2 \wedge x_2 < x_1) \rightarrow P(x_2)))))),$$

де $x_i < x_j$ є скороченням для $(x_i \leq x_j \wedge \dot{\neg}(x_i = x_j))$.

Зауваження 3.2.14. Як простий приклад, у випадку множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ зі звичайним порядком, вищезазначений непрямий принцип індукції породжує умови для доведення $\forall x \in \mathbb{Z} P(x)$, які можна переформулювати таким чином:

- (1) якщо $P(y)$ є істинним для всіх $y > x$, то $P(x)$ є істинним;
- (2) якщо $P(x)$, то $P(y')$ для всіх y' у деякому проміжку $[a, x)$, де $a < x$;
- (3) існує елемент x_0 , такий, що $P(x)$ є істинним для всіх $x \geq x_0$.

Використовуючи властивості цілих чисел, перші дві умови можна замінити на $\forall x (P(x) \rightarrow P(x-1))$, а умову (3) можна розглядати як базу індукції (аналогічно до бази індукції для принципу лінійно впорядкованої індукції з [19]).

3.2.5.3. Доведення теореми 3.2.1

Нехай $\mathbf{M}$ є класом всіх частково впорядкованих множин.

Зауваження 3.2.15. Як у пункті 3.2.2, будемо припускати, що частково впорядковані множини є непорожніми, тому всі елементи $\mathbf{M}$ мають непорожні носії.

Як у підрозділі 3.1, якщо $A = (X, \leq) \in \mathbf{M}$, то будемо позначати як $\mathcal{C}(A)$ множину всіх насичених вниз (згідно означення 3.1.2) ланцюгів у A .

Нехай $\mathbf{R}$ є класом всіх тотальних відповідностей порядків (A, B, R) , таких, що:

- B є множиною $\mathcal{C}(A)$, впорядкованою відношенням включення ($\subseteq$);
- $xRc \Leftrightarrow (x \in c \wedge \forall x' \in c x' \leq x)$ для всіх x в A і c в B , де $\leq$ є відношенням порядку в A (тобто xRc , якщо x є найбільшим елементом c).

Покажемо, що $\mathbf{R}$ є підкласом класу всіх FCBE відповідностей і що існує нетривіалізований точний $\mathbf{R}$ -непрямий принцип ФО індукції для $\mathbf{M}$ за допомогою кількох лем, що наведені нижче.

Лема 3.2.1. Нехай $A = (X, \leq)$ є частково впорядкованою множиною.

1. Якщо c є ланцюгом в A , то існує $c^* \in \mathcal{C}(A)$, такий, що $c \subseteq c^*$.
2. Якщо $c \in \mathcal{C}(A)$ і $x \in c$, то $\{x' \in c \mid x' \leq x\} \in \mathcal{C}(A)$.

Доведення. 1. Випливає з леми Цорна.

2. Випливає безпосередньо з визначення $\mathcal{C}(A)$.

□

Лема 3.2.2. Для будь-якого $A \in \mathbf{M}$ існують елемент $B \in \mathbf{M}$ і відношення R , такі, що $(A, B, R) \in \mathbf{R}$.

Доведення. Нехай $A = (X, \leq) \in \mathbf{M}$. Нехай $Y = \mathcal{C}(A)$, а $R \subseteq X \times Y$ є таким відношенням, що $xRc \Leftrightarrow (x \in c \wedge \forall x' \in c \ x' \leq x)$ для всіх $x \in X$, $c \in Y$. Перевіримо, що R є тотальним.

Нехай $x \in X$. За пунктом 1 леми 3.2.1 існує $c^* \in \mathcal{C}(A)$, такий, що $\{x\} \subseteq c^*$. Нехай $c = \{x' \in c^* \mid x' \leq x\}$. За пунктом 2 леми 3.2.1, $c \in \mathcal{C}(A)$. Крім того, $x \in c$ і $x' \leq x$ для всіх $x' \in c$, тому xRc . Таким чином, R є тотальним.

Нехай $B = (Y, \leq')$, де $\leq' \subseteq Y \times Y$ є відношенням, таким, що $y_1 \leq' y_2 \Leftrightarrow y_1 \subseteq y_2$ для всіх $y_1, y_2 \in Y$. Оскільки $A \in \mathbf{M}$, то маємо $X \neq \emptyset$, звідки $Y \neq \emptyset$, оскільки $R \subseteq X \times Y$ є тотальним. Тоді $B \in \mathbf{M}$ і (A, B, R) є тотальною відповідністю порядків. Тоді $(A, B, R) \in \mathbf{R}$ за визначенням $\mathbf{R}$. □

Лема 3.2.3. Нехай $(A, B, R) \in \mathbf{R}$, $A = (X, \leq)$, $B = (Y, \leq')$. Тоді для будь-яких елементів $x_1, x_2 \in X$ і $y_1, y_2 \in Y$, таких, що $x_1 R y_1$ і $x_2 R y_2$, виконуються такі властивості:

1. $y_1 \leq' y_2 \Rightarrow x_1 \leq x_2$;
2. $x_1 \leq x_2 \wedge (y_1 \leq' y_2 \vee y_2 \leq' y_1) \Rightarrow y_1 \leq' y_2$.

Доведення. Нехай x_1, x_2, y_1, y_2 є такими елементами, що $x_1 R y_1$ і $x_2 R y_2$. Тоді для $i = 1, 2$ маємо $x_i \in y_i \wedge (\forall x' \in y_i \ x' \leq x_i)$ за визначенням $\mathbf{R}$.

1. Якщо $y_1 \leq' y_2$, то $x_1 \in y_1 \subseteq y_2$, тому $x_1 \leq x_2$.

2. Припустимо, що $x_1 \leq x_2 \wedge (y_1 \leq' y_2 \vee y_2 \leq' y_1)$. Припустимо, що $y_1 \leq' y_2$ не виконується. Тоді $y_2 \subseteq y_1$. Доведемо, що $y_1 \subseteq y_2$.

Нехай $x \in y_1$. Оскільки y_1, y_2 є ланцюгами в A , то $y_2 \cup \{x\}$ є ланцюгом в A . Крім того, $x \leq x_1 \leq x_2 \in y_2$. Припустимо, що $x \notin y_2$. Оскільки y_2 є насиченим, то не існує елементу $x' \leq x$, такого, що $x' \in y_2$. Тоді $x \leq x'$ для всіх $x' \in y_2$, оскільки $x \in y_1$, $y_2 \subseteq y_1$ і y_1 є ланцюгом. Тоді $x \in y_2$, оскільки y_2 є насиченим вниз. Тоді маємо суперечність з припущенням $x \notin y_2$. Таким чином, $x \in y_2$.

Отже, $y_1 \subseteq y_2$. Тоді $y_1 = y_2$, тому $y_1 \leq' y_2$. Це суперечить припущенню про те, що $y_1 \leq' y_2$ не виконується. Таким чином, $y_1 \leq' y_2$. $\square$

Якщо $(A, B, R) \in \mathbf{R}$, $A = (X, \leq)$, $B = (Y, \leq')$ і $E \subseteq Y$, то будемо позначати

$$R^{-1}(E) = \{x \in X \mid \exists y \in E \ x R y\}.$$

Лема 3.2.4. Нехай $(A, B, R) \in \mathbf{R}$, $A = (X, \leq)$, $B = (Y, \leq')$, c є непорожнім ланцюгом у $R_B(A)$ і $c = R^{-1}(c)$. Тоді c є непорожнім ланцюгом у A , а $R \cap (c \times c)$ є графіком ізоморфізму порядку між $(c, \leq \cap (c \times c))$ і $(c, \leq' \cap (c \times c))$.

Доведення. Нехай $(A, B, R) \in \mathbf{R}$, $A = (X, \leq)$, $B = (Y, \leq')$, $c \neq \emptyset$ є ланцюгом у $R_B(A)$, $c = R^{-1}(c)$. Позначимо $A_0 = (c, \leq \cap (c \times c))$, $B_0 = (c, \leq' \cap (c \times c))$. Слід зауважити, що оскільки c є непорожньою підмножиною $R(X) \subseteq Y$, множина $c = R^{-1}(c)$ є непорожньою підмножиною X за визначенням $R_B(A)$, а A_0, B_0 є частково впорядкованими множинами. Нехай R_0 є таким бінарним відношенням між c і c :

$$R_0 = R \cap (c \times c).$$

Перевіримо, що R_0 є тотальним відношенням (між c і c). Нехай $x \in c = R^{-1}(c)$. Тоді існує $y \in c$, такий, що $x R y$. Тоді $x R_0 y$.

Перевіримо, що R_0 є функціональним. Нехай x, y_1, y_2 є такими елементами, що $x R_0 y_1$ і $x R_0 y_2$. Тоді $x \in R^{-1}(c)$, $y_1, y_2 \in c$, $x R y_1$, $x R y_2$. Оскільки c є ланцюгом, $y_1 \leq' y_2$ або $y_2 \leq' y_1$. Тоді за пунктом 2 леми 3.2.3, $y_1 \leq' y_2$ і $y_2 \leq' y_1$, тому $y_1 = y_2$.

Перевіримо, що R_0 є ін'єктивним. Нехай x_1, x_2, y є такими елементами, що $x_1 R_0 y$ і $x_2 R_0 y$. Тоді $x_1, x_2 \in R^{-1}(c)$, $y \in c$, $x_1 R y$ і $x_2 R y$. Оскільки $y \leq' y$, то за пунктом 1 леми 3.2.3, $x_1 \leq x_2$ і $x_2 \leq x_1$, тому $x_1 = x_2$.

Перевіримо, що R_0 є сюр'єктивним. Нехай $y \in c$. Оскільки $c \subseteq R(X)$, то існує $x \in X$, такий, що $x R y$. Тоді $x \in R^{-1}(c) = c$ і $x R_0 y$.

Отже, R_0 є графіком деякої бієктивної функції $f : c \rightarrow c$. Розглянемо f як відображення між частково впорядкованими множинами A_0 і B_0 .

Перевіримо, що f є ізотонним відображенням. Нехай $(x_1, x_2) \in \leq \cap (c \times c)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Тоді $x_1 \leq x_2$, $x_1 R_0 y_1$ і $x_2 R_0 y_2$, тому $y_1, y_2 \in \mathbf{c}$ і $x_1 R y_1$, $x_2 R y_2$. Оскільки $\mathbf{c}$ є ланцюгом, то $y_1 \leq' y_2 \vee y_2 \leq' y_1$. Тоді за пунктом 2 леми 3.2.3, $y_1 \leq' y_2$, тому

$$(f(x_1), f(x_2)) \in \leq' \cap (\mathbf{c} \times \mathbf{c}).$$

Перевіримо, що f^{-1} є ізотонним відображенням. Нехай $(y_1, y_2) \in \leq' \cap (\mathbf{c} \times \mathbf{c})$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Тоді $x_1 R_0 y_1$, $x_2 R_0 y_2$. Тоді $x_1, x_2 \in c$, $y_1, y_2 \in \mathbf{c}$, $x_1 R y_1$, $x_2 R y_2$ і $y_1 \leq' y_2$. Тоді $x_1 \leq x_2$ за пунктом 1 леми 3.2.3. Тоді маємо

$$(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) \in \leq \cap (c \times c).$$

Отже, f є ізоморфізмом порядку між A_0 і B_0 , а $R \cap (c \times \mathbf{c})$ є його графіком. Оскільки $\mathbf{c}$ є ланцюгом, то B_0 є лінійно впорядкованою множиною. Оскільки $A_0 \cong B_0$, то A_0 є лінійно впорядкованою множиною. Тоді c є (непорожнім) ланцюгом у A . $\square$

Лема 3.2.5. Нехай $(A, B, R) \in \mathbf{R}$, $A = (X, \leq)$, $B = (Y, \leq')$. Нехай c є непорожнім ланцюгом у A , $c^* \in Y$, $c \subseteq c^*$ і $\mathbf{c} = \{\{x' \in c^* \mid x' \leq x\} \mid x \in c\}$. Тоді $\mathbf{c}$ є непорожнім ланцюгом у $R_B(A)$ і $c = R^{-1}(\mathbf{c})$.

Доведення. Слід зауважити, що $\mathbf{c} \neq \emptyset$, оскільки $c \neq \emptyset$.

Для кожного $x \in c$ позначимо $c^x = \{x' \in c^* \mid x' \leq x\}$. Тоді $c^x \in Y$ для кожного $x \in c$ за пунктом 2 леми 3.2.1, оскільки $c \subseteq c^*$. Таким чином, $\mathbf{c} \subseteq Y$.

Перевіримо, що $\mathbf{c}$ є ланцюгом в B . Нехай $c_1, c_2 \in \mathbf{c}$. Тоді $c_1, c_2 \in Y$ і існують елементи $x_1, x_2 \in c$, такі, що $c_i = c^{x_i}$ для $i = 1, 2$. Оскільки c є ланцюгом, то $x_1 \leq x_2 \vee x_2 \leq x_1$. Якщо $x_1 \leq x_2$, то $c^{x_1} \subseteq c^{x_2}$, тому $c_1 \leq' c_2$. Якщо $x_2 \leq x_1$, то $c^{x_2} \subseteq c^{x_1}$, тому $c_2 \leq' c_1$. У будь-якому випадку, $c_1 \leq' c_2 \vee c_2 \leq' c_1$.

Перевіримо, що $x R c^x$ для кожного $x \in c$. Нехай $x \in c$. Тоді $x \in c^x$ (оскільки $c \subseteq c^*$) і $\forall x' \in c^x$ $x' \leq x$, тому $x R c^x$.

Перевіримо, що $\mathbf{c} \subseteq R(X)$. Нехай $c \in \mathbf{c}$. Тоді $c \in Y$ і $c = c^x$ для деякого $x \in c \subseteq X$. Тоді $x R c^x$ (як було показано вище), тому $c \in R(X)$.

Таким чином, $\mathbf{c}$ є непорожнім ланцюгом у $R_B(A)$.

Перевіримо, що $c \subseteq R^{-1}(\mathbf{c})$. Нехай $x \in c$. Тоді $x \in X$, $c^x \in \mathbf{c}$ і $x R c^x$ (як було показано вище). Таким чином, $x \in R^{-1}(\mathbf{c})$.

Перевіримо, що $R^{-1}(\mathbf{c}) \subseteq c$. Нехай $x \in R^{-1}(\mathbf{c})$. Тоді $x \in X$ і $x R y$ для деякого $y \in \mathbf{c}$. Тоді $y = c^{x_0}$ для деякого $x_0 \in c$. Тоді $x \in c^{x_0}$, оскільки $x R c^{x_0}$. Тоді $x \leq x_0$.

Крім того, $\forall x' \in c^{x_0} \ x' \leq x$, а також $x_0 \in c^{x_0}$, оскільки $x_0 \in c \subseteq c^*$ і $x_0 \leq x_0$. Тоді $x_0 \leq x$. Таким чином, $x = x_0 \in c$.

Отже, $c = R^{-1}(c)$. □

Лема 3.2.6. *Кожний кортеж $(A, B, R) \in \mathbf{R}$ є FCBE відповідністю.*

Доведення. Нехай $(A, B, R) \in \mathbf{R}$. Тоді (A, B, R) є тотальною відповідністю порядків. Тоді $A = (X, \leq)$, $B = (Y, \leq')$ для деяких $X, Y \neq \emptyset$ і часткових порядків $\leq, \leq'$ на X і Y відповідно. Крім того, $Y = \mathcal{C}(A)$ і $y_1 \leq' y_2 \Leftrightarrow y_1 \subseteq y_2$ для всіх $y_1, y_2 \in Y$, $R \subseteq X \times Y$, а також $xRc \Leftrightarrow (x \in c \wedge (\forall x' \in c \ x' \leq x))$ для всіх $x \in X, c \in Y$. Крім того, R є тотальним, тому $R(X) \neq \emptyset$ і $R_B(A) \in \mathbf{M}$.

Нехай $\leq''$ є частковим порядком $R_B(A)$, тобто $\leq'' = \leq' \cap (R(X) \times R(X))$.

Доведемо, що R^{-1} є функціональним. Припустимо, що $cR^{-1}x_1, cR^{-1}x_2$. Тоді $x_i \in c \wedge (\forall x' \in c \ x' \leq x_i)$ для $i = 1, 2$, тому $x_2 \leq x_1$ і $x_1 \leq x_2$, звідки $x_1 = x_2$.

Доведемо, що R^{-1} є ланцюговою бісимуляцією між $R_B(A)$ і A . Нехай $\mathcal{C}_1$ є множиною всіх частково впорядкованих множин вигляду $(c, \leq'' \cap (c \times c))$, де c є непорожнім ланцюгом у $R_B(A)$, а $\mathcal{C}_2$ є множиною всіх частково впорядкованих множин вигляду $(c, \leq \cap (c \times c))$, де c є непорожнім ланцюгом у A . Нехай $ot : \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \rightarrow 2^{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2}$ є функцією, такою, що

$$ot(c) = \{c' \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \mid c' \cong c\}$$

для всіх $c \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, а також

$$\mathcal{T} = \{ot(c) \mid c \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2\}.$$

Нехай $Q_1 = R(X)$, $Q_2 = X$. Нехай $L_i = (Q_i, \mathcal{T}, \rightarrow_i)$, $i = 1, 2$ є розміченими транзиційними системами, такими, що відношення переходу $\rightarrow_i \subseteq Q_i \times \mathcal{T} \times Q_i$, $i = 1, 2$ є такими, що для всіх $i = 1, 2, q, q' \in Q_i, \alpha \in \mathcal{T}$,

$$q \xrightarrow{\alpha}_i q' \Leftrightarrow (\exists C \in \mathcal{C}_i \ q \in \min C \wedge q' \in \max C \wedge \alpha = ot(C)).$$

Слід зауважити, що $R^{-1} \subseteq R(X) \times X = Q_1 \times Q_2$.

Спочатку доведемо, що R^{-1} є симуляцією між L_1 і L_2 .

Нехай $q_1, q'_1 \in Q_1, \alpha \in \mathcal{T}, q_2 \in Q_2$ є такими елементами, що $q_1 \xrightarrow{\alpha}_1 q'_1 \wedge q_1 R^{-1} q_2$. Оскільки $q_1 \xrightarrow{\alpha}_1 q'_1$, то існує $C_1 \in \mathcal{C}_1$, такий, що $q_1 \in \min C_1, q'_1 \in \max C_1$ і $\alpha = ot(C_1)$. Оскільки $C_1 \in \mathcal{C}_1$, то існує непорожній ланцюг c в $R_B(A)$, такий, що

$C_1 = (\mathbf{c}, \leq'' \cap (\mathbf{c} \times \mathbf{c}))$. Нехай $c = R^{-1}(\mathbf{c})$. Слід зауважити, що $C_1 = (\mathbf{c}, \leq' \cap (\mathbf{c} \times \mathbf{c}))$, оскільки $\mathbf{c} \subseteq R(X)$. Тоді з леми 3.2.4 випливає, що c є непорожнім ланцюгом у A , $C_2 = (c, \leq \cap (c \times c))$ є частково впорядкованою множиною, такою, що $C_2 \cong C_1$, і існує ізоморфізм порядку $f : C_2 \rightarrow C_1$, такий, що $R \cap (c \times \mathbf{c})$ є графіком f . Тоді $C_2 \in \mathcal{C}_2$ і $ot(C_2) = \alpha$.

Нехай $q'_2 = f^{-1}(q'_1)$. Тоді $q'_2 \in c \subseteq X = Q_2$ і $q'_1 R^{-1} q'_2$. Слід зауважити, що $q'_2 \in \max C_2$, оскільки $q'_1 \in \max C_1$ і f є ізоморфізмом порядку. Крім того, $q_1 \in \mathbf{c}$, $q_2 \in X$ і $q_1 R^{-1} q_2$. Тоді $q_2 R q_1$ і $q_2 \in R^{-1}(\mathbf{c}) = c$. Тоді $(q_2, q_1) \in R \cap (c \times \mathbf{c})$, тому $f(q_2) = q_1$. Тоді $q_2 \in \min C_2$, оскільки $q_1 \in \min C_1$ і f є ізоморфізмом порядку. Слід зауважити, що $q_2, q'_2 \in Q_2$. Тоді $q_2 \xrightarrow{\alpha}_2 q'_2$. Таким чином, $q'_2 \in Q_2$ і $q_2 \xrightarrow{\alpha}_2 q'_2 \wedge q'_1 R^{-1} q'_2$. Отже, R^{-1} є симуляцією між L_1 і L_2 .

Тепер доведемо, що R є симуляцією між L_2 і L_1 .

Нехай $q_2, q'_2 \in Q_2$, $\alpha \in \mathcal{T}$, $q_1 \in Q_1$ є такими елементами, що $q_2 \xrightarrow{\alpha}_2 q'_2 \wedge q_2 R q_1$. Оскільки $q_2 \xrightarrow{\alpha}_2 q'_2$, то існує $C_2 \in \mathcal{C}_2$, такий, що $q_2 \in \min C_2$, $q'_2 \in \max C_2$ і $\alpha = ot(C_2)$. Оскільки $C_2 \in \mathcal{C}_2$, то існує непорожній ланцюг c в A такий, що $C_2 = (c, \leq \cap (c \times c))$.

Слід зауважити, що q_1 є ланцюгом в A , оскільки $q_1 \in \mathcal{C}(A)$.

Нехай $c_0 = q_1 \cup c$. Тоді c_0 є ланцюгом в A , оскільки q_1, c є ланцюгами в A і для будь-яких $a \in q_1$ і $b \in c$ виконуються нерівності $a \leq q_2$ (оскільки $q_2 R q_1$) і $q_2 \leq b$ (оскільки $q_2 \in \min C_2$ і C_2 є лінійно впорядкованою множиною), звідки $a \leq b$. Тоді за пунктом 1 леми 3.2.1 існує $c^* \in \mathcal{C}(A)$, такий, що $c_0 \subseteq c^*$.

Нехай $\mathbf{c} = \{\{x' \in c^* \mid x' \leq x\} \mid x \in c\}$. Оскільки $c \subseteq c^*$, то за лемою 3.2.5 $\mathbf{c}$ є непорожнім ланцюгом у $R_B(A)$ і $c = R^{-1}(\mathbf{c})$. Нехай $C_1 = (\mathbf{c}, \leq'' \cap (\mathbf{c} \times \mathbf{c}))$. Тоді C_1 є частково впорядкованою множиною. Слід зауважити, що $C_1 = (\mathbf{c}, \leq' \cap (\mathbf{c} \times \mathbf{c}))$, оскільки $\mathbf{c} \subseteq R(X)$. З леми 3.2.4 випливає, що існує ізоморфізм порядку $f : C_2 \rightarrow C_1$, такий, що $R \cap (c \times \mathbf{c})$ є графіком f . Тоді $C_1 \in \mathcal{C}_1$ і $ot(C_1) = \alpha$.

Нехай $q'_1 = f(q'_2)$. Тоді $q'_1 \in \mathbf{c} \subseteq R(X) = Q_1$ і $q'_2 R q'_1$. Слід зауважити, що $q'_1 \in \max C_1$, оскільки $q'_2 \in \max C_2$ і f є ізоморфізмом порядку. Крім того, $q_2 R q_1$ і $q_2 \in c$, оскільки $q_2 \in \min C_2$. Слід зауважити, що

$$q_1 \subseteq \{x' \in q_1 \cup c \mid x' \leq q_2\} \subseteq \{x' \in c^* \mid x' \leq q_2\},$$

оскільки $q_2 R q_1$ і $c_0 \subseteq c^*$.

Перевіримо, що $\{x' \in c^* \mid x' \leq q_2\} \subseteq q_1$. Нехай $x' \in c^*$ і $x' \leq q_2$. Припустимо, що $x' \notin q_1$. Тоді $q_1 \cup \{x'\}$ є ланцюгом в A , тому не існує $y \in q_1$, такого, що

$y \leq x'$ (оскільки q_1 є насиченим ланцюгом), звідки $x' \leq y$ для всіх $y \in q_1$ (оскільки $q_1 \cup \{x'\}$ є ланцюгом), тому $x' \in q_1$, оскільки q_1 є насиченим вниз, що суперечить припущенню $x' \notin q_1$.

Таким чином, $q_1 = \{x' \in c^* \mid x' \leq q_2\} \in \mathbf{c}$, оскільки $q_2 \in c$. Тоді $(q_2, q_1) \in R \cap (c \times \mathbf{c})$, тому $f(q_2) = q_1$. Тоді $q_1 \in \min C_1$, оскільки $q_2 \in \min C_2$ і f є ізоморфізмом порядку. Слід зауважити, що $q_1, q'_1 \in Q_1$, тому $q_1 \xrightarrow{\alpha}_1 q'_1$. Тоді $q'_1 \in Q_1$ і $q_1 \xrightarrow{\alpha}_1 q'_1 \wedge q'_2 R q'_1$. Таким чином, R є симуляцією між L_2 і L_1 .

Отже, R^{-1} є бісимуляцією між L_1 і L_2 , тому R^{-1} є ланцюговою бісимуляцією між $R_B(A)$ і A . Крім того, R^{-1} є функціональним відношенням.

Таким чином, $(A, B, R) \in \text{FCBE}$ відповідністю. $\square$

Нехай Σ_1 і Σ_2 позначають (одну і ту ж) сигнатуру частково впорядкованих множин. Нехай D є єдиним спільним сортом Σ_1 і Σ_2 . Використовуючи позначення підпункту 3.2.4.2, нехай $\Sigma_{1,2,R}$ є сигнатурою, визначеною як у зауваженні 3.2.10 (де D_1 і D_2 збігаються з D), нехай Σ_{2H}^P є розширенням Σ_2 новими предикатними символами

$$P : D \rightarrow \text{Bool}, H : D \rightarrow \text{Bool},$$

а $\Sigma_{1,2,RH}^{P^1}$ є розширенням $\Sigma_{1,2,R}$ новими предикатними символами

$$P^1 : D^1 \rightarrow \text{Bool}, H^1 : D^1 \rightarrow \text{Bool}.$$

Нехай $\mathcal{I} \in F_{\rightarrow, \wedge, \vee}(\Sigma_{2H}^P)$ є формулою

$$\Phi_1 \wedge \Phi_2 \tag{3.10}$$

де Φ_1, Φ_2 визначені нижче, де “ $a := b$ ” означає “ a є скороченням для b ”, а $x_i < x_j$ є скороченням для $x_i \leq x_j \wedge \neg(x_i = x_j)$ для всіх $i, j \in \mathbb{N}_0$:

$$\Phi_1 := \forall x_1 ((\forall x_2 (x_1 < x_2 \rightarrow H(x_2))) \rightarrow P(x_1))$$

$$\Phi_2 := \forall x_1 ((H(x_1) \wedge (\exists x_2 x_2 < x_1)) \rightarrow \Phi_3(x_1))$$

$$\Phi_3(x_1) := \exists x_3 (x_3 < x_1 \wedge \forall x_2 ((x_3 \leq x_2 \wedge x_2 < x_1) \rightarrow P(x_2))).$$

Нехай $\mathcal{I}' \in F(\Sigma_{1,2,RH}^{P^1})$ є такою формулою:

$$\mathcal{I}[p(\cdot) \mapsto \forall x (R(x, \cdot) \rightarrow p^1(x)) \mid p = P, H]. \tag{3.11}$$

Слід зауважити, що $\mathcal{I}'$ є замкненою формулою, оскільки $\mathcal{I}$ є замкненою формулою. Також слід відмітити, що $\mathcal{I}' \in F_{\rightarrow, \wedge, \vee}(\Sigma_{1,2,R_{H^1}}^{P^1})$.

Лема 3.2.7. $\mathcal{I}'$ є принципом *FO* псевдоіндукції для $\mathbf{R}$ і D^1 .

Доведення. З визначення $\mathcal{I}'$ випливає, що H^1 є негативним у $\mathcal{I}'$, а P^1 є позитивним у $\mathcal{I}'$.

Нехай I є інтерпретацією $\Sigma_{1,2,R}$ в $\mathbf{R}$. Нехай $X = I(D^1)$, $Y = I(D^2)$, $R = I(R)$, $\leq = I(\leq^1)$, $\leq' = I(\leq^2)$, $A = (X, \leq)$, $B = (Y, \leq')$. Тоді A , B є частково впорядкованими множинами і $(A, B, R) \in \mathbf{R}$. Крім того, $X \neq \emptyset$, $Y = \mathcal{C}(A)$, $y_1 \leq' y_2 \Leftrightarrow y_1 \subseteq y_2$ для всіх $y_1, y_2 \in Y$ і $R \subseteq X \times Y$ є тотальним відношенням.

Перевіримо, що $\mathcal{I}'[H^1 \mapsto P^1] \models_I \forall x P^1(x)$. Нехай I' є інтерпретацією $\Sigma_{1,2,R_{H^1}}^{P^1}$, що погоджується з I на сортах і символах $\Sigma_{1,2,R}$. Припустимо, що $I'(\mathcal{I}'[H^1 \mapsto P^1])$ є істинним. Доведемо, що $I'(\forall x P^1(x))$ є істинним.

Нехай $P = I'(P^1)$. Тоді P є предикатом на X . Нехай $Q : Y \rightarrow \text{Bool}$ є предикатом, таким, що для кожного $y \in Y$ виконується

$$Q(y) \Leftrightarrow \forall x \in X (x R y \Rightarrow P(x)).$$

Нехай $S = \{x \in X \mid P(x)\}$ і $S' = \{y \in Y \mid Q(y)\}$. Тоді $S \subseteq X$ і $S' \subseteq \mathcal{C}(A)$.

Доведемо, що множина S є загально індуктивною відносно S' (у сенсі означення 3.1.3).

1. Нехай $c \in S'$ і x є найбільшим елементом c . Тоді $c \in \mathcal{C}(A)$, $x \in X$ і $x R c$, оскільки $(A, B, R) \in \mathbf{R}$. Крім того, $Q(c)$ є істинним, тому $x R c \Rightarrow P(x)$ є істинним, звідки $P(x)$ є істинним і $x \in S$.
2. Нехай $a \in \mathcal{C}(A)$ і $\forall b \in \mathcal{C}(A) (a \subset b \Rightarrow b \in S')$. Нехай $\Phi'_1 \in F(\Sigma_{1,2,R_{H^1}}^{P^1})$ є таким реченням

$$\forall x_1 ((\forall x_2 (x_1 <^2 x_2 \rightarrow \forall x (R(x, x_2) \rightarrow P^1(x)))) \rightarrow \forall x (R(x, x_1) \rightarrow P^1(x)))$$

(де $x_i <^2 x_j$ є скороченням для $x_i \leq^2 x_j \wedge \neg(x_i = x_j)$).

Тоді $I'(\Phi'_1)$ є істинним, оскільки $I'(\mathcal{I}'[H^1 \mapsto P^1])$ є істинним. Тоді

$$\forall y_1 \in Y ((\forall y_2 \in Y (y_1 \leq' y_2 \wedge y_1 \neq y_2 \Rightarrow Q(y_2))) \Rightarrow Q(y_1)).$$

Обираючи $y_1 = a$, можемо зробити висновок, що $a \in S'$.

3. Нехай $c \in S'$ є множиною, що не має найбільшого елемента (відносно $\leq$). Тоді c не є одноелементною множиною.

Нехай $\Phi'_2 \in F(\Sigma_{1,2,R_{H^1}}^{P^1})$ є таким реченням

$$\forall x_1 (((\forall x (R(x, x_1) \rightarrow P^1(x))) \wedge (\exists x_2 x_2 <^2 x_1)) \rightarrow \Phi'_3(x_1)),$$

де $\Phi'_3(x_1)$ є скороченням для

$$\exists x_3 (x_3 <^2 x_1 \wedge \forall x_2 ((x_3 \leq^2 x_2 \wedge x_2 <^2 x_1) \rightarrow \forall x (R(x, x_2) \rightarrow P^1(x)))).$$

Тоді $I'(\Phi'_2)$ є істинним, оскільки $I'(\mathcal{I}'[H^1 \mapsto P^1])$ є істинним. Тоді

$$\forall y_1 \in Y ((Q(y_1) \wedge (\exists y_2 \in Y y_2 \leq' y_1 \wedge y_2 \neq y_1)) \Rightarrow E(y_1)),$$

де $E : Y \rightarrow Bool$ є предикатом, таким, що для кожного $y_1 \in Y$, $E(y_1)$ є істинним тоді і тільки тоді, коли

$$\exists y_3 \in Y (y_3 \leq' y_1 \wedge y_3 \neq y_1 \wedge \forall y_2 \in Y (y_3 \leq' y_2 \wedge y_2 \leq' y_1 \wedge y_2 \neq y_1 \Rightarrow Q(y_2))).$$

Слід зауважити, що $c \neq \emptyset$, оскільки $c \in \mathcal{C}(A)$ і $X \neq \emptyset$. Оскільки c є непорожнім ланцюгом у A і не є одноелементною множиною, існують $x_1, x_2 \in c$, такі, що $x_1 \leq x_2$ і $x_1 \neq x_2$. Нехай $y_1 = c$ і $y_2 = \{x' \in c \mid x' \leq x_1\}$. Тоді $y_2 \subset y_1$. За пунктом 2 леми 3.2.1, $y_2 \in \mathcal{C}(A)$. Тоді $y_1, y_2 \in Y$, $Q(y_1)$ є істинним, $y_2 \leq' y_1$ і $y_2 \neq y_1$. Таким чином, $E(y_1)$ є істинним. Тоді існує $y_3 \in Y$, такий, що

$$y_3 \leq' y_1 \wedge y_3 \neq y_1 \wedge (\forall y_2 \in Y (y_3 \leq' y_2 \wedge y_2 \leq' y_1 \wedge y_2 \neq y_1 \Rightarrow Q(y_2))).$$

Нехай $a = y_3$. Тоді $a = y_3 \subset y_1 = c$ і для кожного $b \in Y$ виконується $a \subseteq b \subset c \Rightarrow Q(b)$. Крім того, виконується $Q(c)$ (і, таким чином, $Q(y_1)$). Таким чином, $a \in \mathcal{C}(A)$, $a \subset c$ і $\forall b \in \mathcal{C}(A) (a \subseteq b \subseteq c \Rightarrow b \in S')$.

Отже, множина S є загально індуктивною відносно S' . Тоді $S = X$ за лемою 3.1.1, тому виконується $\forall x \in X P(x)$. Тоді $I'(\forall x P^1(x))$ є істинним.

Отже, $\mathcal{I}'[H^1 \mapsto P^1] \models_I \forall x P^1(x)$.

Таким чином, $\mathcal{I}'$ є принципом ФО псевдоіндукції для $\mathbf{R}$ і D^1 . □

Лема 3.2.8. $\mathcal{I}'$ є принципом ФО індукції для $\mathbf{R}$ і D^1 .

Доведення. Випливає з леми 3.2.7 і визначення принципу ФО індукції. □

Лема 3.2.9. $\mathcal{I}'$ є точним принципом FO індукції для $\mathbf{R}$ і D^1 .

Доведення. Випливає безпосередньо з означення 3.2.3 і леми 3.2.8. $\square$

Лема 3.2.10. $\mathcal{I}'$ є нетривіалізовним точним принципом FO індукції для $\mathbf{R}$ і D^1 .

Доведення. Згідно леми 3.2.9, $\mathcal{I}'$ є точним принципом FO індукції для $\mathbf{R}$ і D^1 .

Нехай $X = \mathbb{Z}$ (множина цілих чисел), нехай $\leq$ є звичайним порядком на $\mathbb{Z}$, $A = (X, \leq)$, $Y = \mathcal{C}(A)$, $\leq'$ є бінарним відношенням на Y , таким, що $y_1 \leq' y_2$ тоді і тільки тоді, коли $y_1 \subseteq y_2$, а $R \subseteq X \times Y$ є таким відношенням, що $x R y$ тоді і тільки тоді, коли x є найбільшим елементом y у сенсі звичайного порядку на $\mathbb{Z}$. Нехай $B = (Y, \leq')$. Слід зауважити, що для кожного елементу $x \in X$,

$$\{x' \in \mathbb{Z} \mid x' \leq x\} \in \mathcal{C}(A), \quad x R \{x' \in \mathbb{Z} \mid x' \leq x\},$$

тому R є тотальним відношенням. Тоді $Y \neq \emptyset$, A, B є частково впорядкованими множинами, (A, B, R) є тотальною відповідністю порядків і $(A, B, R) \in \mathbf{R}$. Нехай I є інтерпретацією $\Sigma_{1,2,\mathbf{R}}$, такою, що $I(D^1) = X$, $I(D^2) = Y$, $I(\leq^1) = \leq$, $I(\leq^2) = \leq'$ і $I(R) = R$. Тоді I є інтерпретацією $\Sigma_{1,2,\mathbf{R}}$ в $\mathbf{R}$. Слід зауважити, що з $\mathcal{I}' \models_{I, H_0} \forall x P^1(x)$ випливає, що $H_0(x)$ є істинним для всіх x . Таким чином, $\mathcal{I}'$ є нетривіалізовним. $\square$

Тепер завершимо доведення.

Доведення теореми 3.2.1.

За лемою 3.2.6, $\mathbf{R}$ є підкласом класу всіх FCBE відповідностей. За лемою 3.2.2, для кожного $A \in \mathbf{M}$ існують B, R , такі, що $(A, B, R) \in \mathbf{R}$, а за лемою 3.2.10, $\mathcal{I}'$ є нетривіалізовним точним принципом FO індукції для $\mathbf{R}$ і D^1 . Тоді $\mathcal{I}$ є нетривіалізовним точним $\mathbf{R}$ -непрямим принципом FO індукції для $\mathbf{M}$. $\square$

3.2.6. Спільне узагальнення принципів фундової і дійсної індукції та його формалізація у системі інтерактивного доведення теорем

У цьому пункті наведено принцип FO індукції, що надає спільне узагальнення принципів фундової і дійсної індукції. Такий принцип формалізовано за допомогою системи інтерактивного доведення теорем Isabelle.

Для будь-якої частково впорядкованої множини $(X, \leq)$ і підмножини $A \subseteq X$ будемо використовувати такі позначення:

- $<$ є строгим порядком, що відповідає $\leq$;
- $[a, b]_{\leq}$ є множиною $\{x \in X \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$;
- $(a, b]_{\leq}$ є множиною $\{x \in X \mid a < x \wedge x \leq b\}$;

– $x = \inf_{\leq} A$ позначає, що x є точною нижньою межею A в $(X, \leq)$.

Означення 3.2.10. Частково впорядкована множина $(X, \leq)$ є *локально вільною від алмазів вгору*, якщо для кожного $x \in X$ існує підмножина $O \subseteq X$, така, що

- 1) $x \in O$;
- 2) $C \cap O \neq \emptyset$ для кожного непорожнього $\leq$ -ланцюга C , такого, що $\inf_{\leq} C = x$;
- 3) $(x, a]_{\leq} \cap O \neq \emptyset$ для кожного елементу $a \in X$, такого, що $x < a$;
- 4) O є вільною від алмазів (де O розглядається як породжена частково впорядкована підмножина).

Будемо казати, що частково впорядкована множина $(X, \leq)$ є *повною вниз*, якщо кожний непорожній ланцюг має точну нижню межу в $(X, \leq)$.

Твердження 3.2.3. (1) *Кожна фундована (зокрема скінченна) частково впорядкована множина є локально вільною від алмазів вгору і повною вниз.*
 (2) *Кожна лінійно впорядкована множина, що є повною ґраткою (зокрема дійсний проміжок $[0, 1]$ зі звичайним порядком) є локально вільною від алмазів вгору і повною вниз.*

Доведення. Формальні докази для формалізацій тверджень (1) і (2) в системі Isabelle/HOL наведені за посиланням [85, файл LDF_Induction.thy, рядки 154–166, 181–198]. $\square$

Нехай Σ є сигнатурою з одним сортом і одним бінарним предикатним символом $\leq$. Нехай P і H є новими унарними предикатними символами.

Нехай $\mathcal{I}_{hyb}$ є таким реченням у $F_{\wedge, \rightarrow, \forall}(\Sigma_{\mathcal{H}}^P)$:

$$\begin{aligned} & (\quad \forall x_1 (\forall x_2 (x_2 < x_1 \rightarrow H(x_2))) \rightarrow P(x_1)) \quad) \\ & \quad \wedge \quad (\quad \forall x_1 \forall x_2 \\ & (H(x_1) \wedge x_1 < x_2 \wedge (\forall x_3 ((\forall x_4 (x_1 < x_4 \wedge x_4 \leq x_2 \rightarrow x_3 \leq x_4)) \rightarrow x_3 \leq x_1))) \quad) \\ & \rightarrow (\quad \dot{\exists} x_4 (x_1 < x_4 \wedge x_4 \leq x_2 \wedge \forall x_5 (x_1 < x_5 \wedge x_5 \leq x_4 \rightarrow P(x_5))) \quad) \quad), \end{aligned}$$

де $x_i < x_j$ є скороченням для $x_i \leq x_j \wedge \dot{\neg}(x_i = x_j)$.

Твердження 3.2.4. *Для будь-якої інтерпретації I для Σ у класі локально вільних від алмазів вгору повних вниз частково впорядкованих множин виконуються такі властивості:*

- (1) $\mathcal{I}_{hyb}[H \mapsto P] \models_I \forall x P(x);$
 (2) $\forall x P(x) \models_I \mathcal{I}_{hyb}[H \mapsto P].$

Доведення. Формальні докази для формалізацій (1) і (2) у системі Isabelle/HOL наведені у [85, файл LDF_Induction.thy, рядки 208–220, 222–226]. $\square$

Теорема 3.2.2. $\mathcal{I}_{hyb}$ є принципом *FO* індукції для класу всіх локально вільних від алмазів вгору повних вниз частково впорядкованих множин.

Доведення. Випливає безпосередньо з визначення $\mathcal{I}_{hyb}$ і твердження 3.2.4. $\square$

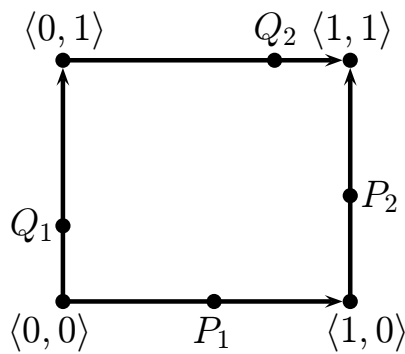


Рисунок 3.4 — Ілюстрація локально вільної від алмазів вгору частково впорядкованої множини з прикладу 3.2.14. Точки на сторонах квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ упорядковані частковим порядком $\preceq$. Стрілки позначають напрям впорядкування точок на кожній стороні. При цьому, $P_1 \prec P_2$ та $Q_1 \prec Q_2$, але P_i і $Q_j \in \preceq$ -непорівнюваними для $i, j \in \{1, 2\}$. Слід зауважити, що частково впорядкована множина не є (глобально) вільною від алмазів.

Приклад 3.2.14. Розглянемо множину A , що складається з точок на сторонах квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ на площині, що впорядкована відношенням $\preceq$ (рисунок 3.4), таким, що $P \preceq Q$, де $P = \langle x, y \rangle$ і $Q = \langle x', y' \rangle$, виконується тоді і тільки тоді, коли

$$(x \leq x' \wedge y \leq y') \quad \wedge \\
(\{P, Q\} \subseteq (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\})) \vee \{P, Q\} \subseteq ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, 1])).$$

Слід зауважити, що частково впорядкована множина $(A, \preceq)$ не є ні фундовою, ні нетеровою, ні лінійно впорядкованою, що виключає можливість прямого застосування кількох відомих принципів індукції до задачі доведення того, що заданий предикат на A є всюди істинним. Принцип відкритої індукції [174] є застосовним,

але він не може бути сформульований безпосередньо як принцип FO індукції через умову відкритості множини.

Для того, щоб перевірити, що частково впорядкована множина $(A, \preceq)$, проілюстрована на рисунку 3.4, є локально вільною від алмазів вгору, в означенні 3.2.10 можна узяти $O = \{y \in A \mid x \preceq y\}$ якщо $x \neq \langle 0, 0 \rangle$ та $O = A \setminus \{\langle 1, 1 \rangle\}$ якщо $x = \langle 0, 0 \rangle$. В обох випадках, умови означення 3.2.10 можуть бути перевірені безпосередньо. Також, дана частково впорядкована множина є повною вниз, тому теорема 3.2.2 може бути використана для доведення того, що заданий предикат є всюди істинним на A .

3.3. Висновки до розділу 3

У розділі було запропоновано спеціальні принципи індукції для доведення властивостей елементів переписувальних систем і частково впорядкованих множин, що не задовольняють припущенням про термінальність та зліченність.

У підрозділі 3.1 отримано зворотний принцип відкритої індукції (теорема 3.1.1) та виділено підклас класу повних частково впорядкованих множин (клас вільних від алмазів повних частково впорядкованих множин), для якого сформульовано принцип індукції, у якому не використовується безпосередньо топологічне припущення з принципу відкритої індукції (теорема 3.1.2). Такий принцип також може бути застосований до ациклічних АПС, що породжують відповідні частково впорядковані множини.

У підрозділі 3.2 було запропоновано загальний підхід до формулювання принципів індукції для різних структур і цей підхід було застосовано до частково впорядкованих множин. У контексті цього підходу було запропоновано $\mathbf{R}$ -непрямий принцип FO індукції для класу всіх частково впорядкованих множин, де $\mathbf{R}$ є підкласом класу FCBE відповідностей. Ідея такого непрямого індуктивного принципу полягає у зведенні задачі доведення $\forall x \in X P(x)$ для предиката P на частково впорядкованій множині $(X, \leq)$ до задачі доведення $\forall y \in Y Q(y)$ для пов'язаного предиката Q на поповненні розгортання $(X, \leq)$ у дерево (префіксно впорядковану множину), для вирішення якої можна використати модифікований варіант принципу індукції для вільних від алмазів повних частково впорядкованих множин з підрозділу 3.1.

Також, було запропоноване спільне узагальнення принципів фундованої і дійсної індукції (теорема 3.2.2), що може бути застосоване до локально вільних

від алмазів вгору повних вниз частково впорядкованих множин (або ациклічних АПС, що породжують такі частково впорядковані множини). Також, було отримано відповідну формалізацію в системі інтерактивного доведення теорем Isabelle [57]. Дана формалізація доступна за посиланням [85].

РОЗДІЛ 4. АНАЛІЗ АБСТРАКТНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

4.1. Розв’язна формальна теорія для абстрактних динамічних систем з неперервним часом

4.1.1. Попередні зауваження

Хоча у теорії АПС переписувальні системи розглядаються здебільшого без деталізації їх інтерпретації та структури елементів і правил переписування, для застосувань даної теорії є важливим виділення підходів до інтерпретації АПС та встановлення зв’язків між АПС і більш конкретними математичними моделями.

Типовими є інтерпретації АПС як абстракцій дискретних динамічних систем та дискретних моделей обчислень [202]. Однак, для інформатики також важливими є недискретні та дискретно-неперервні динамічні моделі [43, 6]. АПС можуть бути використані як абстракції недискретних динамічних моделей, наприклад, шляхом розгляду відношення редукції як відношення досяжності на станах таких систем, але при такому застосуванні АПС може не подавати часову тривалість процесів, які описує початкова динамічна модель. Тому є доцільним дослідження моделей проміжного рівня абстракції між АПС і конкретними динамічними моделями (наприклад, такими, як гібридні автомати [43]), що дозволяють врахувати часову тривалість процесів.

Підходи до визначення поняття динамічної системи на різних рівнях абстракції пропонувались в багатьох роботах, включаючи [10, 44, 178, 49, 186, 106, 103, 138, 209], що у багатьох випадках використовували аксіоматизації деяких властивостей систем, визначених диференціальними рівняннями [49, 50]. Один з таких підходів, що може бути пов’язаний з поняттям АПС, було запропоновано у [49]. Він включає визначення поняття процесу [49, 50] і системи розв’язків [49] О. Гаєка. Зв’язок цих понять з АПС може бути зручно пояснений у термінах вужчого поняття недетермінованої повної марківської системи (НПМС), що було запропоноване у [67, 68] на базі поняття системи розв’язків О. Гаєка. З НПМС асоційована множина траєкторій, що є частковими функціями на множині невід’ємних дійсних чисел (моментів часу), яка задовольняє умову замкненості відносно обмежень на часові проміжки (властивість CPR [67, 68]), недетерміновану марківську властивість [67, 68, 209] та умову повноти множини траєкторій (непорожні ланцюги траєкто-

рій у сенсі включення їх графіків мають точні верхні межі [67, 68]). Ці три умови можуть розглядатись як аналоги (адаптовані для випадку неперервного часу) таких трьох властивостей визначеної нижче множини (мови) дискретних послідовностей елементів $S(X, \rightarrow)$ для АПС. Нехай $(X, \rightarrow) \in \text{АПС}$, а $S(X, \rightarrow)$ є множиною усіх скінченних або нескінченних послідовностей $(a_i)_{i=0}^k$ елементів X , де $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, таких, що $a_i \rightarrow a_{i+1}$ для всіх i , таких, що $0 \leq i < k$. Тоді:

- 1) якщо $(a_i)_{i=0}^k \in S(X, \rightarrow)$, то $(a_{i+n})_{i=0}^{m-n} \in S(X, \rightarrow)$ для $0 \leq n \leq m < k$;
- 2) якщо $(a_i)_{i=0}^k, (b_j)_{j=0}^l \in S(X, \rightarrow)$, $k < \infty$ і $a_k = b_0$, то конкатенація послідовностей $a_0, a_1, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots$ (що отожднює перший і останній елемент послідовностей a_i і b_j) належить $S(X, \rightarrow)$;
- 3) якщо $(a_i)_{i=0}^\infty$ є індексованою сім'єю елементів X , такою, що $(a_i)_{i=0}^k \in S(X, \rightarrow)$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$, то $(a_i)_{i=0}^\infty \in S(X, \rightarrow)$.

Траєкторії НПМС можуть розглядатись як аналоги послідовностей з множини $S(X, \rightarrow)$, але вони є функціями на дійсних проміжках, а такі проміжки можуть бути використані для моделювання часових відрізків. Слід зауважити, що аналогічно до АПС, НПМС не накладає обмежень на структуру множини елементів/станів (і накладає слабкі обмеження на поведінку системи, дозволяє врахувати недетермінізм і існування часткових траєкторій [96]).

Приклади подання конкретних (недискретних) динамічних систем у формі НПМС або систем розв'язків О. Гаєка наведені у [67, 49, 50]. Слід зауважити, що при поданні конкретних динамічних систем у формі НПМС (або близьких до неї понять) є зручним таке припущення [209, 168]: кожна можлива реалізація поведінки системи може розглядатись як функція, що подає зміну глобального стану у неперервному часі. Таким чином, загальна поведінка системи може бути описана множиною функцій (траєкторій) з глобальної часової області у множину глобальних станів. Можлива інтерпретація недетермінованої марківської властивості полягає в тому [67, 68], що в будь-який фіксований момент часу множина можливих майбутніх продовжень траєкторії системи залежить тільки від її поточного стану і не залежить від шляху, за яким система досягла поточного стану. Визначення системи розв'язків О. Гаєка [49] включає подібну вимогу, але у ньому відсутній еквівалент вимоги повноти НПМС (що є корисною для встановлення зв'язку між локальними у часі і глобальними у часі властивостями поведінки системи). НПМС також близькі до поняття TCTL структури в сенсі [1].

У цьому підрозділі буде визначено формальну мову для виразу основних вла-

стивостей траєкторій НПМС, визначено інтерпретацію цієї мови і показано, що асоційована формальна теорія (множина речень, які є істинними в усіх інтерпретаціях) є розв'язною. Щоб довести розв'язність зазначеної теорії буде використано теорему М.О. Рабіна [170] про розв'язність одномісної теорії другого порядку дійсного сегмента $[0, 1]$ з квантифікацією за F_σ -підмножинами (зліченими об'єднаннями замкнених множин).

У наступних підрозділах надані додаткові результати, що стосуються аналізу НПМС як абстрактних не дискретних динамічних моделей, а також надані деякі результати стосовно зв'язків понять теорії АПС та моделей обчислень.

Результати підрозділу і решти розділу також описані у [95, 93, 94, 90, 110, 89, 147, 92, 72, 97, 112, 99, 71, 96, 111, 98, 88, 91].

4.1.2. Пов'язані роботи інших авторів

Методи доведення властивостей динамічних систем, що можуть поєднувати дискретну та неперервну поведінку вивчались у різних контекстах у теорії диференціальних рівнянь, теорії керування та інформатиці, наприклад, для диференціальних рівнянь з розривною правою частиною [34], систем з перемиканням [128], гібридних систем керування [210, 195, 144, 13, 43], гібридних автоматів [3, 2, 51, 132]. Для інформатики важливими лишаються проблеми надання засобів формальної специфікації поведінки таких систем та алгоритмів для перевірки їх властивостей, важливих для застосувань, коли це можливо. Одним з підходів до цих проблем є застосування спеціальних логік [7, 171, 17, 127] [165, 164, 163], що дозволяють формалізувати міркування про властивості систем з неперервним часом. Прикладами є темпоральна логіка дійсних чисел (англ. Temporal Logic of Reals) [7], числення тривалостей (англ. Duration Calculus) [17], одномісна логіка другого порядку над структурою булевих сигналів скінченної змінності (англ. Monadic Second Order Logic over the structure of boolean finitely variable signals) [171], темпоральна логіка дій (англ. Temporal Logic of Action) для неперервного часу [172], темпоральна логіка реального часу (англ. Real-time Temporal Logic) [9], диференціальна динамічна логіка (англ. Differential Dynamic Logic) [163]). Мови таких логік дозволяють формулювати специфікації поведінки і властивостей систем у випадках, важливих для застосувань. Однак, перевірка чинності формул у достатньо виразних логіках такого типу є нерозв'язною [171, 165, 164, 163] (що часто пов'язано з нерозв'язністю задач досяжності для різних класів гібридних систем), тому пошук розв'язних фрагментів таких логік лишається актуальною

проблемою. Слід зауважити, що розв'язні фрагменти зазначених логік часто стосуються систем, що задовольняють припущення про скінченну змінність (відсутність зенонівських поведінок) [54, 171], коли історія значень дискретних змінних системи може бути описана кусково-постійними функціями зі скінченною множиною розривів на кожному обмеженому проміжку часу. Хоча це припущення є адекватним для багатьох застосувань, спрощені математичні моделі деяких реальних систем не відповідають йому [119, 213]. Тому важливим є отримання засобів формалізації більш загальних систем з неперервним часом, що не задовольняють припущенню про скінченну змінність, але які, все ж, мають розв'язну асоційовану задачу перевірки їх базових властивостей.

4.1.3. Допоміжні позначення, означення, факти

Позначимо як $T = \mathbb{R}_+$ множину невід'ємних дійсних чисел (*моментів часу*). Позначимо як $\mathfrak{T}$ множину всіх проміжків (зв'язних підмножин) в T , що містять більше ніж один елемент (тобто які *не* є порожньою або одноелементною множиною). Будемо використовувати позначення $f : A \leadsto B$ для часткових функцій з множини A в множину B . Також, для часткової функції f будемо позначати:

- $f(x) \downarrow$ – f є визначеною на x ;
- $f(x) \downarrow = y$ – f є визначеною на x і $f(x) = y$;
- $f(x) \uparrow$ – f не є визначеною на x .

Нехай Q є деякою фіксованою множиною (що буде називатись множиною *станів*). Будемо позначати як Tr множину (деяких, можливо не всіх) функцій вигляду $s : A \rightarrow Q$, де $A \in \mathfrak{T}$. Елементи Tr будуть називатись (*частковими траєкторіями*).

Будемо використовувати терміни *НПМС* (недетермінована повна марківська система, англ. NCMS), властивість *замкненості* множини траєкторій *відносно власних обмежень* (англ. CPR property), *недетермінована марківська властивість* (англ. Markovian property), *LR подання НПМС* (англ. LR representation), *ліво-локальний предикат* (англ. left-local predicate), *право-локальний предикат* (англ. right-local predicate) відповідно до означень, наведених у [69].

Якщо $f_1, f_2 : T \leadsto Y$, де Y є деякою множиною, $A \subseteq T$ і $t \in T$, то будемо писати [69, 68]:

- $f_1 \dot{=}_A f_2$, якщо $f_1|_A = f_2|_A$ і $A \subseteq \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2)$;
- $f_1 \dot{=}_{t-} f_2$, якщо $t > 0 \wedge (\exists t' \in [0, t) f_1 \dot{=}_{(t', t]} f_2)$;
- $f_1 \dot{=}_{t+} f_2$, якщо $\exists t' > t f_1 \dot{=}_{[t, t')} f_2$.

Позначимо як $ST(Q)$ [69] множину всіх пар (s, t) , таких, що $s : A \rightarrow Q$ для деякої множини $A \in \mathfrak{T}$, такої, що $t \in A$ (тобто множина A є областю визначення s , A належить $\mathfrak{T}$ і містить елемент t , а значення s належать Q).

Позначимо як $LR(Q)$ [69] множину всіх пар (l, r) предикатів на $ST(Q)$, де $l : ST(Q) \rightarrow Bool$ є ліво-локальним предикатом, а $r : ST(Q) \rightarrow Bool$ є право-локальним предикатом.

Означення 4.1.1. *Найменше LR подання (l^*, r^*) для НПМС $\Sigma = (T, Q, Tr)$ – це LR подання [69] (l, r) для Σ , таке, що $l^*(s, t) \Rightarrow l(s, t)$ і $r^*(s, t) \Rightarrow r(s, t)$ для всіх $(s, t) \in ST(Q)$.*

Теорема 4.1.1. (1) *Кожна НПМС має єдине найменше LR подання.*

(2) *Якщо $\Sigma = (T, Q, Tr)$ є НПМС і (l^*, r^*) є її найменшим LR поданням, то для всіх пар $(s, t) \in ST(Q)$ виконується:*

$$\begin{aligned} l^*(s, t) &\Leftrightarrow t = 0 \vee (\exists t' \in (0, t) \ s|_{(t', t]} \in Tr \cup \{s|_{\{t\}}\}); \\ r^*(s, t) &\Leftrightarrow \exists t' \in (t, +\infty) \ s|_{[t, t')} \in Tr \cup \{s|_{\{t\}}\}. \end{aligned}$$

Доведення. (1). Нехай $\Sigma = (T, Q, Tr)$ є НПМС. Визначимо предикати $l^* : ST(Q) \rightarrow Bool$ та $r^* : ST(Q) \rightarrow Bool$ таким чином: для фіксованих s, t , значення $l^*(s, t)$ є істинним тоді і тільки тоді, коли $l(s, t)$ є істинним для кожного LR подання (l, r) для Σ , а $r^*(s, t)$ є істинним тоді і тільки тоді, коли $r(s, t)$ є істинним для кожного LR подання (l, r) для Σ . Слід зауважити, що поточкова кон'юнкція непорожньої множини ліво-локальних предикатів на $ST(Q)$ є ліво-локальним предикатом, а поточкова кон'юнкція непорожньої множини право-локальних предикатів на $ST(Q)$ є право-локальним предикатом. За теоремою [69, теорема 1], Σ має LR подання, тому l^* є ліво-локальним предикатом, а r^* є право-локальним предикатом, тому $(l^*, r^*) \in LR(Q)$. Крім того, для будь-яких $A \in \mathfrak{T}$ та $s : A \rightarrow Q$ має місце $l^*(s, t) \wedge r^*(s, t)$ для всіх $t \in A$ тоді і тільки тоді, коли $l(s, t) \wedge r(s, t)$ є істинним для всіх $t \in A$ і всіх LR подань (l, r) для Σ , тобто тоді і тільки тоді, коли $s \in Tr$. Тому (l^*, r^*) є LR поданням Σ і є найменшим LR поданням. Єдиність найменшого LR подання НПМС впливає безпосередньо з його визначення.

(2). Розглянемо предикати $l_0, r_0 : ST(Q) \rightarrow Bool$, такі, що для всіх s, t :

$$\begin{aligned} l_0(s, t) &\Leftrightarrow t = 0 \vee (\exists t' \in (0, t) \ s|_{(t', t]} \in Tr \cup \{s|_{\{t\}}\}); \\ r_0(s, t) &\Leftrightarrow \exists t' \in (t, +\infty) \ s|_{[t, t')} \in Tr \cup \{s|_{\{t\}}\}. \end{aligned}$$

З недетермінованої марківської властивості та властивості замкненості відносно власних обмежень множини Tr випливає, що l_0 є ліво-локальним предикатом, r_0 є право-локальним предикатом. Крім того, функція $s : T \rightarrow Q$, така, що $dom(s) \in \mathfrak{T}$ належить множині Tr тоді і тільки тоді, коли $l_0(s, t) \wedge r_0(s, t)$ є істинним для всіх $t \in dom(s)$. Тоді $(l_0, r_0) \in LR(Q)$ і $(l_0, r_0) \in LR$ поданням Σ . Крім того, для будь-якого LR подання (l, r) для Σ виконується $l_0(s, t) \Rightarrow l(s, t)$ та $r_0(s, t) \Rightarrow r(s, t)$ для кожної пари $(s, t) \in ST(Q)$, оскільки $s \in Tr$ тоді і тільки тоді, коли $l(s, t') \wedge r(s, t')$ для всіх $t' \in dom(s)$. Тоді (l_0, r_0) є найменшим LR поданням Σ . За пунктом (1) найменше LR подання Σ єдине, тому $l_0 = l_*$ і $r_0 = r_*$. $\square$

Для кожної НПМС Σ будемо позначати як $LR_{min}(\Sigma)$ найменше LR подання Σ . Будемо позначати як $LR^*(Q)$ множину всіх пар $(l, r) \in LR(Q)$, таких, що для кожної пари $(s, t) \in ST(Q)$:

- (1) якщо $l(s, t)$ є істинним і t є немінімальним елементом $dom(s)$, то існує елемент $t' \in (0, t)$, такий, що $l(s, t'') \wedge r(s, t'')$ для всіх $t'' \in (t', t)$;
- (2) якщо $r(s, t)$ є істинним і t є немаксимальним елементом $dom(s)$, то існує елемент $t' > t$, такий, що $l(s, t'') \wedge r(s, t'')$ для всіх $t'' \in (t, t')$.

Теорема 4.1.2. (1) Якщо $(l, r) \in LR^*(Q)$, то існує НПМС $\Sigma = (T, Q, Tr)$, така, що $(l, r) = LR_{min}(\Sigma)$.
 (2) Якщо $\Sigma = (T, Q, Tr) \in$ НПМС, то $LR_{min}(\Sigma) \in LR^*(Q)$.

Доведення. (1) Впливає безпосередньо з пункту (1) теореми [69, теорема 1] та теореми 4.1.1.

- (2) Нехай $\Sigma = (T, Q, Tr) \in$ НПМС і $(l^*, r^*) = LR_{min}(\Sigma)$. Тоді $(l^*, r^*) \in LR(Q)$, $(l^*, r^*) \in LR$ поданням Σ і з теореми 4.1.1(2) випливає, що $(l^*, r^*) \in LR^*(Q)$. $\square$

4.1.4. Формальна мова для опису властивостей траєкторій НПМС

Далі буде визначено формальну мову, в якій можуть бути виражені зв'язки між скінченними сім'ями траєкторій і НПМС. Зокрема, у цій мові можуть бути виражені умови часткового збігу траєкторій НПМС.

З урахуванням властивостей НПМС, що були зазначені у пункті 4.1.3, умова існування траєкторії НПМС, що збігається із заданою функцією на заданому проміжку часу або в околі заданого моменту часу може бути виражена за допомогою найменшого LR подання. У зв'язку з цим у запропонованій формальній мові бу-

дуть надані засоби позначення компонент найменших LR подань НПМС. Це буде реалізовано таким чином.

Нехай $\mathcal{T} = \{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{C} = \{C_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ є зліченими множинами імен змінних, що попарно не перетинаються (припускається, що символи в межах кожної множини розрізняються за їх індексами).

Нехай $\mathcal{A}$ є множиною всіх атомарних формул таких виглядів: $D_i(t_k)$, $E_{i,j}^-(t_k)$, $E_{i,j}^+(t_k)$, $L_{i,j}(t_k)$, $R_{i,j}(t_k)$, $t_i < t_j$, $t_i = t_j$, $t_i \in C_j$, $t_i \in F_j$ ($i, j, k \in \mathbb{N}$), де D_i для всіх $i \in \mathbb{N}$ і $E_{i,j}^-$, $E_{i,j}^+$, $L_{i,j}$, $R_{i,j}$ для всіх $i, j \in \mathbb{N}$ є різними унарними предикатними символами (що розрізняються їх індексами), а $<$, $=$, $\in$ є символами бінарних предикатів.

Нехай $\mathcal{L}$ є множиною (формальною мовою) всіх правильно побудованих формул, утворених з атомарних формул з $\mathcal{A}$, символів логічних сполучників ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) і імен змінних з $\mathcal{T}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, зв'язаних символами кванторів існування і загальності ($\exists t_i$, $\forall t_i$, $\exists C_i$, $\forall C_i$, $\exists F_i$, $\forall F_i$).

Нехай $\mathcal{L}^c$ є множиною всіх речень (замкнених формул) в $\mathcal{L}$.

Для визначення інтерпретації формул введемо такі поняття та позначення.

- $Cl(X)$ і $F_\sigma(X)$, де $X \subseteq \mathbb{R}$ є непорожньою множиною, позначають множини всіх замкнених підмножин і F_σ -підмножин множини X відповідно у сенсі індукованої топології на X ;
- $\mathcal{S}$ є множиною всіх алгебраїчних структур вигляду

$$(T, <, (D_i)_{i \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^-)_{i,j \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^+)_{i,j \in \mathbb{N}}, (L_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}, (R_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}),$$

де $T = \mathbb{R}_+$ є носієм, $<$ є відношенням звичайного строгого порядку на T , а D_i , $E_{i,j}^-$, $E_{i,j}^+$, $L_{i,j}$, $R_{i,j}$ для всіх $i, j \in \mathbb{N}$ є унарними предикатами на T ;

- $\models \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{L}$ є відношенням, що визначене таким чином: для кожної формули $\Phi \in \mathcal{L}$ і алгебраїчної структури

$$S = (T, <, (D_i)_{i \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^-)_{i,j \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^+)_{i,j \in \mathbb{N}}, (L_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}, (R_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{S},$$

$S \models \Phi$ виконується тоді і тільки тоді, коли універсальне замикання Φ виконується в структурі S в сенсі інтерпретації, для якої змінні $t_1, t_2, \dots$ приймають значення в T , змінні $C_1, C_2, \dots$ приймають значення в $Cl(T)$, змінні $F_1, F_2, \dots$ приймають значення в $F_\sigma(T)$, символ $<$ інтерпретується як відношення $<$ на T , символ $=$ інтерпретується як рівність на T , символ $\in$

інтерпретується як належність елемента множині, а символи D_i , $E_{i,j}^-$, $E_{i,j}^+$, $L_{i,j}$, $R_{i,j}$, для $i, j \in \mathbb{N}$ інтерпретуються як предикати D_i , $E_{i,j}^-$, $E_{i,j}^+$, $L_{i,j}$, $R_{i,j}$ на T відповідно;

- $\mathcal{M}$ є класом всіх пар індексованих сімей $((s_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}})$, таких, що існує множина Q (множина станів), така, що:

- (1) для кожного $i \in \mathbb{N}$, $s_i : T \rightarrow Q$ (i -та виділена траєкторія) є функцією, такою, що $\text{dom}(s_i) \in \mathfrak{T} \cup \{\emptyset\}$ (слід зауважити, що ніде не визначена функція не є траєкторією жодної НПМС, але, для зручності, така функція тут допускається),
- (2) для кожного $i \in \mathbb{N}$, $\Sigma_i \in \text{НПМС}$ з множиною станів Q (i -та виділена НПМС).

Елементи класу $\mathcal{M}$ будуть називатись *моделями* (формул).

Також, введемо таке поняття:

- *структура, асоційована з* $M = ((s_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{M}$ є єдиною структурою $(T, <, (D_i)_{i \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^-)_{i,j \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^+)_{i,j \in \mathbb{N}}, (L_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}, (R_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{S}$, такою, що:

- (1) $D_i(t) \Leftrightarrow t \in \text{dom}(s_i)$ для всіх $i, j \in \mathbb{N}$ і $t \in T$;
- (2) $E_{i,j}^-(t) \Leftrightarrow s_i \dot{=}_{t-} s_j$ для всіх $i, j \in \mathbb{N}$ і $t \in T$;
- (3) $E_{i,j}^+(t) \Leftrightarrow s_i \dot{=}_{t+} s_j$ для всіх $i, j \in \mathbb{N}$ і $t \in T$;
- (4) $L_{i,j}(t) \Leftrightarrow l_i^*(s_j, t)$ і $R_{i,j}(t) \Leftrightarrow r_i^*(s_j, t)$ для кожних $i, j \in \mathbb{N}$ і $t \in \text{dom}(s_j)$, де $(l_i^*, r_i^*) = LR_{\min}(\Sigma_i)$;
- (5) $\neg L_{i,j}(t)$ і $\neg R_{i,j}(t)$ для всіх $i, j \in \mathbb{N}$ і $t \in T$, таких, що $t \notin \text{dom}(s_j)$.

Структура, асоційована з M буде позначатись як $St(M)$.

Визначимо таке відношення:

$$\models^m \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{L}, \quad (4.1)$$

що для кожної формули $\Phi \in \mathcal{L}$ і моделі $M \in \mathcal{M}$, $M \models^m \Phi$ (Φ виконується в моделі M) тоді і тільки тоді, коли $St(M) \models \Phi$.

Нижче наведено приклад, що ілюструє мову $\mathcal{L}$.

Приклад 4.1.1. Розглянемо обчислювальну систему, що складається з трьох компонентів, два з яких (компонент 1 і компонент 2) поділяють спільний ресурс. Доступ до ресурсу може бути здійснено послідовно, а одночасний доступ з боку двох компонентів заборонений. Щоб гарантувати відсутність одночасного доступу до ресурсу, компоненти 1 і 2 обмінюються даними за допомогою спільної пам'яті і

реалізують варіант алгоритму Пітерсона [159]. Компоненти 1 і 2 можуть читати спільну пам'ять і отримувати інформацію про поточний стан іншого компонента у будь-який момент часу (можливо одночасно), але не можуть виконувати безпосередньо запис до спільної пам'яті. Замість цього, компонент 3 має виключний доступ для запису до спільної пам'яті і отримує запити на запис від компонентів 1 і 2. Якщо компонент 3 отримує один запит в один момент часу, вона задовольняє його негайно. Якщо він отримує два запити одночасно, він вибирає один з них (довільним чином), задовольняє його і відхиляє інший.

Наведемо модель поведінки описаної системи у формі множини траєкторій на множині моментів часу T у множину (глобальних) станів Q вигляду $A_1 \times A_2 \times A_3 \times M \times R$, де A_i , $i = 1, 2, 3$ є множиною (індивідуальних) станів компонента i , M є множиною станів спільної пам'яті, а R є множиною станів спільного ресурсу. Для кожного $q \in Q$ будемо позначати як $a_i(q)$ проекції q на координату i для $i = 1, 2, 3$, а як $m(q)$ будемо позначати проекцію q на 4-у координату.

Припустимо, що $A_1 = Bool$, $A_2 = Bool$, $A_3 = Bool \times Bool \times Bool \times Bool$, а $M = Bool$. Напівформально, елементи множин A_i , $i = 1, 2$ вказують, чи є компонент i зацікавленим у отриманні доступу до спільного ресурсу. Елементи M вказують, який з двох компонентів має пріоритет над іншим. Елементи A_3 мають вигляд (w_1, v_1, w_2, v_2) , де для $i = 1, 2$, $w_i = True$ означає, що компонент i надає запит компоненту 3 записати значення v_i у спільну пам'ять, а $w_i = False$ означає, що компонент i не надає запиту компоненту 3 змінити значення у спільній пам'яті. Для кожного $q \in A_3$ будемо позначати як $w_1(q)$, $v_1(q)$, $w_2(q)$, $v_2(q)$ проекції $a_3(q)$ на 1,2,3,4-у координату.

Для кожного предиката $P : Q \rightarrow Bool$ позначимо

$$Tr^P = \{s : A \rightarrow Q \mid A \in \mathfrak{T} \wedge \forall t \in A P(s(t))\}$$

і $\Sigma^P = (T, Q, \Sigma^P)$. Тоді Tr^P (як множина траєкторій) має властивість замкненості відносно власних обмежень, недетерміновану марківську властивість і властивість повноти, тому $\Sigma^P \in \text{НПМС}$.

Для кожного предиката $P : Q \rightarrow Bool$, позначимо як $\bar{P}$ предикат на Q , такий, що $\bar{P}(q) \Leftrightarrow \neg P(q)$ для всіх $q \in Q$.

Опишемо поведінку і властивість взаємного виключення описаної системи у термінах властивостей такого кортежу НПМС:

$$(\Sigma_i)_{i=1,2,\dots,14} = (\Sigma^{a_1}, \Sigma^{\bar{a}_1}, \Sigma^{a_2}, \Sigma^{\bar{a}_2}, \Sigma^m, \Sigma^{\bar{m}}, \Sigma^{w_1}, \Sigma^{\bar{w}_1}, \Sigma^{w_2}, \Sigma^{\bar{w}_2}, \Sigma^{v_1}, \Sigma^{\bar{v}_1}, \Sigma^{v_2}, \Sigma^{\bar{v}_2}).$$

Введемо такі імена для індексів компонент кортежу: $a_1 = 1, \bar{a}_1 = 2, a_2 = 3, \bar{a}_2 = 4, m = 5, \bar{m} = 6, w_1 = 7, \bar{w}_1 = 8, w_2 = 9, \bar{w}_2 = 10, v_1 = 11, \bar{v}_1 = 12, v_2 = 13, \bar{v}_2 = 14$.

Нехай $\Psi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ є такими формулами у мові $\mathcal{L}$ (нижче позначення вигляду $A := B$ означають, що A є позначенням для B):

$$\Psi := \forall t_1 \bigwedge_{k=1}^7 (\neg(L_{2k-1,1}(t_1) \wedge L_{2k,1}(t_1)) \wedge \neg(R_{2k-1,1}(t_1) \wedge R_{2k,1}(t_1)))$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(t_1) := & (\exists t_2 \exists t_3 \exists t_4 \ t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4 \wedge t_4 < t_1 \wedge \\ & (\forall t_5 (t_2 < t_5 \wedge (t_5 < t_1 \vee t_5 = t_1) \rightarrow L_{i_1,1}(t_5))) \wedge \\ & \wedge L_{w_1,1}(t_3) \wedge L_{v_1,1}(t_3) \wedge R_{v_1,1}(t_3) \wedge \\ & (\forall t_5 ((t_3 < t_5 \vee t_3 = t_5) \wedge (t_5 < t_1 \vee t_5 = t_1) \rightarrow R_{\bar{w}_1,1}(t_5))) \wedge (R_{\bar{i}_2,1}(t_4) \vee R_{m,1}(t_4))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t_1) := & (\exists t_2 \exists t_3 \exists t_4 \ t_2 < t_3 \wedge t_3 < t_4 \wedge t_4 < t_1 \wedge \\ & (\forall t_5 (t_2 < t_5 \wedge (t_5 < t_1 \vee t_5 = t_1) \rightarrow L_{i_2,1}(t_5))) \wedge \\ & \wedge L_{w_2,1}(t_3) \wedge L_{\bar{v}_2,1}(t_3) \wedge R_{\bar{v}_2,1}(t_3) \wedge \\ & (\forall t_5 ((t_3 < t_5 \vee t_3 = t_5) \wedge (t_5 < t_1 \vee t_5 = t_1) \rightarrow R_{\bar{w}_2,1}(t_5))) \wedge (R_{\bar{i}_1,1}(t_4) \vee R_{\bar{m},1}(t_4))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 := & \forall t_1 ((R_{\bar{w}_1,1}(t_1) \wedge R_{\bar{w}_2,1}(t_1) \rightarrow (R_{m,1}(t_1) \vee R_{\bar{m},1}(t_1))) \wedge \\ & \wedge (R_{w_1,1}(t_1) \wedge R_{\bar{w}_2,1}(t_1) \wedge R_{v_1,1}(t_1) \rightarrow R_{m,1}(t_1)) \wedge \\ & \wedge (R_{w_1,1}(t_1) \wedge R_{\bar{w}_2,1}(t_1) \wedge R_{\bar{v}_1,1}(t_1) \rightarrow R_{\bar{m},1}(t_1)) \wedge \\ & \wedge (R_{\bar{w}_1,1}(t_1) \wedge R_{w_2,1}(t_1) \wedge R_{v_2,1}(t_1) \rightarrow R_{m,1}(t_1)) \wedge \\ & \wedge (R_{\bar{w}_1,1}(t_1) \wedge R_{w_2,1}(t_1) \wedge R_{\bar{v}_2,1}(t_1) \rightarrow R_{\bar{m},1}(t_1))) . \end{aligned}$$

Визначимо:

$$\Phi := (\Phi_3 \wedge \Psi) \rightarrow (\neg(\exists t_1 \ \Phi_1(t_1) \wedge \Phi_2(t_1))). \quad (4.2)$$

Напівформально, можна інтерпретувати $\Phi_i(t_1)$, $i = 1, 2$ як твердження про те, що компонент i описаної вище системи може отримати доступ до спільного ресурсу у момент часу t_1 , і це відбувається тільки коли існують три попередні

моменти часу ($t_2 < t_3 < t_4 < t_1$), такі, що компонент i переходить в індивідуальний стан $True$ в момент часу t_2 (що вказує, що він зацікавлений у доступі до спільного ресурсу) і надсилає запит на запис до спільної пам'яті значення $True$, якщо $i = 1$, або $False$, якщо $i = 2$, до компоненту 3 в момент часу t_3 , а в момент часу t_4 , або компонент 3 — i не зацікавлений у доступі до спільного ресурсу, або значення у спільній пам'яті вказує на те, що компонент i має пріоритет над компонентом 3 — i . Також, Φ_3 виражає поведінку 3-го компонента.

Тоді Φ може бути інтерпретовано як твердження про те, що не існує моменту часу t_1 (що подається невід'ємним дійсним числом), у який компоненти 1 і 2 описаної вище системи можуть одночасно отримати доступ до спільного ресурсу.

4.1.5. Головний результат підрозділу

Позначимо:

$$Th = \{\Phi \in \mathcal{L}^c \mid \forall M \in \mathcal{M} \ M \models^m \Phi\}, \quad (4.3)$$

тобто Th є множиною (формальною теорією), що складається з усіх речень в $\mathcal{L}^c$, що є істинними в усіх моделях.

Зауваження 4.1.1. Th складається з речень Φ , що виконуються в усіх моделях $M \in \mathcal{M}$, які складаються з послідовності виділених траєкторій $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ і послідовності виділених НПМС $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$, за умови, що у Φ змінні $t_1, t_2, \dots$ приймають значення в T , змінні $C_1, C_2, \dots$ приймають значення в $Cl(T)$, змінні $F_1, F_2, \dots$ приймають значення в $F_\sigma(T)$, символи $< i =$ позначають звичайний строгий порядок і рівність на T , символ $\in$ позначає належність елемента множині, атомарна формула $D_i(t_k)$ позначає належність $t_k \in dom(s_i)$, формула $E_{i,j}^-(t_k)$ позначає $s_i \dot{=}_{t_k} s_j$, формула $E_{i,j}^+(t_k)$ позначає $s_i \dot{=}_{t_k} s_j$, а $L_{i,j}(t_k)$, $R_{i,j}(t_k)$ позначають, що $s_j(t_k)$ визначено і $l_i^*(s_j, t_k)$ і $r_i^*(s_j, t_k)$ є істинними, де $(l_i^*, r_i^*) = LR_{min}(\Sigma_i)$.

Напівформально, формули в Th виражають відношення між траєкторіями і НПМС, що виконуються для довільних виділених траєкторій і НПМС.

Теорема 4.1.3. *Формальна теорія Th є розв'язною.*

Для доведення теореми 4.1.3, спочатку введемо допоміжні означення і доведемо допоміжні леми.

Означення 4.1.2. Предикат $P : T \rightarrow Bool$ називається

- *право-стабільним*, якщо для кожного $t \in T$, якщо $P(t)$ є істинним, то існує елемент $t' > t$, такий, що $P(t')$ виконується для всіх $t'' \in [t, t')$;

– *ліво-стабільним*, якщо для кожного $t \in T \setminus \{0\}$, якщо $P(t)$ є істинним, то існує елемент $t' < t$, такий, що $P(t'')$ виконується для всіх $t'' \in (t', t]$.

Будемо називати *областю істинності* предиката множину значень, на яких він є істинним.

Лема 4.1.1. (1) *Область істинності право-стабільного предиката є F_σ -множиною.*

(2) *Область істинності ліво-стабільного предиката є F_σ -множиною.*

Доведення. (1) Нехай $P : T \rightarrow Bool$ є право-стабільним предикатом і $A = \{t \mid P(t)\}$ є областю істинності P . Тоді для кожного елементу $t \in T$ існує елемент $b(t)$, такий, що $b(t) > t$, і з того, що $P(t)$ є істинним випливає, що $P(t')$ є істинним для всіх $t' \in [t, b(t))$. Тоді $A = \bigcup_{t \in A} [t, b(t))$ є відкритою множиною сенсі топології прямої Зоргенфрея (базою цієї топології є множина напіввідкритих справа проміжків в $\mathbb{R}$) [208]. Остання є спадково ліндельовим простором (англ. hereditarily Lindelöf space) [117, розділ 9, приклад 6.3], з чого випливає, що кожне відкрите покриття A (як підпростору прямої Зоргенфрея) має зліченне підпокриття. Множини $\{[t, b(t)) \mid t \in A\}$ утворюють відкрите покриття A у цьому сенсі, тому існує зліченна підмножина $C \subseteq \{[t, b(t)) \mid t \in A\}$, така, що $A = \bigcup C$. Всі елементи C є F_σ множинами у сенсі топології на T , тому A є F_σ -множиною у тому ж сенсі.

(2) Аналогічне доведенню пункту (1).

□

У статті [170] М.О. Рабіна було доведено розв'язність теорії другого порядку дійсного сегмента $[0, 1]$ з квантифікацією за замкненими підмножинами і за F_σ -підмножинами. Цей факт буде використано далі.

Нехай $\mathcal{A}_<^2$ є множиною атомарних формул вигляду $t_i < t_j$, $t_i = t_j$, $t_i \in C_j$, або $t_i \in F_j$ ($i, j \in \mathbb{N}$), де $t_i \in \mathcal{T}$, $C_i \in \mathcal{C}$, $F_i \in \mathcal{F}$, а $<$, $=$, $\in$ є символами бінарних предикатів.

Нехай $\mathcal{L}_<^2$ є множиною всіх правильно побудованих формул, утворених з атомарних формул з $\mathcal{A}_<^2$, символів логічних сполучників ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) і імен змінних з $\mathcal{T}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, зв'язаних символами кванторів існування та загальності ($\exists t_i$, $\forall t_i$, $\exists C_i$, $\forall C_i$, $\exists F_i$, $\forall F_i$).

Для кожної непорожньої підмножини $X \subseteq \mathbb{R}$ нехай $Th_{<}^2(X)$ позначає множину всіх речень (замкнених формул) в $\mathcal{L}_<^2$, що виконуються в структурі $(X, <_X)$, де

$<_X$ є обмеженням звичайного порядку на дійсних числах на X , у сенсі інтерпретації, для якої змінні $t_1, t_2, \dots$ приймають значення в X , змінні $C_1, C_2, \dots$ приймають значення в $Cl(X)$, $F_1, F_2, \dots$ приймають значення в $F_\sigma(X)$, символ $<$ інтерпретується як $<_X$, символ $=$ інтерпретується як рівність на X , а символ $\in$ інтерпретується як належність елемента множині.

Лема 4.1.2. *Теорія $Th^2_{<}(T)$ є розв'язною.*

Доведення. Теорія $Th^2_{<}([0, 1])$ є розв'язною [170, теорема 2.9]. З цього випливає, що $Th^2_{<}([0, 1])$ є розв'язною, оскільки в мові $\mathcal{L}^2_{<}$ можна виразити такі предикати P_1, P_2 , області істинності інтерпретацій яких є $Cl([0, 1])$ і $F_\sigma([0, 1])$:

$$\begin{aligned} P_1(C_1) &:= \forall t_1 (t_1 \in C_1 \rightarrow (\exists t_2 t_1 < t_2)); \\ P_2(F_1) &:= \forall t_1 (t_1 \in F_1 \rightarrow (\exists t_2 t_1 < t_2)). \end{aligned}$$

Враховуючи, що будь-яка неперервна зростаюча бієкція $[0, +\infty) \rightarrow [0, 1)$ є гомеоморфізмом між T і $[0, 1)$ як топологічними просторами і є ізоморфізмом порядку між T і $[0, 1)$ як впорядкованими множинами, маємо, що $Th^2_{<}([0, 1]) = Th^2_{<}(T)$. Таким чином, $Th^2_{<}(T)$ є розв'язною. $\square$

Зафіксуємо деякі ін'єктивні обчислювані функції $\mathbf{d} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathbf{en} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathbf{ep} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathbf{l} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathbf{r} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathbf{e} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathbf{f} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ з областями значень, що попарно не перетинаються. Вони будуть використані для визначення відповідності предикатних символів $D_i, E_{i,j}^-, E_{i,j}^+, L_{i,j}, R_{i,j}$ в $\mathcal{L}$ і різних імен змінних $F_{\mathbf{d}(i,j)}, F_{\mathbf{en}(i,j)}, F_{\mathbf{ep}(i,j)}, F_{\mathbf{l}(i,j)}, F_{\mathbf{r}(i,j)}$ в $\mathcal{L}^2_{<}$, для визначення допоміжних імен змінних $F_{\mathbf{e}(i,j)}$, $i, j \in \mathbb{N}$ і для визначення відповідності імен змінних F_i в $\mathcal{L}$ і імен змінних $F_{\mathbf{f}(i)}$ в $\mathcal{L}^2_{<}$.

Для кожних $i, j, k \in \mathbb{N}$ визначимо такі $\mathcal{L}^2_{<}$ -формули:

$$\begin{aligned} Dom_j(F_{\mathbf{d}(j)}) &:= \\ &((\neg \exists t_1 t_1 \in F_{\mathbf{d}(j)}) \vee (\exists t_1 \exists t_2 (t_1 \in F_{\mathbf{d}(j)} \wedge t_2 \in F_{\mathbf{d}(j)} \wedge t_1 < t_2))) \wedge \\ &\wedge \forall t_1 \forall t_2 \forall t_3 (t_1 \in F_{\mathbf{d}(j)} \wedge t_2 \in F_{\mathbf{d}(j)} \wedge t_1 < t_3 \wedge t_3 < t_2 \rightarrow t_3 \in F_{\mathbf{d}(j)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Eq_{i,j,k}(F_{\mathbf{d}(i)}, F_{\mathbf{e}(i,i)}, F_{\mathbf{e}(i,j)}, F_{\mathbf{e}(j,i)}, F_{\mathbf{e}(j,k)}, F_{\mathbf{e}(i,k)}, F_{\mathbf{d}(j)}, F_{\mathbf{en}(i,j)}, F_{\mathbf{ep}(i,j)}) := \\
& \forall t_1 (t_1 \in F_{\mathbf{d}(i)} \rightarrow t_1 \in F_{\mathbf{e}(i,i)}) \wedge \\
& \wedge \forall t_1 (t_1 \in F_{\mathbf{e}(i,j)} \rightarrow t_1 \in F_{\mathbf{e}(j,i)}) \wedge \\
& \wedge \forall t_1 (t_1 \in F_{\mathbf{e}(i,j)} \wedge t_1 \in F_{\mathbf{e}(j,k)} \rightarrow t_1 \in F_{\mathbf{e}(i,k)}) \wedge \\
& \wedge \forall t_1 (t_1 \in F_{\mathbf{e}(i,j)} \rightarrow t_1 \in F_{\mathbf{d}(i)} \wedge t_1 \in F_{\mathbf{d}(j)}) \wedge \\
& \wedge \forall t_1 (t_1 \in F_{\mathbf{en}(i,j)} \leftrightarrow \\
& \quad \leftrightarrow \exists t_2 (t_2 < t_1 \wedge \forall t_3 (t_2 < t_3 \wedge (t_3 < t_1 \vee t_3 = t_1) \rightarrow t_3 \in F_{\mathbf{e}(i,j)}))) \wedge \\
& \wedge \forall t_1 (t_1 \in F_{\mathbf{ep}(i,j)} \leftrightarrow \\
& \quad \leftrightarrow \exists t_2 (t_1 < t_2 \wedge \forall t_3 ((t_1 < t_3 \vee t_1 = t_3) \wedge t_3 < t_2 \rightarrow t_3 \in F_{\mathbf{e}(i,j)})))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Lloc_{i,j,k}(F_{\mathbf{d}(i)}, F_{\mathbf{en}(i,j)}, F_{\mathbf{l}(k,i)}, F_{\mathbf{l}(k,j)}) := \\
& \forall t_1 (t_1 \in F_{\mathbf{en}(i,j)} \rightarrow (t_1 \in F_{\mathbf{l}(k,i)} \leftrightarrow t_1 \in F_{\mathbf{l}(k,j)})) \wedge \\
& \wedge \forall t_1 (t_1 \in F_{\mathbf{d}(i)} \wedge (\neg \exists t_2 (t_2 < t_1 \wedge t_2 \in F_{\mathbf{d}(i)})) \rightarrow t_1 \in F_{\mathbf{l}(k,i)}) \wedge \\
& \wedge \forall t_1 (\neg t_1 \in F_{\mathbf{d}(i)} \rightarrow \neg t_1 \in F_{\mathbf{l}(k,i)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Rloc_{i,j,k}(F_{\mathbf{d}(i)}, F_{\mathbf{ep}(i,j)}, F_{\mathbf{r}(k,i)}, F_{\mathbf{r}(k,j)}) := \\
& \forall t_1 (t_1 \in F_{\mathbf{ep}(i,j)} \rightarrow (t_1 \in F_{\mathbf{r}(k,i)} \leftrightarrow t_1 \in F_{\mathbf{r}(k,j)})) \wedge \\
& \wedge \forall t_1 (t_1 \in F_{\mathbf{d}(i)} \wedge (\neg \exists t_2 (t_1 < t_2 \wedge t_2 \in F_{\mathbf{d}(i)})) \rightarrow t_1 \in F_{\mathbf{r}(k,i)}) \wedge \\
& \wedge \forall t_1 (\neg t_1 \in F_{\mathbf{d}(i)} \rightarrow \neg t_1 \in F_{\mathbf{r}(k,i)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Min_{i,j}(F_{\mathbf{d}(j)}, F_{\mathbf{l}(i,j)}, F_{\mathbf{r}(i,j)}) := \\
& \forall t_1 (t_1 \in F_{\mathbf{l}(i,j)} \wedge t_1 \in F_{\mathbf{d}(j)} \wedge \exists t_2 (t_2 < t_1 \wedge t_2 \in F_{\mathbf{d}(j)}) \rightarrow \\
& \quad \rightarrow \exists t_3 (t_3 < t_1 \wedge \forall t_4 (t_3 < t_4 \wedge t_4 < t_1 \rightarrow t_4 \in F_{\mathbf{l}(i,j)} \wedge t_4 \in F_{\mathbf{r}(i,j)}))) \wedge \\
& \wedge \forall t_1 (t_1 \in F_{\mathbf{r}(i,j)} \wedge t_1 \in F_{\mathbf{d}(j)} \wedge \exists t_2 (t_1 < t_2 \wedge t_2 \in F_{\mathbf{d}(j)}) \rightarrow \\
& \quad \rightarrow \exists t_3 (t_1 < t_3 \wedge \forall t_4 (t_1 < t_4 \wedge t_4 < t_3 \rightarrow t_4 \in F_{\mathbf{l}(i,j)} \wedge t_4 \in F_{\mathbf{r}(i,j)})))
\end{aligned}$$

Напівформально, Dom_j виражає умову, що $F_{\mathbf{d}(j)}$ є областю визначення виділеної траєкторії j (є порожньою множиною або проміжком), $Eq_{i,j,k}$ призначена для опису умов збігу траєкторій в лівому і правому півоколі моменту часу, $Lloc_{i,j,k}$ і

$Rloc_{i,j,k}$ призначені для опису умов ліво-локальності та право-локальності предикатів, а $Min_{i,j}$ призначена для опису властивостей елементів $LR^*(Q)$ для довільної множини Q .

Для кожної формули $\Phi \in \mathcal{L}$ позначимо як $m(\Phi)$ максимальне значення серед значень усіх індексів i, j предикатних символів виглядів $D_i, E_{i,j}^-, E_{i,j}^+, L_{i,j}, R_{i,j}$, що зустрічаються у Φ , або 1, якщо такі символи не зустрічаються у Φ .

Для кожної формули $\Phi \in \mathcal{L}^c$ визначимо пов'язану формулу $Tra(\Phi)$ як вказано нижче. Нехай $\Phi \in \mathcal{L}^c$ і $u_1, u_2, \dots, u_m$ є зростаючою послідовністю всіх елементів множини

$$\{\mathbf{d}(j), \mathbf{l}(i, j), \mathbf{r}(i, j), \mathbf{ep}(i, j), \mathbf{en}(i, j), \mathbf{e}(i, j)\} \mid i, j \in \{1, 2, \dots, m(\Phi)\},$$

а Φ' є формулою, отриманою з Φ шляхом перейменування всіх змінних вигляду F_i на $F_{\mathbf{f}(i)}$ із наступною заміною всіх атомарних підформул Φ виглядів $D_i(t_k), E_{i,j}^-(t_k), E_{i,j}^+(t_k), L_{i,j}(t_k), R_{i,j}(t_k)$ ($i, j, k \in \mathbb{N}$) на $t_k \in F_{\mathbf{d}(i,j)}, t_k \in F_{\mathbf{en}(i,j)}, t_k \in F_{\mathbf{ep}(i,j)}, t_k \in F_{\mathbf{l}(i,j)}, t_k \in F_{\mathbf{r}(i,j)}$ відповідно.

Тоді $Tra(\Phi)$ позначає таку формулу:

$$\begin{aligned} & \forall F_{u_1} \forall F_{u_2} \dots \forall F_{u_m} \bigwedge_{j=1}^{m(\Phi)} Dom_j(F_{\mathbf{d}(j)}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m(\Phi)} \bigwedge_{j=1}^{m(\Phi)} \bigwedge_{k=1}^{m(\Phi)} (\\ & \quad Eq_{i,j,k}(F_{\mathbf{d}(i)}, F_{\mathbf{e}(i,i)}, F_{\mathbf{e}(i,j)}, F_{\mathbf{e}(j,i)}, F_{\mathbf{e}(j,k)}, F_{\mathbf{e}(i,k)}, F_{\mathbf{d}(j)}, F_{\mathbf{en}(i,j)}, F_{\mathbf{ep}(i,j)}) \wedge \\ & \quad \wedge Lloc_{i,j,k}(F_{\mathbf{d}(i)}, F_{\mathbf{en}(i,j)}, F_{\mathbf{l}(k,i)}, F_{\mathbf{l}(k,j)}) \wedge \\ & \quad \wedge Rloc_{i,j,k}(F_{\mathbf{d}(i)}, F_{\mathbf{ep}(i,j)}, F_{\mathbf{r}(k,i)}, F_{\mathbf{r}(k,j)}) \wedge \\ & \quad \wedge \bigwedge_{i=1}^{m(\Phi)} \bigwedge_{j=1}^{m(\Phi)} Min_{i,j}(F_{\mathbf{d}(j)}, F_{\mathbf{l}(i,j)}, F_{\mathbf{r}(i,j)}) \rightarrow \Phi' \end{aligned} \quad (4.4)$$

Слід зауважити, що $Tra(\Phi)$ є замкненою формулою у $\mathcal{L}_{<}^2$.

Напівформально, Tra перетворює $\mathcal{L}$ -речення у $\mathcal{L}_{<}^2$ -речення для того, щоб звести задачу перевірки належності речення до Th до задачі перевірки належності речення до $Th_{<}^2(T)$.

Позначимо $I_0 = \mathbb{N}$ і $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ нехай $\mathcal{S}_n$ позначає множину всіх структур

$$(T, <, (D_i)_{i \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^-)_{i,j \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^+)_{i,j \in \mathbb{N}}, (L_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}, (R_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{S}, \quad (4.5)$$

таких, що існує індексована сім'я $(E_{i,j})_{i,j \in I_n}$ предикатів на T , що задовольняє таким умовам:

- (1) для кожних $i, j \in I_n$ області істинності $D_i, E_{i,j}^-, E_{i,j}^+, L_{i,j}, R_{i,j}, E_{i,j}$ належать $F_\sigma(T)$;
- (2) для кожного $i \in I_n$ область істинності D_i належить $\mathfrak{T} \cup \{\emptyset\}$;
- (3) для кожних $i, j, k \in I_n$ і $t \in T$ виконуються такі властивості $E_{i,j}$:
 - $D_i(t) \Rightarrow E_{i,i}(t)$;
 - $E_{i,j}(t) \Rightarrow E_{j,i}(t)$;
 - $E_{i,j}(t) \wedge E_{j,k}(t) \Rightarrow E_{i,k}(t)$;
 - $E_{i,j}(t) \Rightarrow D_i(t) \wedge D_j(t)$;
 - $E_{i,j}^-(t) \Leftrightarrow \exists t' \in [0, t) \forall t'' \in (t', t] E_{i,j}(t'')$;
 - $E_{i,j}^+(t) \Leftrightarrow \exists t' > t \forall t'' \in [t, t') E_{i,j}(t'')$;
- (4) для кожних $i, j, k \in I_n$ і $t \in T$ виконуються такі властивості $L_{k,i}$:
 - $E_{i,j}^-(t) \Rightarrow (L_{k,i}(t) \Leftrightarrow L_{k,j}(t))$;
 - якщо t є мінімальним елементом $\{t' \mid D_i(t')\}$, то $L_{k,i}(t)$;
 - $\neg D_i(t) \Rightarrow \neg L_{k,i}(t)$;
- (5) для кожних $i, j, k \in I_n$ і $t \in T$ виконуються такі властивості $R_{k,i}$:
 - $E_{i,j}^+(t) \Rightarrow (R_{k,i}(t) \Leftrightarrow R_{k,j}(t))$;
 - якщо t є максимальним елементом $\{t' \mid D_i(t')\}$, то $R_{k,i}(t)$;
 - $\neg D_i(t) \Rightarrow \neg R_{k,i}(t)$;
- (6) для кожних $i, j \in I_n$ і $t \in T$ виконуються такі умови:
 - якщо $L_{i,j}(t)$ і t є немінімальним елементом $\{t' \mid D_j(t')\}$, то існує $t' \in [0, t)$, такий, що $L_{i,j}(t'') \wedge R_{i,j}(t'')$ для всіх $t'' \in (t', t)$;
 - якщо $R_{i,j}(t)$ і t є немаксимальним елементом $\{t' \mid D_j(t')\}$, то існує $t' > t$, такий, що $L_{i,j}(t'') \wedge R_{i,j}(t'')$ для всіх $t'' \in (t, t')$.

Лема 4.1.3. Нехай $\Phi \in \mathcal{L}^c$. Тоді $\text{Tra}(\Phi) \in \text{Th}_{<}^2(T)$ тоді і тільки тоді, коли $S \models \Phi$ для всіх $S \in \mathcal{S}_{\mathfrak{m}(\Phi)}$.

Доведення. Впливає безпосередньо з визначення Tra , $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}(\Phi)}$ і інтерпретації формул $\mathcal{L}_{<}^2$. $\square$

Лема 4.1.4. Нехай $\Phi \in \mathcal{L}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \mathfrak{m}(\Phi)$. Тоді $S \models \Phi$ для всіх $S \in \mathcal{S}_n$ тоді і тільки тоді, коли $S \models \Phi$ для всіх $S \in \mathcal{S}_0$.

Доведення. Спочатку припустимо, що $S \models \Phi$ для всіх $S \in \mathcal{S}_n$. Враховуючи визначення $\mathcal{S}_n$ (як вказано у (4.5)), маємо $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_n$. Тоді $S \models \Phi$ для всіх $S \in \mathcal{S}_0$.

Тепер припустимо, що $S \models \Phi$ для всіх $S \in \mathcal{S}_0$. Нехай

$$S' = (T, <, (D_i)_{i \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^-)_{i,j \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^+)_{i,j \in \mathbb{N}}, (L_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}, (R_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{S}_n$$

Тоді існує сім'я $(E_{i,j})_{i,j \in I_n}$ предикатів на T , така, що властивості (1)-(6) з визначення $\mathcal{S}_n$ виконуються для S' і $(E_{i,j})_{i,j \in I_n}$.

Доведемо, що $S' \models \Phi$.

Для кожних індексів $i, j \in I_n$ позначимо $D'_i = D_i$, $E_{i,j}'^- = E_{i,j}^-$, $E_{i,j}'^+ = E_{i,j}^+$. Для кожних $i, j \in \mathbb{N}$, таких, що $(i, j) \notin I_n \times I_n$, визначимо унарні предикати D'_i , $E_{i,j}'^-$, $E_{i,j}'^+$ на T , такі, що $\neg D'_i(t)$, $\neg E_{i,j}'^-(t)$, $\neg E_{i,j}'^+(t)$ для всіх $t \in T$.

Для кожних $i, j \in \mathbb{N}$ визначимо унарні предикати $L'_{i,j}$, $R'_{i,j}$ на T , такі, що

- якщо $(i, j) \in I_n \times I_n$, то $L'_{i,j} = L_{i,j}$, інакше для всіх $t \in T$, $L'_{i,j}(t)$ є істинним тоді і тільки тоді, коли t є мінімальним елементом області істинності D'_j ;
- якщо $(i, j) \in I_n \times I_n$, то $R'_{i,j} = R_{i,j}$, інакше для всіх $t \in T$, $R'_{i,j}(t)$ є істинним тоді і тільки тоді, коли t є максимальним елементом області істинності D'_j .

Нехай

$$S'' = (T, <, (D'_i)_{i \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}'^-)_{i,j \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}'^+)_{i,j \in \mathbb{N}}, (L'_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}, (R'_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}).$$

Тоді $S'' \in \mathcal{S}$. Структури S' і S'' мають один і той же носій. Також, оскільки має місце нерівність $n \geq m(\Phi)$, то всі предикатні символи, що зустрічаються у Φ мають однакові інтерпретації у S' і S'' , тому $S'' \models \Phi$ тоді і тільки тоді, коли $S' \models \Phi$.

Доведемо, що $S'' \in \mathcal{S}_0$. Нехай $(E'_{i,j})_{i,j \in I_0}$ є індексованою сім'єю предикатів, таких, що для кожних $i, j \in \mathbb{N}$, якщо $(i, j) \in I_0 \times I_0$, то $E'_{i,j} = E_{i,j}$, і якщо $(i, j) \notin I_0 \times I_0$, то $\neg E'_{i,j}(t)$ для всіх $t \in T$.

Слід зауважити, що властивості (1)-(3) і (6) з визначення $\mathcal{S}_0$ виконуються для S'' і $(E'_{i,j})_{i,j \in I_0}$. Доведемо властивість (4) з визначення $\mathcal{S}_0$ для S'' і $(E'_{i,j})_{i,j \in I_0}$.

Нехай $i, j, k \in I_0$ і $t \in T$.

- Доведемо, що $E_{i,j}'^-(t) \Rightarrow (L'_{k,i}(t) \Leftrightarrow L'_{k,j}(t))$. Припустимо, що $E_{i,j}'^-(t)$ є істинним. Тоді $i, j \in I_n$, тому $E_{i,j}^-(t)$. Якщо $k \in I_n$, то $L_{k,i}(t) \Leftrightarrow L_{k,j}(t)$, оскільки властивість (4) з визначення $\mathcal{S}_n$ виконується для S' і $(E_{i,j})_{i,j \in I_n}$, тому $L'_{k,i}(t) \Leftrightarrow L'_{k,j}(t)$. Інакше, $k \notin I_n$ і з властивості (3) з визначення $\mathcal{S}_n$ для S' і $(E_{i,j})_{i,j \in I_n}$ випливає, що t не є мінімальним елементом області істинності $E_{i,j}^-$ і не є мінімальним елементом області істинності $D_i = D'_i$ і $D_j = D'_j$. Тоді $\neg L'_{k,i}(t)$ і $\neg L'_{k,j}(t)$, звідки $L'_{k,i}(t) \Leftrightarrow L'_{k,j}(t)$. Отже, $E_{i,j}'^-(t) \Rightarrow (L'_{k,i}(t) \Leftrightarrow L'_{k,j}(t))$.

- Доведемо, що якщо t є мінімальним елементом $\{t' \mid D'_i(t')\}$, то $L'_{k,i}(t)$. Нехай t є мінімальним елементом $\{t' \mid D'_i(t')\}$. Тоді $D'_i(t)$ є істинним, тому $i \in I_n$ і t є мінімальним елементом $\{t' \mid D_i(t')\}$. Якщо $k \in I_n$, то $L_{k,i}(t)$ за властивістю (4) з визначення $\mathcal{S}_n$ для S' і $(E_{i,j})_{i,j \in I_n}$, тому $L'_{k,i}(t)$. Інакше, $k \notin I_n$ і t є мінімальним елементом $\{t' \mid D'_i(t')\}$, тому $L'_{k,i}(t)$. В обох випадках, $L'_{k,i}(t)$.
- Доведемо, що $\neg D'_i(t) \Rightarrow \neg L'_{k,i}(t)$. Припустимо, що $\neg D'_i(t)$. Якщо $i \in I_n$ і $k \in I_n$, то $\neg D_i(t) \Rightarrow \neg L_{k,i}(t)$, $D_i = D'_i$ і $L_{k,i} = L'_{k,i}$, тому $\neg L'_{k,i}(t)$. Інакше, $i \notin I_n$ або $k \notin I_n$, звідки $\neg L'_{k,i}(t)$, оскільки t не є елементом області істинності D'_i . В обох випадках, $\neg L'_{k,i}(t)$.

Таким чином, властивість (4) з визначення $\mathcal{S}_0$ виконується для S'' і $(E'_{i,j})_{i,j \in I_0}$. Аналогічно, має місце властивість (5) з визначення $\mathcal{S}_0$ для S'' і $(E'_{i,j})_{i,j \in I_0}$.

Отже, $S'' \in \mathcal{S}_0$. Тоді $S'' \models \Phi$. Таким чином, $S' \models \Phi$. Оскільки S' є довільною, то маємо $S' \models \Phi$ для всіх $S' \in \mathcal{S}_n$.

□

Лема 4.1.5. $St(M) \in \mathcal{S}_0$ для кожного $M \in \mathcal{M}$.

Доведення. Нехай $M = ((s_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{M}$ і Q є (спільною) множиною станів всіх Σ_i , $i \in \mathbb{N}$. Нехай

$$S = St(M) = (T, <, (D_i)_{i \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^-)_{i,j \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^+)_{i,j \in \mathbb{N}}, (L_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}, (R_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}).$$

Тоді $S \in \mathcal{S}$. Доведемо, що $S \in \mathcal{S}_0$. Для кожного $i \in \mathbb{N}$ нехай $(l_i^*, r_i^*) = LR_{min}(\Sigma_i)$. За теоремою 4.1.2(2), $(l_i^*, r_i^*) \in LR^*(Q)$. За визначенням $St(M)$, для всіх $i, j \in \mathbb{N}$ і $t \in T$, $D_i(t) \Leftrightarrow t \in dom(s_i)$, $E_{i,j}^-(t) \Leftrightarrow s_i \dot{-}_t s_j$ і $E_{i,j}^+(t) \Leftrightarrow s_i \dot{+}_t s_j$. Крім того, якщо $s_j(t)$ є визначеним, то $L_{i,j}(t) \Leftrightarrow l_i^*(s_j, t)$ і $R_{i,j}(t) \Leftrightarrow r_i^*(s_j, t)$, а якщо $s_j(t)$ не є визначеним, то $\neg L_{i,j}(t)$ і $\neg R_{i,j}(t)$.

Для кожного $t \in T$ нехай $V(t) = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid E_{i,j}^-(t) \vee E_{i,j}^+(t)\}$ і $V^T(t)$ є транзитивним замиканням відношення $V(t)$. Нехай $(E_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ є індексованою сім'єю предикатів на T , таких, що $E_{i,j}(t) \Leftrightarrow (i, j) \in V^T(t)$ для всіх $i, j \in \mathbb{N}$ і $t \in T$.

Слід зауважити, що для кожного $t \in T$, $V(t)$ є симетричним бінарним відношенням, тому $V^T(t)$ є також симетричним бінарним відношенням.

Слід зауважити, що властивості (2), (3) з визначення $\mathcal{S}_0$ виконуються для S і $(E_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$. Враховуючи, що для кожного $i \in \mathbb{N}$, l_i^* є ліво-локальним, а r_i^* є право-локальним предикатом, властивості (4) і (5) з визначення $\mathcal{S}_0$ також виконуються

для S і $(E_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$. Властивість (6) з визначення $\mathcal{S}_0$ має місце для S і $(E_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$, враховуючи, що $(l_i^*, r_i^*) \in LR^*(Q)$ для всіх $i \in \mathbb{N}$.

Доведемо властивість (1) з визначення $\mathcal{S}_0$ для S і $(E_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$, тобто доведемо, що область істинності $D_i, E_{i,j}^-, E_{i,j}^+, L_{i,j}, R_{i,j}, E_{i,j}$ належить $F_\sigma(T)$ для всіх $i, j \in \mathbb{N}$.

Зафіксуємо $i, j \in \mathbb{N}$. Тоді маємо

$$\{t \mid D_i(t)\} = \text{dom}(s_i) \in \mathcal{T} \cup \{\emptyset\} \subset F_\sigma(T).$$

Слід зауважити, що $E_{i,j}^-$ є ліво-стабільним предикатом і $E_{i,j}^+$ є право-стабільним предикатом. Тоді за лемою 4.1.1, області істинності $E_{i,j}^-$ і $E_{i,j}^+$ належать множині $F_\sigma(T)$.

Нехай P_j є предикатом на T , таким, що $P_j(t)$ є істинним тоді і тільки тоді, коли t є немінімальним елементом $\text{dom}(s_j)$. Нехай A, B є предикатами на T , такими, що

$$A(t) \Leftrightarrow L_{i,j}(t) \wedge P_j(t), \quad B(t) \Leftrightarrow L_{i,j}(t) \wedge \neg P_j(t)$$

для всіх $t \in T$. Оскільки $(l_i^*, r_i^*) \in LR^*(Q)$, A є ліво-стабільним предикатом, то за лемою 4.1.1 область істинності A належить $F_\sigma(T)$. Крім того, оскільки $\neg L_{i,j}(t)$ для всіх $t \in T \setminus \text{dom}(s_j)$, з істинності $B(t)$ є впливає, що t є мінімальним елементом $\text{dom}(s_j)$, тому область істинності B є або порожньою множиною, або одноелементною множиною, тому вона належить $F_\sigma(T)$. Тоді

$$\{t \mid L_{i,j}(t)\} = \{t \mid A(t)\} \cup \{t \mid B(t)\} \in F_\sigma(T).$$

Аналогічно, маємо, що $\{t \mid R_{i,j}(t)\} \in F_\sigma(T)$.

Доведемо, що $\{t \mid E_{i,j}(t)\} \in F_\sigma(T)$. Нехай

$$W = \{\{t' \mid E_{i,j}^-(t')\} \mid i, j \in \mathbb{N}\} \cup \{\{t' \mid E_{i,j}^+(t')\} \mid i, j \in \mathbb{N}\}.$$

З наведених вище міркувань випливає, що $W \subseteq F_\sigma(T)$. Враховуючи визначення $E_{i,j}$, маємо, що $\{t \mid E_{i,j}(t)\}$ може бути подано як зліченне об'єднання скінченних перетинів елементів W . Оскільки скінченні перетини F_σ -множин є F_σ -множинами, маємо, що $\{t \mid E_{i,j}(t)\} \in F_\sigma(T)$.

Тоді можна зробити висновок, що області істинності $D_i, E_{i,j}^-, E_{i,j}^+, L_{i,j}, R_{i,j}, E_{i,j}$ належать $F_\sigma(T)$. Властивості (1)-(6) з визначення $\mathcal{S}_0$ виконуються для S і $(E_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$, тому $S = St(M) \in \mathcal{S}_0$. $\square$

Лема 4.1.6. Для кожного $S \in \mathcal{S}_0$ існує елемент $M \in \mathcal{M}$, такий, що $S = St(M)$.

Доведення. Нехай

$$S = (T, <, (D_i)_{i \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^-)_{i,j \in \mathbb{N}}, (E_{i,j}^+)_{i,j \in \mathbb{N}}, (L_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}, (R_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}) \in \mathcal{S}_0.$$

Тоді $S \in \mathcal{S}$ і існує індексована сім'я $(E_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ предикатів на T , така, що властивості (1)-(6) з визначення $\mathcal{S}_0$ виконуються для S і $(E_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$.

Нехай $Q = 2^{\mathbb{N}}$ і для кожного $i \in \mathbb{N}$, $s_i : T \rightarrow Q$ є функцією, такою, що $s_i(t) \downarrow = \{j \in \mathbb{N} \mid E_{i,j}(t)\}$ для кожного елементу $t \in T$, такого, що $D_i(t)$ є істинним, а $s_i(t) \uparrow$ для кожного елементу $t \in T$, такого, що $\neg D_i(t)$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ нехай $l_k : ST(Q) \rightarrow Bool$ і $r_k : ST(Q) \rightarrow Bool$ є предикатами, такими, що для кожної пари $(s, t) \in ST(Q)$:

- $l_k(s, t)$ є істинним тоді і тільки тоді, коли або t є мінімальним елементом $dom(s)$, або існує індекс $i \in \mathbb{N}$, такий, що $s \dot{=}_{t-} s_i$ і $L_{k,i}(t)$.
- $r_k(s, t)$ є істинним тоді і тільки тоді, коли або t є максимальним елементом $dom(s)$, або існує індекс $i \in \mathbb{N}$, такий, що $s \dot{=}_{t+} s_i$ і $R_{k,i}(t)$.

Тоді l_k є ліво-локальним, а r_k є право-локальним предикатом. Тоді $(l_k, r_k) \in LR(Q)$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ нехай

$$Tr_k = \{s : A \rightarrow Q \mid A \in \mathfrak{T} \wedge (\forall t \in A \ l_k(s, t) \wedge r_k(s, t))\}$$

і $\Sigma_k = (T, Q, Tr_k)$. Нехай $M = ((s_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\Sigma_k)_{k \in \mathbb{N}})$. З властивості (2) множини $\mathcal{S}_0$ для S і $(E_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ випливає, що $dom(s_i) \in \mathfrak{T} \cup \{\emptyset\}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, а з теореми [69, теорема 1](1) випливає, що $\Sigma_k \in \text{НПМС}$ з множиною станів Q для всіх $k \in \mathbb{N}$. Таким чином, $M \in \mathcal{M}$.

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ нехай $(l_k^*, r_k^*) = LR_{min}(\Sigma_k)$.

Враховуючи властивості $\mathcal{S}_0$, маємо, що для кожних $i, j \in \mathbb{N}$ і $t \in T$, $D_i(t) \Leftrightarrow t \in dom(s_i)$, $E_{i,j}^-(t) \Leftrightarrow s_i \dot{=}_{t-} s_j$, $E_{i,j}^+(t) \Leftrightarrow s_i \dot{=}_{t+} s_j$, а також, якщо $s_j(t) \downarrow$, то $L_{i,j}(t) \Leftrightarrow l_i^*(s_j, t)$ і $R_{i,j}(t) \Leftrightarrow r_i^*(s_j, t)$, а якщо $s_j(t) \uparrow$, то $\neg L_{i,j}(t)$ і $\neg R_{i,j}(t)$. Тоді $S = St(M)$.

□

Лема 4.1.7. Нехай $\Phi \in \mathcal{L}^c$. Тоді $Tra(\Phi) \in Th_{<}^2(T)$ тоді і тільки тоді, коли $\Phi \in Th$.

Доведення. Згідно леми 4.1.3, $Tra(\Phi) \in Th_{<}^2(T)$ виконується тоді і тільки тоді, коли $S \models \Phi$ виконується для всіх $S \in \mathcal{S}_{m(\Phi)}$. Згідно леми 4.1.4, $S \models \Phi$ виконується

для всіх $S \in \mathcal{S}_{\mathbf{m}(\Phi)}$ тоді і тільки тоді, коли $S \models \Phi$ для всіх $S \in \mathcal{S}_0$. З лем 4.1.5, 4.1.6 випливає, що $S \models \Phi$ виконується для всіх $S \in \mathcal{S}_0$ тоді і тільки тоді, коли $St(M) \models \Phi$ (тобто $M \models^m \Phi$) для всіх $M \in \mathcal{M}$. Таким чином, $Tra(\Phi) \in Th_{<}^2(T)$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\Phi \in Th$. $\square$

Тепер надамо доведення теореми 4.1.3.

Доведення теореми 4.1.3. З леми 4.1.7 випливає, що

$$Th = \{\Phi \in \mathcal{L}^c \mid Tra(\Phi) \in Th_{<}^2(T)\}.$$

Тоді оскільки $Th_{<}^2(T)$ є розв'язною за лемою 4.1.2, то Th є розв'язною. $\square$

4.2. Локальна характеристика глобальної часової бісимуляції для абстрактних систем з неперервним часом

4.2.1. Попередні зауваження

У даному підрозділі досліджуються властивості бісимуляції [142, 158, 182, 181] для розмічених НПМС. Інформація про історію поняття бісимуляції та його застосування в інформатиці та інших галузях наведена у [181].

У випадку розмічених транзиційних систем [181], бісимуляція і бісимілярність можуть бути визначені таким чином [181, 179]: бінарне відношення R на множині станів Q розміченої транзиційної системи є бісимуляцією (англ. bisimulation), якщо для будь-яких $q_1, q_2 \in Q$, з того, що $(q_1, q_2) \in R$ випливає, що для кожного $q'_1 \in Q$ і мітки a , таких, що $q_1 \rightarrow^a q'_1$, існує $q'_2 \in Q$, такий, що $q_2 \rightarrow^a q'_2$ і $(q'_1, q'_2) \in R$, і для кожного $q'_2 \in Q$ і мітки a , таких, що $q_2 \rightarrow^a q'_2$ існує $q'_1 \in Q$, такий, що $q_1 \rightarrow^a q'_1$ і $(q'_1, q'_2) \in R$. Тоді відношення бісимілярності (англ. bisimilarity) є об'єднанням всіх бісимуляцій на Q [181]. З даними поняттями пов'язаний метод доведення за бісимуляцією [180, 181], що, зокрема, може бути використаний для встановлення поведінкової еквівалентності систем.

У [181] були виділені такі особливості визначення бісимуляції:

- *локальність перевірок* [181] у сенсі, що тільки прямі переходи з елементів пари $(q_1, q_2) \in R$ потребують перевірки для того, щоб встановити виконання умови визначення;
- *відсутність ієрархії (порядку)* [181] на парах, що належать бісимуляції (перевірки належності пар можуть бути виконані у будь-якому порядку).

У даному підрозділі буде запропоновано визначення часової бісимуляції для абстрактних систем з неперервним часом, що задовольняє вищезгаданих властивості локальності перевірок і яке є, у певному сенсі, аналогічним до випадку бісимуляції розмічених транзиційних систем.

Щоб отримати головний результат підрозділу будемо розглядати динамічні системи на високому рівні абстракції. Як і у попередньому підрозділі, будемо вважати, що такі системи задані у формі недетермінованих повних марківських систем (НПМС) [67, 70, 96, 66, 69] (при цьому, поведінка системи моделюється як множина часткових траєкторій, що розглядаються як функції на дійсних часових проміжках, що приймають значення в довільній фіксованій множині станів). Відмітимо, що для НПМС перевірка деяких глобальних у часі властивостей траєкторій або множин траєкторій може бути зведена до перевірки локальних у часі властивостей [70] (для доведення глобальної властивості може бути достатньо перевірити, що певні умови виконуються в околі кожного моменту часу). Це буде використано у даному підрозділі.

Нижче буде введене поняття *розміченої НПМС*, що може розглядатись як аналог розміченої транзиційної системи для неперервного часу, і поняття *глобальної* часової бісимуляції на станах розміченої НПМС. Також, буде визначено локальну версію поняття глобальної часової бісимуляції, що буде названа *локальною* часовою бісимуляцією. Дані поняття не є еквівалентними для розмічених НПМС (“бути локальною часовою бісимуляцією” є слабшою умовою, ніж “бути глобальною часовою бісимуляцією”). Однак, нижче буде запропоноване посилення локального визначення бісимуляції і отримане в результаті поняття буде названо f^+ -часовою бісимуляцією. Визначення цього поняття матиме локальний характер. Далі буде показана еквівалентність f^+ -часової бісимуляції та глобальної часової бісимуляції, що надає локальну характеристику глобальної часової бісимуляції.

4.2.2. Пов’язані роботи інших авторів

У контексті моделювання та аналізу динамічних систем з неперервним часом були запропоновані різні нееквівалентні визначення відношення бісимуляції [4, 157, 183, 184, 101, 167, 185]. Порівняння різних підходів описані у [185, 23]. Більшість з цих підходів розглядають динамічні моделі з явним поняттям *глобального* (неперервного) часу, відносно якого змінюється глобальний стан системи, і визначають певне відношення як відношення бісимуляції на станах таких систем.

З одного боку, частина таких підходів засновані на зведенні визначення бі-

симуляції для не дискретних моделей до застосування визначення бісимуляції для дискретних моделей: дискретна модель, що має попередньо визначене поняття бісимуляції (наприклад, розмічена транзиційна система) пов'язується із системою з неперервним часом і відношення бісимуляції для пов'язаної моделі (у відповідному їй сенсі) розглядається як відношення бісимуляції для системи з неперервним часом. Підходи такого типу були запропоновані для часових автоматів, лінійних систем, деяких класів гібридних систем [4] (з метою, наприклад, побудови абстракцій систем з нескінченною множиною станів [4, 157]).

З іншого боку, були запропоновані підходи до визначення нових понять бісимуляції для спеціальних класів систем з неперервним часом. Підходи такого типу були запропоновані в [184] для лінійних динамічних систем та певних підкласів нелінійних динамічних систем, в [101] для динамічних систем у сенсі поведінкового підходу Віллемса (J.C. Willems) [168], в [47, 48] для гібридних систем, в [24] для загальних систем потоків (англ. general flow systems).

Відмітимо основні способи, у які часові моменти подій та тривалості процесів враховано у різних визначеннях бісимуляції для систем з неперервним часом.

З одного боку, були запропоновані визначення, що *не враховують час* потрібний для того, щоб система досягла певного стану: бісимуляції, що абстрагують час [199], бісимуляції транзиційних систем, що абстрагують час [157], бісимуляція досяжності [24].

З іншого боку, були запропоновані визначення *часової бісимуляції*, що вимагають відповідності станів та часу уздовж виконань системи, що починаються зі станів у відношенні бісимуляції у одні і ті ж моменти часу, наприклад, [24, 184].

Проміжні підходи, що враховують інформацію про час, але не вимагають точної відповідності траєкторій у часі, також були запропоновані, наприклад, бісимуляція прогресу (англ. progress bisimulation) [24].

Згадані вище підходи мають суттєві відмінності. Однак, при порівнянні різних визначень бісимуляції для систем з неперервним часом із визначенням бісимуляції для розмічених транзиційних систем, важливо зауважити, що хоча перші не вимагають ієрархії (порядку) на парах в сенсі [181], визначення для систем з неперервним часом зазвичай є *нелокальними* у тому сенсі, що перевірка того, що пара станів належить відношенню бісимуляції вимагає перевірки глобальних властивостей траєкторій, що починаються в цих станах [181]. Зокрема, така нелокальність має місце для визначень бісимуляції, запропонованих для *абстрактних* систем з

неперервним часом, наприклад, у [24].

4.2.3. Розмічені НПМС

Як і у підрозділі 4.1, будемо позначати як T множину невід’ємних дійсних чисел і як $\mathcal{T}$ множину всіх проміжків в T , що містять більше ніж один елемент.

Якщо $f, g : A \rightarrow B$ є частковими функціями, будемо писати [69, 68]:

- $f \sqsubseteq g$ якщо графік f є підмножиною графіку g ;
- $f \sqsubset g$ якщо графік f є власною підмножиною графіку g .

Також, будемо використовувати позначення $\dot{=}_A$, $\dot{=}_{t-}$, $\dot{=}_{t+}$ як було описано у пункті 4.1.3.

Нехай Tr є замкнутою відносно власних обмежень множиною траєкторій [69, 68].

Означення 4.2.1. Функція λ на Tr (із значеннями у деякій множині) називається *траєюю* на Tr , якщо виконуються такі умови:

- (1) для кожного $s \in Tr$, $\lambda(s)$ є функцією, визначеною на $dom(s)$ (умова збереження області визначення);
- (2) якщо $s_1, s_2 \in Tr$ і $s_1 \sqsubseteq s_2$, то $\lambda(s_1) \sqsubseteq \lambda(s_2)$ (умова монотонності).

Розмічена НПМС визначається як НПМС [69, 68] з траєюю на її траєкторіях.

Означення 4.2.2. Розмічена НПМС є парою (Σ, λ) , де $\Sigma = (T, Q, Tr) \in$ НПМС, а λ є траєюю на Tr .

Зауваження 4.2.1. У випадку розмічених транзиційних систем [181, 179], мітки є даними, пов’язаними з переходами, а траєє може розглядатись як послідовність міток уздовж виконання. Ідея визначення розмічених НПМС, що запропоноване вище, полягає у тому, що для систем з неперервним часом роль переходів відіграють локальні у часі властивості траєєкторій, а мітки відповідають певним значенням, що є пов’язаними з переходами у такому розумінні. Траєє задає значенням, що змінюється вздовж траєєкторії.

В загальному випадку, значення траєє в момент часу t може залежати не тільки від значення траєєкторії в t , але і від обмеження траєєкторії на окіл t . Приклад такого типу наведено нижче (у ньому траєє відображає швидкість зміни значення траєєкторії).

Приклад 4.2.1. Припустимо, що $n \in \mathbb{N}$, $Tr \subset T \rightarrow \mathbb{R}^n$ є замкнутою відносно власних обмежень множиною траєєкторій і кожна траєєкторія $s \in Tr$ є диференційов-

ною у кожній внутрішній точці $\text{dom}(s)$, s має праву похідну в найменшому елементі $\text{dom}(s)$, якщо цей елемент існує і s має ліву похідну в найбільшому елементі $\text{dom}(s)$, якщо цей елемент існує.

Нехай $\lambda : Tr \rightarrow (T \rightarrow \mathbb{R}^n)$ є такою функцією, що для кожної $s \in Tr$:

- $\text{dom}(\lambda(s)) = \text{dom}(s)$;
- $\lambda(s)(t) = \frac{d}{dt}s(t)$, якщо t є внутрішньою точкою $\text{dom}(s)$;
- $\lambda(s)(t)$ є правою похідною s в t , якщо t є найменшим елементом $\text{dom}(s)$;
- $\lambda(s)(t)$ є лівою похідною s в t , якщо t є найбільшим елементом $\text{dom}(s)$.

Тоді λ є трасою на Tr .

Зауваження 4.2.2. У підрозділі 4.2.6 буде наведена теорема 4.2.3, що показує, що в кожний момент часу значення траси залежить лише від значень траєкторії в довільно малому околі цього моменту часу, відповідно до ідеї переходів і міток для НПМС, що була описана у зауваженні 4.2.1.

4.2.4. Часові симуляції та бісимуляції для НПМС

Нехай (Σ, λ) є фіксованою розміченою НПМС, де $\Sigma = (T, Q, Tr)$.

Для будь-якої часткової функції s на T , такої, що $\text{dom}(s) \in \mathfrak{T}$, будь-якого елементу $t_0 \in T$, будь-якого елементу q з області значень s , будемо писати:

- $q \xrightarrow{s}$, якщо $\text{dom}(s)$ має найменший елемент a , такий, що $s(a) = q$;
- $q \xrightarrow{s}_{t_0}$, якщо t_0 є найменшим елементом $\text{dom}(s)$ і $s(t_0) = q$.

Означення 4.2.3. Нехай $s_1, s_2 : T \rightarrow Q$, а $R \subseteq Q \times Q$ є бінарним відношенням. Будемо казати, що функції s_1 і s_2

- (1) *поточково у (відношенні) R* , якщо $\text{dom}(s_1) = \text{dom}(s_2)$ і $(s_1(t), s_2(t)) \in R$ для всіх $t \in \text{dom}(s_1)$;
- (2) *поточково у (відношенні) R на множині $A \subseteq T$* , якщо $A \subseteq \text{dom}(s_1) \cap \text{dom}(s_2)$ і $(s_1(t), s_2(t)) \in R$ для всіх $t \in A$;
- (3) *поточково у (відношенні) R у правому півоколі $t \in T$* , якщо існує $t' > t$, такий, що s_1, s_2 поточково у відношенні R на $[t, t')$;
- (4) *поточково у (відношенні) R у проколотому лівому півоколі $t \in T$* , якщо $t > 0$ і існує $t' \in [0, t)$, такий, що s_1, s_2 поточково у відношенні R на (t', t) .

Означення 4.2.4. Відношення $R \subseteq Q \times Q$ є *глобальною часовою симуляцією* на розміченій НПМС (Σ, λ) , якщо для кожних $(q_1, q_2) \in R$ і $s_1 \in Tr$, таких, що $q_1 \xrightarrow{s_1}$, існує траєкторія $s_2 \in Tr$, така, що $q_2 \xrightarrow{s_2}$, $\lambda(s_1) = \lambda(s_2)$ і s_1, s_2 поточково у відношенні R .

Означення 4.2.5. Відношення $R \subseteq Q \times Q$ є *локальною часовою симуляцією* на розміченій НПМС (Σ, λ) , якщо для кожних $(q_1, q_2) \in R$, $s_1 \in Tr$ і $t_0 \in T$, таких, що $q_1 \xrightarrow{s_1}_{t_0}$, існує траєкторія $s_2 \in Tr$, така, що $q_2 \xrightarrow{s_2}_{t_0}$, $\lambda(s_1) \dot{=}_{t_0+} \lambda(s_2)$ і s_1, s_2 поточно у відношенні R у правому півоколі t_0 .

Означення 4.2.6. Відношення $R \subseteq Q \times Q$ є

- (1) *локальною часовою бісимуляцією* на розміченій НПМС (Σ, λ) , якщо R і R^{-1} є локальними часовими симуляціями на (Σ, λ) ;
- (2) *глобальною часовою бісимуляцією* на розміченій НПМС (Σ, λ) , якщо R і R^{-1} є глобальними часовими симуляціями на (Σ, λ) .

Нехай f^+ є фіксованою правою мірою продовжуваності (англ. right extensibility measure) [69, 68].

Означення 4.2.7. Відношення $R \subseteq Q \times Q$ є f^+ -*часовою симуляцією* на розміченій НПМС (Σ, λ) , якщо R є локальною часовою симуляцією на (Σ, λ) і для кожних $s_1, s_2 \in Tr$ і $t_0 \in dom(s_1)$, що задовольняють таким умовам

- s_1, s_2 поточно у відношенні R у проколотому лівому півоколі t_0 ,
- $\lambda(s_1) \dot{=}_{[t'_0, t_0)} \lambda(s_2)$ для деякого $t'_0 \in [0, t_0)$,

існують $s'_2 \in Tr$, $t_1 \in dom(s_2) \cap dom(s'_2)$ і $t_2 \in T$, такі, що

- (1) $t_1 < t_0$ і $s_2(t_1) = s'_2(t_1)$;
- (2) $t_2 \geq f^+(t_1, t_0)$ або t_2 є максимальним елементом $dom(s_1)$;
- (3) $\lambda(s_1) \dot{=}_{[t_1, t_2]} \lambda(s'_2)$;
- (4) s_1 і s'_2 поточно у відношенні R на $[t_1, t_2]$.

Означення 4.2.8. Відношення $R \subseteq Q \times Q$ є f^+ -*часовою бісимуляцією* на розміченій НПМС (Σ, λ) , якщо R і R^{-1} є f^+ -часовими симуляціями на (Σ, λ) .

4.2.5. Головні результати підрозділу

Головними результатами цього підрозділу є такі дві теореми, що встановлюють зв'язки між різними визначеннями часової бісимуляції для розмічених НПМС.

Теорема 4.2.1. (1) Якщо R є глобальною часовою бісимуляцією на розміченій НПМС (Σ, λ) , то R є локальною часовою бісимуляцією на (Σ, λ) .
 (2) Існує розмічена НПМС (Σ', λ') і локальна часова бісимуляція R_0 на (Σ', λ') , така, що R_0 не є глобальною часовою бісимуляцією на (Σ', λ') .

Нехай f^+ є фіксованою нормальною правою мірою продовжуваності (англ. normal right extensibility measure) [69, 68].

Теорема 4.2.2. Нехай (Σ, λ) є розміченою НПМС. Відношення $R \subseteq Q \times Q$ є глобальною часовою бісимуляцією на (Σ, λ) тоді і тільки тоді, коли R є f^+ -часовою бісимуляцією на (Σ, λ) .

Зауваження 4.2.3. Згідно [69, 68], у якості прикладу нормальної правої міри продовжуваності може бути узято $f^+(x, y) = 2y - x$. Різниця між визначенням f^+ -часової симуляції і глобальної часової симуляції може бути пояснена тим, що визначення останньої має нелокальний характер у тому сенсі, що безпосередня перевірка виконання його умови вимагає доведення існування довільно тривалих за часом траєкторій (s_2) для доведення того, що R є симуляцією. Визначення f^+ -часової симуляції має локальний характер у тому сенсі, що для того, щоб довести, що R є симуляцією, достатньо довести існування s'_2 , що задовольняє умови означення 4.2.7 на довільно малому проміжку $[t_1, t_2]$ (наприклад, у випадку $f^+(x, y) = 2y - x$, нижня межа довжини цього проміжку, визначена умовою (2) означення 4.2.7 може бути зроблена довільно малою шляхом вибору елементу t_1 , що є близьким до t_0).

4.2.6. Доведення теорем 4.2.1 та 4.2.2

Спочатку сформулюємо і доведемо ряд лем, з яких будуть випливати твердження теорем 4.2.1 та 4.2.2.

Основна частина доведення теореми 4.2.2 полягає у тому, щоб для відношення R , що є f^+ -часовою симуляцією визначити множину допоміжних НПМС $\{\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda) \mid s_0 \in Tr\}$, таку, що кожний її елемент задовольняє умову глобальної продовжуваності (англ. global forward extensibility) з [69, 68] і показати, що з виконання даних умов випливає, що R є глобальною часовою симуляцією на (Σ, λ) .

Для кожного $s_0 \in Tr$ і відношення $R \subseteq Q \times Q$ позначимо:

- $Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$ є множиною всіх функцій $s : T \rightarrow Q$, таких, що $dom(s) \in \mathfrak{T}$ і виконуються такі умови:
 - $s|_{dom(s_0)} \in Tr$,
 - $\lambda(s|_{dom(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$,
 - s_0, s поточною у відношенні R на $dom(s_0) \cap dom(s)$;
- $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda) = \{s : T \rightarrow Q \mid dom(s) \in \mathfrak{T} \wedge \exists \hat{s} \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda) \ s \sqsubseteq \hat{s}\}$;
- $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda) = (T, Q, Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda))$.

Доведемо декілька допоміжних властивостей трас.

Лема 4.2.1. Якщо λ є трасою на замкненій відносно власних обмежень множині траєкторій Tr , то образ Tr при відображенні λ є замкненим відносно власних обмежень.

Доведення. Нехай λ є трасою на замкненій відносно власних обмежень множині траєкторій Tr . Нехай $Tr' = \{\lambda(s) \mid s \in Tr\}$ є образом λ . Оскільки λ зберігає область визначення, кожний елемент Tr' є функцією, визначеною на елементі множини $\mathfrak{T}$.

Доведемо, що Tr' є замкненою відносно власних обмежень. Нехай $d \in Tr'$, $A \in \mathfrak{T}$ і $A \subseteq \text{dom}(d)$. Тоді $d = \lambda(s)$ для деяких $s \in Tr$ і $A \subseteq \text{dom}(s)$. Тоді $s|_A \in Tr$, оскільки Tr є замкненою відносно власних обмежень. Тоді $s|_A \sqsubseteq s$ і $\lambda(s|_A) \sqsubseteq \lambda(s)$ за монотонністю λ . Позначимо $\lambda(s|_A) = d'$. Тоді $d' \in Tr'$ і $d' \sqsubseteq d$. Крім того, $\text{dom}(d') = \text{dom}(s|_A) = \text{dom}(s) \cap A = \text{dom}(d) \cap A = A$. Тоді $d' = d|_A$, тому $d|_A \in Tr'$. Отже, Tr' є замкненою відносно власних обмежень множиною траєкторій. $\square$

Лема 4.2.2. Нехай Tr є замкненою відносно власних обмежень множиною траєкторій і λ є трасою на Tr . Тоді λ є ланцюгово-неперервною у такому сенсі: для кожного непорожнього ланцюга C у Tr , що має точну верхню межу $s^* \in Tr$, де Tr розглядається як частково впорядкована множина з порядком $\sqsubseteq$, множина $\{\lambda(s) \mid s \in C\}$ має точну верхню межу $\lambda(s^*)$ у $\{\lambda(s) \mid s \in Tr\}$, як частково впорядкованій множині з порядком $\sqsubseteq$.

Доведення. Нехай C є непорожнім ланцюгом в Tr (з порядком $\sqsubseteq$), що має точну верхню межу $s^* \in Tr$. Нехай

$$A = \bigcup_{s \in C} \text{dom}(s), \quad D = \{\lambda(s) \mid s \in C\}.$$

У зв'язку з монотонністю траси λ множина D є ланцюгом у $\{\lambda(s) \mid s \in Tr\}$ (що розглядається як частково впорядкована множина з порядком $\sqsubseteq$) і $\lambda(s^*)$ є його верхньою межею.

Нехай $d \in \{\lambda(s) \mid s \in Tr\}$ є довільною верхньою межею D . Тоді $\lambda(s) \sqsubseteq d$ для всіх $s \in C$, звідки $d(t) \downarrow = \lambda(s)(t)$ для всіх $s \in C$ і $t \in \text{dom}(s)$. З іншого боку, для всіх $s \in C$ виконується $\lambda(s) \sqsubseteq \lambda(s^*)$, тому $\lambda(s^*)(t) \downarrow = \lambda(s)(t)$ для всіх $t \in \text{dom}(s)$, звідки $d(t) \downarrow = \lambda(s^*)(t)$ для всіх $t \in A$. Тоді $A \subseteq \text{dom}(\lambda(s^*)) = \text{dom}(s^*)$. Крім того, $A \in \mathfrak{T}$, оскільки C є ланцюгом. Тоді $s^*|_A \in Tr$, оскільки $s^* \in Tr$ і Tr є замкненою

відносно власних обмежень. Крім того, $s^*|_A$ є верхньою межею C (тобто $s \sqsubseteq s^*|_A$ для всіх $s \in C$) і $s^*|_A \sqsubseteq s^*$, тому $s^*|_A = s^*$, оскільки s^* є точною верхньою межею C . Таким чином, $\text{dom}(s^*) \subseteq A$ і $d(t) \downarrow = \lambda(s^*)(t)$ для всіх $t \in \text{dom}(s^*) = \text{dom}(\lambda(s^*))$. Тому $\lambda(s^*) \sqsubseteq d$.

Тоді $\lambda(s^*)$ є точною верхньою межею $\{\lambda(s) \mid s \in C\}$. $\square$

Лема 4.2.3. *Нехай λ є трасою на замкненій відносно власних обмежень множині траєкторій Tr . Нехай $s \in Tr$ і $A \in \mathfrak{T}$, $A \subseteq \text{dom}(s)$. Тоді $\lambda(s)(t) = \lambda(s|_A)(t)$ для всіх $t \in A$.*

Доведення. Оскільки Tr є замкненою відносно власних обмежень, $s|_A \in Tr$ і $s|_A \sqsubseteq s$. Тоді $\lambda(s|_A) \sqsubseteq \lambda(s)$. Тоді $\lambda(s|_A)(t) \downarrow = \lambda(s)(t)$ для всіх елементів $t \in \text{dom}(\lambda(s|_A)) = \text{dom}(s|_A) = \text{dom}(s) \cap A = A$. $\square$

Наведена нижче теорема надає критерій для перевірки того, чи є функція трасою.

Теорема 4.2.3. *Нехай Tr є замкненою відносно власних обмежень множиною траєкторій, Y є множиною, $\lambda : Tr \rightarrow (T \rightarrow Y)$ є тотальною функцією. Тоді λ є трасою на Tr тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

- (1) $\text{dom}(\lambda(s)) = \text{dom}(s)$ для всіх $s \in Tr$;
- (2) якщо $s_1, s_2 \in Tr$, $t_0 \in T$, $s_1 \dot{=}_{t_0+} s_2$, то $\lambda(s_1)(t_0) = \lambda(s_2)(t_0)$;
- (3) якщо $s_1, s_2 \in Tr$, $t_0 \in T$, $s_1 \dot{=}_{t_0-} s_2$, то $\lambda(s_1)(t_0) = \lambda(s_2)(t_0)$.

Доведення. Спочатку припустимо, що умови (1)-(3) виконуються. Доведемо, що λ є трасою на Tr .

З умови (1) випливає, що λ зберігає область визначення.

Доведемо, що λ є монотонною. Нехай $s_1, s_2 \in Tr$ і $s_1 \sqsubseteq s_2$. Тоді $s_1 = s_2|_{\text{dom}(s_1)}$. Тоді оскільки $\text{dom}(s_1) \in \mathfrak{T}$, то для кожного елементу $t_0 \in \text{dom}(s_1)$ має місце або $s_1 \dot{=}_{t_0+} s_2$, або $s_1 \dot{=}_{t_0-} s_2$, звідки $\lambda(s_1)(t_0) = \lambda(s_2)(t_0)$. Тоді

$$\lambda(s_1)|_{\text{dom}(s_1)} = \lambda(s_2)|_{\text{dom}(s_1)},$$

звідки за умовою (1),

$$\lambda(s_1) = \lambda(s_2)|_{\text{dom}(\lambda(s_1))},$$

тому $\lambda(s_1) \sqsubseteq \lambda(s_2)$.

Отже, λ є монотонною. Таким чином, λ є трасою на Tr .

Тепер припустимо, що $\lambda \in \text{трасою на } Tr$. Тоді умова (1) виконується.

Доведемо умову (2). Нехай $s_1, s_2 \in Tr$, $t_0 \in T$ і $s_1 \dot{=}_{t_0+} s_2$. Тоді існує елемент $t > t_0$, такий, що $[t_0, t) \subseteq \text{dom}(s_1) \cap \text{dom}(s_2)$ і $s_1|_{[t_0, t)} = s_2|_{[t_0, t)}$. Тоді

$$\lambda(s_1)(t_0) = \lambda(s_1|_{[t_0, t)})(t_0) = \lambda(s_2|_{[t_0, t)})(t_0) = \lambda(s_2)(t_0)$$

за лемою 4.2.3. Таким чином, умова (2) виконується.

Доведемо умову (3). Нехай $s_1, s_2 \in Tr$, $t_0 \in T$, і $s_1 \dot{=}_{t_0-} s_2$. Тоді $t_0 > 0$ і існує елемент $t \in [0, t_0)$, такий, що $(t, t_0] \subseteq \text{dom}(s_1) \cap \text{dom}(s_2)$ і $s_1|_{(t, t_0]} = s_2|_{(t, t_0]}$. Тоді

$$\lambda(s_1)(t_0) = \lambda(s_1|_{(t, t_0]})(t_0) = \lambda(s_2|_{(t, t_0]})(t_0) = \lambda(s_2)(t_0)$$

за лемою 4.2.3. Таким чином, умова (3) виконується. □

Наведена нижче лема надає простий приклад траси: поточкове застосування тотальної функції на множині станів (проекції) до траєкторії.

Лема 4.2.4. Припустимо, що Tr є замкненою відносно власних обмежень множиною траєкторій з T у множину Q , $Y \in \text{множиною}$, $f : Q \rightarrow Y$ є тотальною функцією, а $\lambda : Tr \rightarrow (T \rightsquigarrow Y)$ є такою функцією, що $\lambda(s) = f \circ s$ для всіх $s \in Tr$. Тоді $\lambda \in \text{трасою на } Tr$.

Доведення. Випливає безпосередньо з теореми 4.2.3. □

Лема 4.2.5. Якщо $R \in \text{глобальною часовою симуляцією на розміченій НПМС } (\Sigma, \lambda)$, то $R \in \text{локальною часовою симуляцією на } (\Sigma, \lambda)$.

Доведення. Припустимо, що $R \in \text{глобальною часовою симуляцією на } (\Sigma, \lambda)$.

Нехай $(q_1, q_2) \in R$, $s_1 \in Tr$ і $t_0 \in T$ є такими, що $q_1 \overset{s_1}{\rightsquigarrow}_{t_0}$. Тоді $q_1 \overset{s_1}{\rightsquigarrow}$. Оскільки $R \in \text{глобальною часовою симуляцією на } (\Sigma, \lambda)$, то існує траєкторія $s_2 \in Tr$, така, що $q_2 \overset{s_2}{\rightsquigarrow}$, $\lambda(s_1) = \lambda(s_2)$ і s_1, s_2 поточно у відношенні R . Тоді $\text{dom}(s_1) = \text{dom}(s_2)$ і $t_0 \in \text{найменшим елементом } \text{dom}(s_2)$, тому $q_2 \overset{s_2}{\rightsquigarrow}_{t_0}$. Крім того, $\lambda(s_1) \dot{=}_{t_0+} \lambda(s_2)$ і s_1, s_2 поточно у відношенні R у правому півколі t_0 .

Отже, $R \in \text{локальною часовою симуляцією на } (\Sigma, \lambda)$. □

Лема 4.2.6. Існує розмічена НПМС (Σ', λ') і локальна часова бісимуляція R_0 на (Σ', λ') , така, що R_0 не є глобальною часовою симуляцією на (Σ', λ') .

Доведення. Нехай $Q' = \mathbb{C}$, де $\mathbb{C}$ позначає множину комплексних чисел. Позначимо як i уявну одиницю. Для будь-якого $z \in \mathbb{C}$ позначимо як $\Re(z)$ дійсну частину z .

Для кожного $a \in \{-1, 1\}$ і $b \in \mathbb{R}$ нехай $s_{a,b} : T \rightarrow Q$ є функцією, такою, що для всіх $t \in T$,

$$s_{a,b}(t) = a(t + i) + b.$$

Визначимо множину траєкторій Tr' і кортеж Σ' таким чином:

$$Tr' = \{s_{a,b}|_A \mid A \in \mathfrak{T} \wedge a \in \{-1, 1\} \wedge b \in \mathbb{R}\},$$

$$\Sigma' = (T, Q', Tr').$$

Нехай

$$\lambda' : Tr' \rightarrow (T \rightarrow \{0, 1\})$$

є такою функцією, що для кожної траєкторії $s \in Tr$ виконується

$$\text{dom}(\lambda'(s)) = \text{dom}(s), \quad (\lambda'(s))(t) = \text{sign}(\Re(s(t)))$$

для всіх $t \in \text{dom}(s)$, де $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ є функцією знаку, тобто $\text{sign}(x) = -1$, якщо $x < 0$, $\text{sign}(x) = 0$, якщо $x = 0$ і $\text{sign}(x) = 1$, якщо $x > 0$.

Нехай $R_0 \subset Q \times Q$ є таким відношенням, що

$$R_0 = \{(\alpha + i, \beta - i) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge \alpha > \beta > 0\}.$$

Доведемо, що Σ' є НПМС.

Безпосередньо з визначення Tr' випливає, що Tr' задовольняє умову замкненості відносно власних обмежень.

Перевіримо недетерміновану марківську властивість. Нехай $s_1, s_2 \in Tr'$ і $t_0 \in T$ є такими, що $t_0 = \sup \text{dom}(s_1) = \inf \text{dom}(s_2)$, а також $s_1(t_0) \downarrow$, $s_2(t_0) \downarrow$ і $s_1(t_0) = s_2(t_0)$. Нехай

$$s : \text{dom}(s_1) \cup \text{dom}(s_2) \rightarrow Q'$$

є функцією, такою, що

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t), & t \in \text{dom}(s_1); \\ s_2(t), & t \in \text{dom}(s_2). \end{cases}$$

Слід зауважити, що існують множини $A, A' \in \mathfrak{T}$ і елементи $a, a' \in \{-1, 1\}$, $b, b' \in \mathbb{R}$, такі, що виконуються рівності

$$s_1 = s_{a,b}|_A, \quad s_2 = s_{a',b'}|_{A'}.$$

Тоді $A = \text{dom}(s_1)$, $A' = \text{dom}(s_2)$ і

$$a(t_0 + i) + b = s_1(t_0) = s_2(t_0) = a'(t_0 + i) + b',$$

звідки $a = a'$ і $b = b'$. Тоді $s = s_{a,b}|_{A \cup A'}$ і $A \cup A' \in \mathfrak{T}$, оскільки $A \cap A' \neq \emptyset$. Таким чином, $s \in Tr'$. Оскільки s_1, s_2 і t_0 є довільними, можемо зробити висновок, що Tr' має недетерміновану марківську властивість.

Перевіримо, що Tr' є повною. Нехай C є непорожнім ланцюгом у Tr' (що розглядається як частково впорядкована множина з порядком $\sqsubseteq$). Нехай

$$A = \bigcup_{s \in C} \text{dom}(s).$$

Тоді $A \in \mathfrak{T}$, оскільки $C \neq \emptyset$ і C є ланцюгом.

Нехай s_0 є деяким фіксованим елементом C . Тоді існують числа a, b , такі, що $s_0 = s_{a,b}|_{\text{dom}(s_0)}$. Нехай

$$s^* = s_{a,b}|_A.$$

Тоді $s^* \in Tr'$. Доведемо, що s^* є верхньою межею ланцюга C .

Нехай $s \in C$. Тоді існують числа a', b' , такі, що

$$s = s_{a',b'}|_{\text{dom}(s)}$$

і або $s_0 \sqsubseteq s$, або $s \sqsubseteq s_0$. Тоді існує елемент t_0 , такий, що $s(t_0) \downarrow$, $s_0(t_0) \downarrow$, і

$$s(t_0) = s_0(t_0).$$

Тоді

$$a'(t_0 + i) + b' = s(t_0) = s_0(t_0) = a(t_0 + i) + b,$$

звідки $a = a'$ і $b = b'$. Тоді $s = s_{a,b}|_{\text{dom}(s)}$ і $\text{dom}(s) \subseteq A$, тому $s \sqsubseteq s^*$. Оскільки $s \in C$ є довільним, то s^* є верхньою межею C .

Доведемо, що s^* є точною верхньою межею C . Припустимо, що $s^0 \in Tr'$ є

верхньою межею C . Тоді $s \sqsubseteq s^0$ для всіх $s \in C$, тому $A \subseteq \text{dom}(s^0)$. Нехай $t' \in A$. Тоді $t' \in \text{dom}(s')$ для деякого $s' \in C$. Тоді $s' \sqsubseteq s^*$ і $s' \sqsubseteq s^0$, тому $s'(t') = s^*(t')$ і $s'(t') = s^0(t')$, звідки $s^*(t') = s^0(t')$. Тоді $s^* \sqsubseteq s^0$, оскільки $t' \in A$ є довільним і $\text{dom}(s^*) = A$. Таким чином, s^* є точною верхньою межею C в Tr' (з порядком $\sqsubseteq$). Отже, Tr' є повною множиною траєкторій.

Таким чином, Σ' є НПМС, оскільки Tr' є повною, замкненою відносно власних обмежень множиною траєкторій, що має недетерміновану марківську властивість.

Згідно леми 4.2.4, λ' є трасою на Tr' . Тоді (Σ', λ') є розміченою НПМС.

Доведемо, що R_0 є локальною часовою симуляцією на (Σ', λ') . Нехай $(q_1, q_2) \in R_0$, $s_1 \in Tr'$ і $t_0 \in T$ є такими, що $q_1 \xrightarrow{s_1}_{t_0}$. Тоді має місце

$$(q_1, q_2) = (\alpha + i, \beta - i)$$

для деяких чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, таких, що $\alpha > \beta > 0$. Також, $s_1 = s_{a_1, b_1}|_{\text{dom}(s_1)}$ для деяких $a_1 \in \{-1, 1\}$, $b_1 \in \mathbb{R}$. Тоді $t_0 \in \text{dom}(s_1)$ і

$$\alpha + i = q_1 = s_1(t_0) = s_{a_1, b_1}(t_0) = a_1(t_0 + i) + b_1,$$

звідки $a_1 = 1$ і $\alpha = t_0 + b_1$, тому $q_1 = b_1 + t_0 + i$. Нехай

$$s_2 = s_{-1, \beta + t_0}|_{\text{dom}(s_1)}.$$

Тоді $s_2 \in Tr'$ і t_0 є найменшим елементом множини $\text{dom}(s_2) = \text{dom}(s_1)$. Також,

$$s_2(t_0) = -(t_0 + i) + \beta + t_0 = \beta - i = q_2.$$

Тоді $q_2 \xrightarrow{s_2}_{t_0}$. Маємо такі рівності

$$\lambda'(s_1)(t) = \text{sign}(\Re(s_1(t))) = \text{sign}(a_1 t + b_1) = \text{sign}(t + b_1),$$

$$\lambda'(s_2)(t) = \text{sign}(\Re(s_2(t))) = \text{sign}(\beta + t_0 - t)$$

для всіх $t \in \text{dom}(s_1)$, а також, $t_0 + b_1 = \alpha > \beta > 0$. Тоді $t + b_1 \geq t_0 + b_1 > 0$ для всіх $t \in \text{dom}(s_1)$, оскільки t_0 є найменшим елементом $\text{dom}(s_1)$, звідки $\lambda'(s_1)(t) = 1$ для всіх $t \in \text{dom}(s_1)$. Крім того, $\beta > 0$ і $\beta + t_0 - t > 0$ для всіх $t \in [t_0, t_0 + \beta) \cap \text{dom}(s_2)$,

тому

$$\lambda'(s_2)(t) = 1 = \lambda'(s_1)(t)$$

для всіх $t \in [t_0, t_0 + \beta) \cap \text{dom}(s_2)$, звідки

$$\lambda'(s_1) \dot{=}_{t_0+} \lambda'(s_2).$$

Крім того, $s_1(t) = (t + \mathbf{i}) + b_1 = (t + b_1) + \mathbf{i}$ і

$$s_2(t) = -(t + \mathbf{i}) + \beta + t_0 = (\beta + t_0 - t) - \mathbf{i}$$

для всіх $t \in \text{dom}(s_1)$. Для всіх $t \in \text{dom}(s_1) \cap [t_0, t_0 + \beta)$ маємо

$$t + b_1 = t + (\alpha - t_0) = (t - t_0) + \alpha > \beta - (t - t_0) > 0,$$

оскільки $\alpha > \beta$. Таким чином, для всіх $t \in \text{dom}(s_1) \cap [t_0, t_0 + \beta)$ маємо

$$t + b_1 > \beta + t_0 - t > 0,$$

звідки $(s_1(t), s_2(t)) \in R_0$. Тоді s_1, s_2 поточково у відношенні R_0 у правому півоколі t_0 , оскільки $\beta > 0$. Оскільки q_1, q_2, s_1, t_0 є довільними, можемо зробити висновок, що R_0 є локальною часовою симуляцією на (Σ', λ') .

Доведемо, що R_0^{-1} є локальною часовою симуляцією на (Σ', λ') . Нехай $(q_1, q_2) \in R_0^{-1}$, $s_1 \in Tr'$ і $t_0 \in T$ є такими, що $q_1 \xrightarrow{s_1}_{t_0}$. Тоді

$$(q_2, q_1) = (\alpha + \mathbf{i}, \beta - \mathbf{i})$$

для деяких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, таких, що $\alpha > \beta > 0$. Також,

$$s_1 = s_{a_1, b_1}|_{\text{dom}(s_1)}$$

для деяких $a_1 \in \{-1, 1\}$ і $b_1 \in \mathbb{R}$. Тоді $t_0 \in \text{dom}(s_1)$ і

$$\beta - \mathbf{i} = q_1 = s_1(t_0) = s_{a_1, b_1}(t_0) = a_1(t_0 + \mathbf{i}) + b_1,$$

звідки $a_1 = -1$ і $\beta = b_1 - t_0$, тому $q_1 = b_1 - t_0 - \mathbf{i}$. Нехай

$$s_2 = s_{1, \alpha - t_0} \big|_{\text{dom}(s_1)}.$$

Тоді $s_2 \in Tr'$ і t_0 є найменшим елементом $\text{dom}(s_2) = \text{dom}(s_1)$. Також,

$$s_2(t_0) = (t_0 + \mathbf{i}) + \alpha - t_0 = \alpha + \mathbf{i} = q_2.$$

Тоді $q_2 \xrightarrow{s_2} t_0$. Маємо такі рівності

$$\lambda'(s_1)(t) = \text{sign}(\Re(s_1(t))) = \text{sign}(a_1 t + b_1) = \text{sign}(b_1 - t),$$

$$\lambda'(s_2)(t) = \text{sign}(\Re(s_2(t))) = \text{sign}(t + \alpha - t_0)$$

для всіх $t \in \text{dom}(s_1)$, а також, $b_1 - t_0 = \beta > 0$. Тоді $b_1 - t > 0$ для всіх $t \in \text{dom}(s_1) \cap [t_0, b_1) \neq \emptyset$, тому $\lambda'(s_1)(t) = 1$ для всіх $t \in \text{dom}(s_1) \cap [t_0, b_1)$. Крім того, $\alpha > \beta > 0$ і $t - t_0 \geq 0$ для всіх $t \in \text{dom}(s_2)$, оскільки t_0 є найменшим елементом $\text{dom}(s_2)$, тому

$$\lambda'(s_2)(t) = \text{sign}(\alpha + t - t_0) = 1 = \lambda'(s_1)(t)$$

для всіх $t \in \text{dom}(s_2) \cap [t_0, b_1)$, звідки

$$\lambda'(s_1) \dot{=}_{t_0+} \lambda'(s_2).$$

Крім того,

$$s_1(t) = -(t + \mathbf{i}) + b_1 = (b_1 - t) - \mathbf{i},$$

$$s_2(t) = (t + \mathbf{i}) + \alpha - t_0 = (\alpha + t - t_0) + \mathbf{i}$$

для всіх $t \in \text{dom}(s_1)$. Для всіх $t \in \text{dom}(s_1) \cap [t_0, b_1)$ маємо

$$\alpha + (t - t_0) > \beta - (t - t_0) = b_1 - t_0 - t + t_0 = b_1 - t > 0,$$

оскільки $\alpha > \beta$. Таким чином, для всіх $t \in \text{dom}(s_1) \cap [t_0, b_1)$ маємо

$$\alpha + t - t_0 > b_1 - t > 0,$$

звідки $(s_1(t), s_2(t)) \in R_0^{-1}$. Тоді s_1, s_2 поточною у відношенні R_0^{-1} у правому півоколлі t_0 , оскільки $b_1 > t_0$. Оскільки q_1, q_2, s_1, t_0 є довільними, можемо зробити

висновок, що R_0^{-1} є локальною часовою симуляцією на (Σ', λ') .

Отже, R_0 є локальною часовою бісимуляцією на (Σ', λ') .

Доведемо, що R_0 не є глобальною часовою симуляцією на (Σ', λ') . Нехай

$$q_1 = 2 + i, \quad q_2 = 1 - i, \quad s_1 = s_{1,2}.$$

Тоді $(q_1, q_2) \in R_0$, $s_1(0) = i + 2 = q_1$, тому $q_1 \xrightarrow{s_1}$. Крім того, $s_1 \in Tr'$.

Припустимо, що існує траєкторія $s_2 \in Tr'$, така, що $q_2 \xrightarrow{s_2}$, $\lambda'(s_1) = \lambda'(s_2)$ і s_1, s_2 поточною у відношенні R_0 . Оскільки $\lambda'(s_1) = \lambda'(s_2)$, то маємо $dom(s_2) = dom(s_1) = T$, тому існують числа $a_2 \in \{-1, 1\}$ і $b_2 \in \mathbb{R}$, такі, що $s_2 = s_{a_2, b_2}$. Крім того,

$$\begin{aligned} 1 &= \text{sign}(t + 2) = \text{sign}(\Re(t + i + 2)) = \text{sign}(\Re(s_{1,2}(t))) = \\ &= \text{sign}(\Re(s_1(t))) = \text{sign}(\Re(s_2(t))) = \text{sign}(\Re(s_{a_2, b_2}(t))) = \\ &= \text{sign}(\Re(a_2(t + i) + b_2)) = \text{sign}(a_2 t + b_2) \end{aligned}$$

для всіх $t \in T$. Таким чином, $a_2 t + b_2 > 0$ для всіх $t \in T$, тому $a_2 = 1$. Нуль є найменшим елементом $dom(s_2)$, тому $s_2(0) = q_2$, оскільки $q_2 \xrightarrow{s_2}$. З іншого боку,

$$1 - i = q_2 = s_2(0) = s_{a_2, b_2}(0) = a_2 i + b_2 = i + b_2,$$

що неможливо, оскільки $b_2 \in \mathbb{R}$. Отже, R_0 не є глобальною часовою симуляцією на (Σ', λ') . $\square$

Лема 4.2.7. *Нехай f^+ є нормальною правою мірою продовжуваності, а відношення $R \subseteq Q \times Q$ є глобальною часовою симуляцією на (Σ, λ) . Тоді R є f^+ -часовою симуляцією на (Σ, λ) .*

Доведення. Згідно леми 4.2.5, R є локальною часовою симуляцією на (Σ, λ) .

Нехай $s_1, s_2 \in Tr$ і $t_0 \in dom(s_1)$ є такими, що s_1, s_2 поточною у відношенні R у проколотому лівому півколі t_0 і існує елемент $t'_0 < t_0$, такий, що $\lambda(s_1) \dot{=}_{[t'_0, t_0]} \lambda(s_2)$.

Покажемо, що існують $s'_2 \in Tr$, $t_1 \in dom(s_2) \cap dom(s'_2)$, $t_2 \in T$, такі, що умови (1), (2), (3), (4) означення 4.2.7 виконуються для R і $t_0, t_1, t_2, s_1, s_2, s'_2$.

Оскільки s_1, s_2 поточною у відношенні R у проколотому лівому півколі t_0 , то існує елемент $t_* \in T$, такий, що $t_* < t_0$, $[t_*, t_0) \subseteq dom(s_1) \cap dom(s_2)$ і $(s_1(t), s_2(t)) \in R$ для всіх $t \in [t_*, t_0)$.

Розглянемо такі два випадки.

Випадок 1: t_0 є максимальним елементом множини $\text{dom}(s_1)$.

Нехай $t_1 = t_*$ і $t_2 = t_0$. Тоді $t_1 < t_0$, $[t_1, t_0] = [t_*, t_0] \cup \{t_0\} \subseteq \text{dom}(s_1)$ і $[t_1, t_0] \in \mathfrak{T}$. Нехай

$$\bar{s}_1 = s_1|_{[t_1, t_0]}.$$

Тоді оскільки $s_1 \in Tr$, то маємо $\bar{s}_1 \in Tr$ за властивістю замкненості відносно власних обмежень Σ . Крім того, $\text{dom}(\bar{s}_1) = [t_1, t_0]$, тому $\bar{s}_1(t_1) \xrightarrow{\bar{s}_1}$. Маємо, що $t_1 = t_* \in \text{dom}(s_2)$ і

$$(\bar{s}_1(t_1), s_2(t_1)) = (s_1(t_*), s_2(t_*)) \in R.$$

Тоді оскільки R є глобальною симуляцією на (Σ, λ) , то існує траєкторія $s'_2 \in Tr$, така, що $s_2(t_1) \xrightarrow{s'_2}$, $\lambda(\bar{s}_1) = \lambda(s'_2)$ і $\bar{s}_1, s'_2$ поточково у відношенні R . Тоді $\text{dom}(s'_2) = \text{dom}(\bar{s}_1) = [t_1, t_0]$, $t_1 \in \text{dom}(s_2) \cap \text{dom}(s'_2)$ і $s_2(t_1) = s'_2(t_1)$. Крім того,

$$\lambda(s'_2) = \lambda(\bar{s}_1) = \lambda(s_1|_{[t_1, t_0]}) \sqsubseteq \lambda(s_1).$$

Оскільки $\text{dom}(\lambda(s'_2)) = \text{dom}(s'_2) = [t_1, t_0]$ і $t_2 = t_0$, то маємо

$$\lambda(s_1) \dot{=}_{[t_1, t_2]} \lambda(s'_2).$$

Крім того, для всіх $t \in [t_1, t_0] = [t_1, t_2]$ маємо

$$(s_1(t), s'_2(t)) = (\bar{s}_1(t), s'_2(t)) \in R,$$

тому s_1, s'_2 поточково у відношенні R на $[t_1, t_2]$.

Вище було показано, що $s'_2 \in Tr$, $t_1 \in \text{dom}(s_2) \cap \text{dom}(s'_2)$, $t_1 < t_0$, $s_2(t_1) = s'_2(t_1)$, $t_2 = t_0$ є максимальним елементом $\text{dom}(s_1)$, $\lambda(s_1) \dot{=}_{[t_1, t_2]} \lambda(s'_2)$ і s_1, s'_2 поточково у відношенні R на $[t_1, t_2]$. Таким чином, умови (1), (2), (3), (4) означення 4.2.7 виконуються для R і $t_0, t_1, t_2, s_1, s_2, s'_2$.

Випадок 2: t_0 є немаксимальним елементом множини $\text{dom}(s_1)$.

Тоді існує елемент $t^* \in \text{dom}(s_1)$, такий, що $t^* > t_0$. Тоді $[t_*, t^*] \subseteq \text{dom}(s_1)$, оскільки $\text{dom}(s_1) \in \mathfrak{T}$. Оскільки f^+ є нормальною правою мірою продовжуваності [69, 68], то $f^+(t_0, t_0) = t_0$ і функція f^+ визначена і неперервна на $\{(x, y) \in$

$T \times T \mid x \leq y\}$. Тоді оскільки $t_0 > t_* \geq 0$, то маємо

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} f^+(t, t_0) = f^+(t_0, t_0) = t_0.$$

Оскільки $t_* < t_0$ і $t^* > t_0$, з цього випливає, що існує елемент $t_1 \in [t_*, t_0)$, такий, що $t^* \geq f^+(t_1, t_0)$. Нехай $t_2 = t^*$ і $\bar{s}_1 = s_1|_{[t_1, t_2]}$. Тоді $\text{dom}(\bar{s}_1) = [t_1, t_2]$, оскільки $t_1 \in [t_*, t_0) \subseteq \text{dom}(s_1)$, $t_2 \in \text{dom}(s_1)$ і $\text{dom}(s_1) \in \mathfrak{T}$. Тоді $s_1(t_1) \xrightarrow{\bar{s}_1}$. Крім того, $\bar{s}_1 \in Tr$ за властивістю замкненості відносно власних обмежень Σ , оскільки $t_1 < t_0 < t^* = t_2$, а також, $[t_1, t_2] \subseteq \text{dom}(s_1)$. Крім того, $(s_1(t_1), s_2(t_1)) \in R$, оскільки $t_1 \in [t_*, t_0)$. Тоді оскільки R є глобальною часовою симуляцією на (Σ, λ) , то існує траєкторія $s'_2 \in Tr$, така, що $s_2(t_1) \xrightarrow{s'_2}$, $\lambda(\bar{s}_1) = \lambda(s'_2)$ і $\bar{s}_1, s'_2$ поточково у відношенні R . Тоді $t_1 \in [t_*, t_0) \subseteq \text{dom}(s_2)$ і

$$t_1 \in [t_1, t_2] = \text{dom}(\bar{s}_1) = \text{dom}(\lambda(\bar{s}_1)) = \text{dom}(\lambda(s'_2)) = \text{dom}(s'_2),$$

оскільки $\lambda(\bar{s}_1) = \lambda(s'_2)$, звідки $t_1 \in \text{dom}(s_2) \cap \text{dom}(s'_2)$.

Маємо $t_1 < t_0$ і $s_2(t_1) = s'_2(t_1)$ (оскільки $s_2(t_1) \xrightarrow{s'_2}$ і t_1 є найменшим елементом множини $\text{dom}(s'_2) = \text{dom}(\bar{s}_1) = [t_1, t_2]$). Таким чином, умова (1) означення 4.2.7 виконується.

Також, маємо

$$t_2 = t^* \geq f^+(t_1, t_0).$$

Таким чином, умова (2) означення 4.2.7 виконується.

Маємо $\lambda(\bar{s}_1) = \lambda(s'_2)$ і $\bar{s}_1 \sqsubseteq s_1$, тому $\lambda(\bar{s}_1) \sqsubseteq \lambda(s_1)$. Також, $\text{dom}(\lambda(\bar{s}_1)) = \text{dom}(\bar{s}_1) = [t_1, t_2]$, тому

$$\lambda(s'_2) = \lambda(\bar{s}_1) = \lambda(s_1)|_{[t_1, t_2]},$$

звідки маємо

$$\lambda(s_1) \dot{=}_{[t_1, t_2]} \lambda(s'_2),$$

оскільки виконується включення

$$[t_1, t_2] \subseteq \text{dom}(s_1) \cap \text{dom}(s'_2) = \text{dom}(\lambda(s_1)) \cap \text{dom}(\lambda(s'_2)).$$

Таким чином,

$$\lambda(s_1) \dot{=}_{[t_1, t_2]} \lambda(s'_2).$$

Тоді умова (3) означення 4.2.7 виконується.

Оскільки $\bar{s}_1 = s_1|_{[t_1, t_2]}$, $\text{dom}(\bar{s}_1) = [t_1, t_2]$ і $\bar{s}_1, s'_2$ поточно у відношенні R , то маємо

$$\text{dom}(s'_2) = \text{dom}(\bar{s}_1) = [t_1, t_2] \subseteq \text{dom}(s_1),$$

тому виконується включення

$$[t_1, t_2] \subseteq \text{dom}(s_1) \cap \text{dom}(s'_2),$$

а також має місце

$$(s_1(t), s'_2(t)) = (\bar{s}_1(t), s'_2(t)) \in R$$

для всіх $t \in [t_1, t_2]$. Тоді s_1, s'_2 поточно у відношенні R на $[t_1, t_2]$. Таким чином, умова (4) означення 4.2.7 виконується.

Таким чином, $R \in f^+$ -часовою симуляцією на (Σ, λ) за означенням 4.2.7. $\square$

Лема 4.2.8. *Нехай $s_0 \in Tr$ і $R \subseteq Q \times Q$. Тоді $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ є замкнутою відносно власних обмежень множиною траєкторій.*

Доведення. За визначенням $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$, кожна траєкторія $s \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ приймає значення у множині Q і $\text{dom}(s) \in \mathfrak{T}$. Нехай $s \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$, $A \in \mathfrak{T}$ і $A \subseteq \text{dom}(s)$. Тоді $\text{dom}(s|_A) = \text{dom}(s) \cap A = A \in \mathfrak{T}$. Крім того, існує функція $\hat{s} \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$, така, що $s \sqsubseteq \hat{s}$, звідки $s|_A \sqsubseteq \hat{s}$. Тоді $s|_A \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$. Отже, $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ є замкнутою відносно власних обмежень множиною траєкторій. $\square$

Лема 4.2.9. *Нехай $s_0 \in Tr$ і $R \subseteq Q \times Q$. Тоді $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ є замкнутою відносно власних обмежень множиною траєкторій, що має недетерміновану марківську властивість.*

Доведення. Згідно леми 4.2.8, $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ є замкнутою відносно власних обмежень множиною траєкторій.

Нехай $s_1, s_2 \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ і $t_0 \in T$ є такими, що t_0 є найбільшим елементом $\text{dom}(s_1)$, є найменшим елементом $\text{dom}(s_2)$ і $s_1(t_0) = s_2(t_0)$. Тоді існують $\hat{s}_1, \hat{s}_2 \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$, такі, що $s_1 \sqsubseteq \hat{s}_1$ і $s_2 \sqsubseteq \hat{s}_2$. Нехай

$$s : \text{dom}(s_1) \cup \text{dom}(s_2) \rightarrow Q$$

є функцією, такою, що

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t), & t \in \text{dom}(s_1), \\ s_2(t), & t \in \text{dom}(s_2). \end{cases}$$

Нехай

$$D_1 = \text{dom}(\hat{s}_1) \cap [0, t_0],$$

$$D_2 = \text{dom}(\hat{s}_2) \cap [t_0, +\infty),$$

і $\hat{s} : D_1 \cup D_2 \rightarrow Q$ є функцією, такою, що

$$\hat{s}(t) = \begin{cases} \hat{s}_1(t), & t \in D_1, \\ \hat{s}_2(t), & t \in D_2. \end{cases}$$

Слід зауважити, що це визначення коректне, оскільки $D_1 \cap D_2 \subseteq \{t_0\}$ і

$$\hat{s}_1(t_0) \downarrow = s_1(t_0) = s_2(t_0) = \hat{s}_2(t_0).$$

Тоді $t_0 \in \text{dom}(\hat{s})$ і $\hat{s}(t_0) = s_1(t_0) = s_2(t_0)$. Крім того, оскільки $\text{dom}(s_1) \in \mathfrak{T}$ і t_0 є найбільшим елементом $\text{dom}(s_1)$, то маємо

$$\text{dom}(s_1) \cap [0, t_0] = \text{dom}(s_1) \in \mathfrak{T}$$

і $t_0 > 0$, звідки, оскільки $\text{dom}(s_1) \subseteq \text{dom}(\hat{s}_1)$, $\text{dom}(\hat{s}_1) \in \mathfrak{T}$ і $[0, t_0] \in \mathfrak{T}$, то

$$D_1 = \text{dom}(\hat{s}_1) \cap [0, t_0] \in \mathfrak{T}.$$

Оскільки $\text{dom}(s_2) \in \mathfrak{T}$, а t_0 є найменшим елементом $\text{dom}(s_2)$, то маємо

$$\text{dom}(s_2) \cap [t_0, +\infty) = \text{dom}(s_2) \in \mathfrak{T},$$

звідки оскільки $\text{dom}(s_2) \subseteq \text{dom}(\hat{s}_2)$, $\text{dom}(\hat{s}_2) \in \mathfrak{T}$ і $[t_0, +\infty) \in \mathfrak{T}$, то

$$D_2 = \text{dom}(\hat{s}_2) \cap [t_0, +\infty) \in \mathfrak{T}.$$

Крім того, $t_0 \in D_1 \cap D_2$. Оскільки $D_1, D_2 \in \mathfrak{T}$ і $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, то маємо

$$\text{dom}(\hat{s}) = D_1 \cup D_2 \in \mathfrak{T}.$$

Крім того, $\text{dom}(s_1) \subseteq \text{dom}(\hat{s}_1) \cap [0, t_0] = D_1$, $\text{dom}(s_2) \subseteq \text{dom}(\hat{s}_2) \cap [t_0, +\infty) = D_2$, $s_1 \sqsubseteq \hat{s}_1$ і $s_2 \sqsubseteq \hat{s}_2$, звідки $s \sqsubseteq \hat{s}$ і $\text{dom}(s) \subseteq \text{dom}(\hat{s})$ за визначеннями s і $\hat{s}$.

Доведемо, що

$$s \in \text{Tr}_{s_0, R}(\Sigma, \lambda).$$

Оскільки $\text{dom}(s_1), \text{dom}(s_2) \in \mathfrak{T}$ і $\text{dom}(s_1) \cap \text{dom}(s_2) \neq \emptyset$, то маємо

$$\text{dom}(s) = \text{dom}(s_1) \cup \text{dom}(s_2) \in \mathfrak{T}.$$

Розглянемо такі три випадки.

Випадок 1: $\text{dom}(s_0) \cap D_1 \in \mathfrak{T}$ і $\text{dom}(s_0) \cap D_2 \in \mathfrak{T}$.

Доведемо, що

$$\hat{s} \in \text{Tr}_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda).$$

Маємо $\text{dom}(\hat{s}) \in \mathfrak{T}$. Крім того, для $i = 1, 2$ маємо $\hat{s}_i|_{\text{dom}(s_0)} \in \text{Tr}$, оскільки $\hat{s}_i \in \text{Tr}_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$. Оскільки $t_0 \in D_1 \cap D_2$, $D_1 \subseteq [0, t_0]$ і $D_2 \subseteq [t_0, +\infty)$, то t_0 є найбільшим елементом D_1 і є найменшим елементом D_2 . Тоді оскільки $\text{dom}(s_0) \cap D_i \in \mathfrak{T}$ виконується для $i = 1, 2$, то існують деякі елементи $t_1, t_2 \in \text{dom}(s_0)$, такі, що $t_1 < t_0$ і $t_2 > t_0$, а оскільки $\text{dom}(s_0)$ є проміжком, то маємо

$$t_0 \in [t_1, t_2] \subseteq \text{dom}(s_0).$$

Оскільки для $i = 1, 2$ виконується

$$\text{dom}(s_0) \cap D_i \subseteq \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s}_i) = \text{dom}(\hat{s}_i|_{\text{dom}(s_0)}),$$

а також, $\text{dom}(s_0) \cap D_i \in \mathfrak{T}$ і $\hat{s}_i|_{\text{dom}(s_0)} \in \text{Tr}$, то маємо

$$(\hat{s}_i|_{\text{dom}(s_0)})|_{D_i} = (\hat{s}_i|_{\text{dom}(s_0)})|_{\text{dom}(s_0) \cap D_i} \in \text{Tr}$$

для $i = 1, 2$ за властивістю замкненості відносно власних обмежень множини Tr .

Крім того, t_0 є найбільшим елементом множини

$$\begin{aligned} \text{dom}(s_0) \cap D_1 &= \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s}_1) \cap [0, t_0] = \\ &= \text{dom}(\hat{s}_1) \cap \text{dom}(s_0) \cap D_1 = \text{dom}((\hat{s}_1|_{\text{dom}(s_0)})|_{D_1}) \end{aligned}$$

і є найменшим елементом множини

$$\begin{aligned} \text{dom}(s_0) \cap D_2 &= \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s}_2) \cap [t_0, +\infty) = \\ &= \text{dom}(\hat{s}_2) \cap \text{dom}(s_0) \cap D_2 = \text{dom}((\hat{s}_2|_{\text{dom}(s_0)})|_{D_2}). \end{aligned}$$

Також, має місце

$$\begin{aligned} (\hat{s}_1|_{\text{dom}(s_0)})|_{D_1}(t_0) &\downarrow = \hat{s}_1(t_0) \downarrow = s_1(t_0) = \\ &= s_2(t_0) = \hat{s}_2(t_0) = (\hat{s}_2|_{\text{dom}(s_0)})|_{D_2}(t_0). \end{aligned}$$

Тоді з визначення $\hat{s}$ і недетермінованої марківської властивості Tr випливає, що $\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$. Крім того, оскільки $\hat{s}_1, \hat{s}_2 \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$, то маємо

$$\lambda((\hat{s}_i|_{\text{dom}(s_0)})|_{D_i}) \sqsubseteq \lambda(\hat{s}_i|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$$

для $i = 1, 2$ і $s_0, \hat{s}_i$ поточно у відношенні R на $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s}_i)$. Для $i = 1, 2$ маємо $\hat{s}_i|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$, $\text{dom}(s_0) \cap D_i \in \mathfrak{T}$ і $\text{dom}(s_0) \cap D_i \subseteq \text{dom}(\hat{s}_i|_{\text{dom}(s_0)})$. Тоді, використовуючи лему 4.2.3 і той факт, що $\lambda((\hat{s}_i|_{\text{dom}(s_0)})|_{D_i}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$, маємо, що така умова виконується для $i = 1, 2$ і всіх $t \in \text{dom}(s_0) \cap D_i$:

$$\begin{aligned} \lambda(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)})(t) &= \lambda((\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)})|_{\text{dom}(s_0) \cap D_i})(t) = \\ &= \lambda((\hat{s}_i|_{\text{dom}(s_0)})|_{D_i})(t) = \lambda(s_0)(t). \end{aligned}$$

Тоді має місце рівність

$$\lambda(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)})(t) = \lambda(s_0)(t)$$

для всіх елементів

$$\begin{aligned} t &\in (\text{dom}(s_0) \cap D_1) \cup (\text{dom}(s_0) \cap D_2) = \\ &= \text{dom}(s_0) \cap (D_1 \cup D_2) = \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s}) = \text{dom}(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)}), \end{aligned}$$

звідки маємо

$$\lambda(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0).$$

Для $i = 1, 2$ і для всіх $t \in \text{dom}(s_0) \cap D_i$,

$$(s_0(t), \hat{s}(t)) = (s_0(t), \hat{s}_i(t)) \in R,$$

оскільки $s_0, \hat{s}_i$ поточно у відношенні R на множині $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s}_i)$ і має місце включення $D_i \subseteq \text{dom}(\hat{s}_i)$. Тоді $(s_0(t), \hat{s}(t)) \in R$ для всіх елементів

$$t \in (\text{dom}(s_0) \cap D_1) \cup (\text{dom}(s_0) \cap D_2) =$$

$$= \text{dom}(s_0) \cap (D_1 \cup D_2) = \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s}),$$

тому $s_0, \hat{s}$ поточно у відношенні R на $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s})$.

Тоді $\text{dom}(\hat{s}) \in \mathfrak{T}$, $\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$, $\lambda(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$ і $s_0, \hat{s}$ поточно у відношенні R на $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s})$, тому

$$\hat{s} \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$$

за визначенням $Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$.

Таким чином, $\hat{s} \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$, а також $\text{dom}(s) \in \mathfrak{T}$ і $s \sqsubseteq \hat{s}$, тому

$$s \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda).$$

Випадок 2: існує індекс $j \in \{1, 2\}$, такий, що виконується $\text{dom}(s_0) \cap D_j \in \mathfrak{T}$ і $\text{dom}(s_0) \cap D_{3-j} \notin \mathfrak{T}$.

Доведемо, що $\hat{s} \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$. Маємо $\text{dom}(\hat{s}) \in \mathfrak{T}$. Крім того, для $i = 1, 2$ виконується

$$\hat{s}_i|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr,$$

оскільки $\hat{s}_i \in Tr_{s_0}^0(\Sigma, \lambda)$. Оскільки $\text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}$, $D_{3-j} \in \mathfrak{T}$ і $\text{dom}(s_0) \cap D_{3-j} \notin \mathfrak{T}$, то $\text{dom}(s_0) \cap D_{3-j}$ є або порожньою множиною, або одноелементною множиною. Крім того, множина $\text{dom}(s_0) \cap D_{3-j}$ не може містити елемент, відмінний від t_0 , оскільки в іншому випадку, кожна з множин $\text{dom}(s_0) \cap D_j$ і $\text{dom}(s_0) \cap D_{3-j}$ містила би елемент, відмінний від t_0 , тому, оскільки $\text{dom}(s_0)$ є проміжком, $\text{dom}(s_0)$ містив би окіл t_0 , що неможливо, оскільки $\text{dom}(s_0) \cap D_{3-j} \notin \mathfrak{T}$, $D_{3-j} \in \mathfrak{T}$ і $t_0 \in D_{3-j}$.

Таким чином, $\text{dom}(s_0) \cap D_{3-j}$ є або порожньою множиною, або є множиною $\{t_0\}$. У першому випадку, $\text{dom}(s_0) \cap D_{3-j} = \emptyset \subseteq \text{dom}(s_0) \cap D_j$, а у другому випадку, $t_0 \in \text{dom}(s_0) \cap D_{3-j} \subseteq \text{dom}(s_0)$ і $t_0 \in D_j$ (оскільки $t_0 \in D_1 \cap D_2$), тому $\text{dom}(s_0) \cap D_{3-j} = \{t_0\} \subseteq \text{dom}(s_0) \cap D_j$. Таким чином, в обох випадках має місце включення

$$\text{dom}(s_0) \cap D_{3-j} \subseteq \text{dom}(s_0) \cap D_j.$$

Тоді має місце рівність

$$\begin{aligned} \text{dom}(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)}) &= \text{dom}(\hat{s}) \cap \text{dom}(s_0) = (D_1 \cup D_2) \cap \text{dom}(s_0) = \\ &= (D_j \cap \text{dom}(s_0)) \cup (D_{3-j} \cap \text{dom}(s_0)) = D_j \cap \text{dom}(s_0) = \\ &= \text{dom}(\hat{s}_j) \cap D_j \cap \text{dom}(s_0) = \text{dom}((\hat{s}_j|_{\text{dom}(s_0)})|_{D_j}). \end{aligned}$$

Крім того, $\hat{s}_j|_{D_j} \sqsubseteq \hat{s}$ за визначенням $\hat{s}$, звідки

$$(\hat{s}_j|_{\text{dom}(s_0)})|_{D_j} = (\hat{s}_j|_{D_j})|_{\text{dom}(s_0)} \sqsubseteq \hat{s}|_{\text{dom}(s_0)},$$

тому має місце рівність

$$(\hat{s}_j|_{\text{dom}(s_0)})|_{D_j} = \hat{s}|_{\text{dom}(s_0)}.$$

Крім того, $\text{dom}(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)}) = \text{dom}(s_0) \cap D_j$. Тоді маємо

$$(\hat{s}_j|_{\text{dom}(s_0)})|_{D_j} = (\hat{s}_j|_{\text{dom}(s_0)})|_{\text{dom}(s_0) \cap D_j} = \hat{s}_j|_{\text{dom}(s_0)},$$

оскільки $\text{dom}(s_0) \cap D_j = \text{dom}(\hat{s}_j|_{\text{dom}(s_0)})$. Тоді

$$\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)} = (\hat{s}_j|_{\text{dom}(s_0)})|_{D_j} = \hat{s}_j|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr,$$

$$\lambda(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)}) = \lambda(\hat{s}_j|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0),$$

оскільки $\hat{s}_j \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$. Крім того, $s_0, \hat{s}_j$ поточково у відношенні R на множині $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s}_j)$, звідки

$$(s_0(t), \hat{s}(t)) = (s_0(t), \hat{s}_j(t)) \in R$$

для всіх $t \in \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s})$, оскільки $\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)} = \hat{s}_j|_{\text{dom}(s_0)}$. Тоді $s_0, \hat{s}$ поточково у відношенні R на $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s})$.

Отже, $dom(\hat{s}) \in \mathfrak{T}$, $\hat{s}|_{dom(s_0)} \in Tr$, $\lambda(\hat{s}|_{dom(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$ і $s_0, \hat{s}$ поточково у відношенні R на $dom(s_0) \cap dom(\hat{s})$. Тоді

$$\hat{s} \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$$

за визначенням множини $Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$. Таким чином, маємо $dom(s) \in \mathfrak{T}$, $s \sqsubseteq \hat{s}$ і $\hat{s} \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$, звідки

$$s \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda).$$

Випадок 3: $dom(s_0) \cap D_1 \notin \mathfrak{T}$ і $dom(s_0) \cap D_2 \notin \mathfrak{T}$.

Оскільки $D_1, D_2 \in \mathfrak{T}$ і $dom(s_0) \in \mathfrak{T}$, то для кожного індексу $i = 1, 2$ множина $dom(s_0) \cap D_i$ є або порожньою, або одноелементною. Тоді множини $dom(s_0) \cap dom(\hat{s}_1) \cap [0, t_0]$ і $dom(s_0) \cap dom(\hat{s}_2) \cap [t_0, +\infty)$ є скінченними. Для $i = 1, 2$ виконується

$$\begin{aligned} & (dom(s_0) \cap dom(\hat{s}_i) \cap [0, t_0]) \cup (dom(s_0) \cap dom(\hat{s}_i) \cap [t_0, +\infty)) = \\ & = (dom(s_0) \cap dom(\hat{s}_i)) \cup ([0, t_0] \cup [t_0, +\infty)) = \\ & = dom(s_0) \cap dom(\hat{s}_i) = dom(\hat{s}_i|_{dom(s_0)}) \in \mathfrak{T}, \end{aligned}$$

оскільки $\hat{s}_i \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$. Тоді множини $dom(s_0) \cap dom(\hat{s}_1) \cap [t_0, +\infty)$ і $dom(s_0) \cap dom(\hat{s}_2) \cap [0, t_0]$ є нескінченними. Тоді існує елемент

$$t_1 \in dom(s_0) \cap dom(\hat{s}_1),$$

такий, що $t_1 > t_0$ і існує елемент

$$t_2 \in dom(s_0) \cap dom(\hat{s}_2),$$

такий, що $t_2 < t_0$. Оскільки $dom(s_0) \in \mathfrak{T}$, $t_1, t_2 \in dom(s_0)$ і $t_2 < t_0 < t_1$, то

$$t_0 \in [t_2, t_1] \subseteq dom(s_0).$$

Тоді $[t_2, t_0] \subseteq dom(s_0) \cap [0, t_0]$, звідки

$$[t_2, t_0] \cap dom(\hat{s}_1) = [t_2, t_0] \cap dom(s_0) \cap [0, t_0] \cap dom(\hat{s}_1) \subseteq dom(s_0) \cap D_1.$$

Тоді виконуються включення

$$\text{dom}(s_0) \cap D_1 \supseteq [t_2, t_0] \cap \text{dom}(\hat{s}_1) \supseteq [t_2, t_0] \cap \text{dom}(s_1),$$

оскільки $s_1 \sqsubseteq \hat{s}_1$. Оскільки t_0 є найбільшим елементом множини $\text{dom}(s_1)$, $\text{dom}(s_1) \in \mathfrak{T}$ і $t_2 < t_0$, то маємо

$$[t_2, t_0] \cap \text{dom}(s_1) \in \mathfrak{T}.$$

Тоді $\text{dom}(s_0) \cap D_1$ є нескінченною множиною. Це суперечить тому факту, що кожна з множин $\text{dom}(s_0) \cap D_i$, $i = 1, 2$ є або порожньою, або одноелементною, як було зазначено вище. Маємо суперечність, тому даний випадок неможливий.

Таким чином, у всіх можливих випадках виконується $s \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$. Отже, $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ є замкненою відносно власних обмежень множиною траєкторій, що має недетерміновану марківську властивість. $\square$

Лема 4.2.10. Нехай $s_0 \in Tr$, $R \subseteq Q \times Q$, $s \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$. Припустимо, що $\text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}$. Тоді $s \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$.

Доведення. Оскільки $s \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$, то $s : T \rightarrow Q$, $\text{dom}(s) \in \mathfrak{T}$ і існує траєкторія

$$\hat{s} \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda),$$

така, що $s \sqsubseteq \hat{s}$. Тоді $\text{dom}(\hat{s}) \in \mathfrak{T}$, $\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$, $\lambda(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$ і $s_0, \hat{s}$ поточною у відношенні R на $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s})$.

Оскільки $\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$, $\text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}$ і

$$\text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0) \subseteq \text{dom}(\hat{s}) \cap \text{dom}(s_0) = \text{dom}(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)}),$$

то маємо

$$(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)})|_{\text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0)} \in Tr$$

за властивістю замкненості відносно власних обмежень множини Tr . Тоді

$$s|_{\text{dom}(s_0)} = (\hat{s}|_{\text{dom}(s)})|_{\text{dom}(s_0)} = (\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)})|_{\text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0)} \in Tr.$$

Крім того, виконується рівність

$$\lambda(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)})(t) = \lambda((\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)})|_{\text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0)})(t)$$

для всіх $t \in \text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0)$ за лемою 4.2.3. Тоді

$$\lambda(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)})(t) = \lambda(s|_{\text{dom}(s_0)})(t)$$

для всіх $t \in \text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0)$. Тоді оскільки $\lambda(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$, то маємо

$$\lambda(s|_{\text{dom}(s_0)})(t) = \lambda(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)})(t) = \lambda(s_0)(t)$$

для всіх елементів

$$t \in \text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0) = \text{dom}(s|_{\text{dom}(s_0)}).$$

Тоді виконується відношення

$$\lambda(s|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0).$$

Оскільки, $s_0, \hat{s}$ поточною у відношенні R на $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s})$ і $s \sqsubseteq \hat{s}$, то $(s_0(t), s(t)) = (s_0(t), \hat{s}(t)) \in R$ для всіх $t \in \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s)$. Тоді s_0, s поточною у відношенні R на $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s)$.

Отже, $\text{dom}(s) \in \mathfrak{T}$, $s|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$, $\lambda(s|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$ і s_0, s поточною у відношенні R на $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s)$. Таким чином, маємо

$$s \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$$

за визначенням множини $Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$. □

Лема 4.2.11. Нехай Tr' є замкнутою відносно власних обмежень множиною траєкторій, $C \subseteq Tr'$ є непорожнім $\sqsubseteq$ -ланцюгом і $s^* \in Tr'$. Тоді s^* є точною верхньою межею C у Tr' (що розглядається як частково впорядкована множина з порядком $\sqsubseteq$) тоді і тільки тоді, коли графік функції s^* є об'єднанням графіків елементів C .

Доведення. Спочатку припустимо, що Tr' є замкнутою відносно власних обмежень множиною траєкторій, $C \subseteq Tr'$ є непорожнім $\sqsubseteq$ -ланцюгом, $s^* \in Tr'$ і графік s^* є об'єднанням графіків елементів C . Доведемо, що s^* є точною верхньою ме-

жею C в Tr' у сенсі $\sqsubseteq$. Маємо $s^*(t) \downarrow = s(t)$ для всіх $s \in C$ і $t \in \text{dom}(s)$. Тоді $s \sqsubseteq s^*$ для всіх $s \in C$, а також $s^* \in Tr'$, тому s^* є верхньою межею C у Tr' у сенсі $\sqsubseteq$.

Нехай $\hat{s}$ є довільною верхньою межею C у Tr' у сенсі $\sqsubseteq$. Тоді $s \sqsubseteq \hat{s}$ для всіх $s \in C$, тому $\hat{s}(t) \downarrow = s(t)$ для всіх $s \in C$ і $t \in \text{dom}(s)$. Тоді $\hat{s}(t) \downarrow = s^*(t)$ для всіх $t \in \bigcup_{s \in C} \text{dom}(s)$. Маємо

$$\bigcup_{s \in C} \text{dom}(s) = \text{dom}(s^*),$$

оскільки графік s^* є об'єднанням графіків елементів C . Тоді виконується

$$\hat{s}(t) \downarrow = s^*(t)$$

для всіх $t \in \text{dom}(s^*)$, тому $s^* \sqsubseteq \hat{s}$. Оскільки $\hat{s}$ є довільною верхньою межею C і s^* є верхньою межею C , можемо зробити висновок, що s^* є точною верхньою межею C у Tr' у сенсі $\sqsubseteq$.

Тепер припустимо, що Tr' є замкнутою відносно власних обмежень множиною траєкторій, $C \subseteq Tr'$ є непорожнім $\sqsubseteq$ -ланцюгом, $s^* \in Tr'$ і s^* є точною верхньою межею C в Tr' . Покажемо, що графік s^* є об'єднанням графіків елементів C . Позначимо

$$A = \bigcup_{s \in C} \text{dom}(s).$$

Маємо $s \sqsubseteq s^*$ для всіх $s \in C$, тому $\text{dom}(s) \subseteq \text{dom}(s^*)$ для всіх $s \in C$, звідки

$$A = \bigcup_{s \in C} \text{dom}(s) \subseteq \text{dom}(s^*).$$

Оскільки C є непорожнім $\sqsubseteq$ -ланцюгом, то $\{\text{dom}(s) \mid s \in C\}$ є непорожнім $\subseteq$ -ланцюгом. Крім того, $\{\text{dom}(s) \mid s \in C\}$ складається з проміжків у T які містять більше одного елементу, тому

$$A = \bigcup \{\text{dom}(s) \mid s \in C\} \in \mathfrak{T}.$$

Оскільки $s^* \in Tr'$, $A \subseteq \text{dom}(s^*)$ і $A \in \mathfrak{T}$, то за властивістю замкненості відносно власних обмежень Tr' маємо

$$s^*|_A \in Tr'.$$

Крім того, для всіх $s \in C$ маємо

$$s = s|_A \sqsubseteq s^*|_A,$$

оскільки $\text{dom}(s) \subseteq A$ і $s \sqsubseteq s^*$. Тоді $s^*|_A \in Tr'$ є верхньою межею ланцюга C у Tr' у сенсі $\sqsubseteq$. Оскільки s^* є точною верхньою межею C , то маємо

$$s^* \sqsubseteq s^*|_A.$$

Тоді $\text{dom}(s^*) \subseteq A$. Як було показано вище, $A \subseteq \text{dom}(s^*)$, тому

$$\text{dom}(s^*) = A = \bigcup_{s \in C} \text{dom}(s).$$

Крім того, $s^*(t) \downarrow = s(t)$ для всіх $s \in C$ і $t \in \text{dom}(s)$ (оскільки $s \sqsubseteq s^*$), тому графік s^* включає об'єднання графіків всіх елементів C , і оскільки

$$\text{dom}(s^*) = \bigcup_{s \in C} \text{dom}(s),$$

то графік s^* є об'єднанням графіків усіх елементів C .

□

Лема 4.2.12. Нехай $s_0 \in Tr$ і $R \subseteq Q \times Q$. Тоді $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ є повною замкненою відносно власних обмежень множиною траєкторій.

Доведення. Згідно леми 4.2.8, $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ є замкненою відносно власних обмежень множиною траєкторій.

Нехай C є непорожнім ланцюгом у частково впорядкованій множині $(Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda), \sqsubseteq)$. Розглянемо функцію $s^* : \bigcup_{s \in C} \text{dom}(s) \rightarrow Q$, таку, що її графік є об'єднанням графіків елементів C (така функція існує, оскільки C є $\sqsubseteq$ -ланцюгом). Оскільки $\{\text{dom}(s) \mid s \in C\}$ є непорожнім $\subseteq$ -ланцюгом елементів множини $\mathfrak{T}$, то маємо $\text{dom}(s^*) \in \mathfrak{T}$.

Доведемо, що $s^* \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$. Розглянемо два випадки.

Випадок 1: для кожного $s \in C$ виконується $\text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0) \notin \mathfrak{T}$. Для кожної множини $A \in \mathfrak{T}$ позначимо

$$\text{ends}(A) = \{\inf A, \sup A\},$$

тобто $ends(A)$ є множиною кінців проміжку A . Оскільки для кожного $s \in C$ виконується $dom(s) \in \mathfrak{T}$, $dom(s_0) \in \mathfrak{T}$ і $dom(s) \cap dom(s_0) \notin \mathfrak{T}$, то

$$dom(s) \cap dom(s_0) \subseteq ends(dom(s_0)).$$

Тоді має місце включення

$$\begin{aligned} dom(s^*) \cap dom(s_0) &= \left(\bigcup_{s \in C} dom(s) \right) \cap dom(s_0) = \\ &= \bigcup_{s \in C} (dom(s) \cap dom(s_0)) \subseteq ends(dom(s_0)). \end{aligned}$$

Тоді $dom(s^*) \cap dom(s_0)$ є скінченною множиною. Оскільки $dom(s^*) \in \mathfrak{T}$ і $dom(s_0) \in \mathfrak{T}$, то можемо зробити висновок, що множина $dom(s^*) \cap dom(s_0)$ є або порожньою, або одноелементною. Тоді оскільки $C \neq \emptyset$ і $dom(s^*) = \bigcup_{s \in C} dom(s)$, то існує функція $s_1 \in C$, така, що

$$dom(s^*) \cap dom(s_0) \subseteq dom(s_1).$$

Маємо $s_1 \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$, тому $dom(s_1) \in \mathfrak{T}$ і існує траєкторія

$$\hat{s}_1 \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda),$$

така, що $s_1 \sqsubseteq \hat{s}_1$. Нехай $\hat{s}^* : dom(s^*) \cup dom(\hat{s}_1) \rightarrow Q$ є функцією, такою, що

$$\hat{s}^*(t) = \begin{cases} s^*(t), & t \in dom(s^*), \\ \hat{s}_1(t), & t \in dom(\hat{s}_1) \setminus dom(s^*). \end{cases}$$

Тоді, $s^* \sqsubseteq \hat{s}^*$. Доведемо, що виконується

$$\hat{s}^* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda).$$

Маємо $dom(s^*) \in \mathfrak{T}$, $dom(\hat{s}_1) \in \mathfrak{T}$ і

$$dom(s^*) \cap dom(\hat{s}_1) \supseteq dom(s_1) \neq \emptyset,$$

тому виконується

$$\text{dom}(\hat{s}^*) = \text{dom}(s^*) \cup \text{dom}(\hat{s}_1) \in \mathfrak{T}.$$

Оскільки $s_1 \in C$, то для кожного елементу $t \in \text{dom}(s_1)$ маємо

$$s^*(t) = s_1(t) = \hat{s}_1(t).$$

Тоді оскільки $\text{dom}(s^*) \cap \text{dom}(s_0) \subseteq \text{dom}(s_1)$, то $s^*(t) = \hat{s}_1(t)$ для всіх елементів $t \in \text{dom}(s^*) \cap \text{dom}(s_0)$. Тоді з визначення $\hat{s}^*$ випливає, що $\hat{s}^*(t) = \hat{s}_1(t)$ для всіх

$$t \in \text{dom}(\hat{s}^*) \cap \text{dom}(s_0) = \text{dom}(\hat{s}^*|_{\text{dom}(s_0)}).$$

Тоді виконується відношення

$$\hat{s}^*|_{\text{dom}(s_0)} \sqsubseteq \hat{s}_1|_{\text{dom}(s_0)}.$$

Тоді оскільки має місце включення

$$\begin{aligned} \text{dom}(\hat{s}_1|_{\text{dom}(s_0)}) &= \text{dom}(\hat{s}_1) \cap \text{dom}(s_0) \subseteq \\ &\subseteq \text{dom}(\hat{s}^*) \cap \text{dom}(s_0) = \text{dom}(\hat{s}^*|_{\text{dom}(s_0)}), \end{aligned}$$

то має місце рівність

$$\hat{s}^*|_{\text{dom}(s_0)} = \hat{s}_1|_{\text{dom}(s_0)}.$$

Тоді оскільки $\hat{s}_1 \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$, то маємо

$$\hat{s}^*|_{\text{dom}(s_0)} = \hat{s}_1|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr,$$

$$\lambda(\hat{s}^*|_{\text{dom}(s_0)}) = \lambda(\hat{s}_1|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0).$$

Крім того, $s_0, \hat{s}_1$ поточно у відношенні R , тому

$$(s_0(t), \hat{s}^*(t)) = (s_0(t), \hat{s}_1(t)) \in R$$

для всіх елементів

$$t \in \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s}_1) = \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s}^*).$$

Тоді $s_0, \hat{s}^*$ поточково у відношенні R на $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s}^*)$. Крім того, $\text{dom}(\hat{s}^*) \in \mathfrak{T}$. Таким чином, виконується

$$\hat{s}^* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$$

за визначенням $Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$.

Отже, $\hat{s}^* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$, $s^* \sqsubseteq \hat{s}^*$ і $\text{dom}(s^*) \in \mathfrak{T}$, тому

$$s^* \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda).$$

Випадок 2: існує $s_1 \in C$, такий, що $\text{dom}(s_1) \cap \text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}$. Нехай

$$C_1 = \{s \in C \mid s_1 \sqsubseteq s\}.$$

Тоді $C_1 \subseteq C \subseteq Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$.

Для кожного $s \in C_1$ маємо $\text{dom}(s) \in \mathfrak{T}$, $\text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}$ і $\text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0) \supseteq \text{dom}(s_1) \cap \text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}$, тому виконується

$$\text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}.$$

Тоді оскільки $C_1 \subseteq Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$, то для кожного $s \in C_1$ маємо

$$s \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$$

за лемою 4.2.10. Тоді має місце включення

$$C_1 \subseteq Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda).$$

Тоді для кожного $s \in C_1$ маємо $\text{dom}(s) \in \mathfrak{T}$, $s|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$, $\lambda(s|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$ і s_0, s поточково у відношенні R на $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s)$.

Позначимо

$$C' = \{s|_{\text{dom}(s_0)} \mid s \in C_1\}.$$

Тоді $C' \subseteq Tr$. Маємо $s_1 \in C$, тому $C_1 \neq \emptyset$. Оскільки C є $\sqsubseteq$ -ланцюгом, то C_1 також є $\sqsubseteq$ -ланцюгом. Тоді, C' є непорожнім $\sqsubseteq$ -ланцюгом у Tr . Тоді C' має точну верхню межу у Tr у сенсі $\sqsubseteq$ за властивістю повноти Tr . Позначимо цю точну верхню межу як s' . Тоді $s' \in Tr$ і $s|_{\text{dom}(s_0)} \sqsubseteq s'$ для всіх $s \in C_1$, тому $s'(t) \downarrow = s(t) = s^*(t)$

для всіх $s \in C_1$ і $t \in \text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0)$. Оскільки $s_1 \in C$ і $C \in \sqsubseteq$ -ланцюгом, маємо

$$C \setminus C_1 = \{s \in C \mid \neg(s_1 \sqsubseteq s)\} \subseteq \{s \in C \mid s \sqsubseteq s_1\}.$$

Тоді $s_1(t) \downarrow = s(t)$ для всіх $s \in C \setminus C_1$ і $t \in \text{dom}(s)$. Тоді для кожного $s \in C \setminus C_1$ і $t \in \text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0)$ виконується $t \in \text{dom}(s_1) \cap \text{dom}(s_0)$ і $s'(t) \downarrow = s_1(t) = s^*(t) = s(t)$, оскільки $s_1 \in C_1$. Таким чином, $s'(t) \downarrow = s^*(t)$ для всіх $s \in C_1 \cup (C \setminus C_1) = C$ і $t \in \text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0)$. Тоді $s'(t) \downarrow = s^*(t)$ для всіх елементів

$$t \in \bigcup_{s \in C} (\text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0)) = \text{dom}(s^*) \cap \text{dom}(s_0) = \text{dom}(s^*|_{\text{dom}(s_0)}).$$

Тоді $s^*|_{\text{dom}(s_0)} \sqsubseteq s'$. Позначимо

$$D = \text{dom}(s^*) \cap \text{dom}(s_0).$$

Маємо $\text{dom}(s_1) \in \mathfrak{T}$, $\text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}$ і $\text{dom}(s^*) \cap \text{dom}(s_0) \supseteq \text{dom}(s_1) \cap \text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}$, тому виконується

$$D = \text{dom}(s^*) \cap \text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}.$$

Крім того, має місце включення

$$D = \text{dom}(s^*|_{\text{dom}(s_0)}) \subseteq \text{dom}(s'),$$

оскільки $s^*|_{\text{dom}(s_0)} \sqsubseteq s'$. Крім того, $s' \in Tr$. Тоді $s'|_D \in Tr$ за властивістю замкненості відносно власних обмежень множини Tr . Маємо

$$\text{dom}(s|_{\text{dom}(s_0)}) = \text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0) \subseteq D$$

для всіх $s \in C$. Тоді оскільки $s' \in \sqsubseteq$ -верхньою межею C_1 і $C_1 \subseteq C$, то

$$s|_{\text{dom}(s_0)} \sqsubseteq s'|_D$$

для всіх $s \in C_1$. Тоді $s'|_D \in \sqsubseteq$ -верхньою межею множини C_1 і $s'|_D \in Tr$, тому $s' \sqsubseteq s'|_D$. Тоді $s' = s'|_D$, тому

$$\text{dom}(s') \subseteq D = \text{dom}(s^*|_{\text{dom}(s_0)}).$$

Тоді оскільки $s^*|_{dom(s_0)} \sqsubseteq s'$, то $s^*|_{dom(s_0)} = s'$. Тоді $s^*|_{dom(s_0)} \in Tr$.

Доведемо, що має місце відношення

$$\lambda(s^*|_{dom(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0).$$

Оскільки $s' \in Tr$ є точною верхньою межею непорожнього ланцюга $C' \subseteq Tr$, то $\lambda(s')$ є точною верхньою межею множини $\{\lambda(s) \mid s \in C'\}$ у $\{\lambda(s) \mid s \in Tr\}$ (як частково впорядкованій множині з порядком $\sqsubseteq$) за лемою 4.2.2. Для кожного $s \in C'$ існує $\hat{s} \in C_1$, така, що виконується рівність

$$s = \hat{s}|_{dom(s_0)}.$$

Як було показано вище, $C_1 \subseteq Tr_{s_0,R}^0(\Sigma, \lambda)$, тому

$$\hat{s} \in Tr_{s_0,R}^0(\Sigma, \lambda).$$

Тоді має місце таке відношення

$$\lambda(s) = \lambda(\hat{s}|_{dom(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$$

за визначенням $Tr_{s_0,R}^0(\Sigma, \lambda)$. Таким чином, $\lambda(s) \sqsubseteq \lambda(s_0)$ для всіх $s \in C'$. Тоді оскільки $s_0 \in Tr$, то $\lambda(s_0)$ є верхньою межею множини $\{\lambda(s) \mid s \in C'\}$ у $\{\lambda(s) \mid s \in Tr\}$ (як частково впорядкованій множині з порядком $\sqsubseteq$). Оскільки $\lambda(s')$ є точною верхньою межею цієї множини, то

$$\lambda(s') \sqsubseteq \lambda(s_0).$$

Тоді має місце відношення

$$\lambda(s^*|_{dom(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0),$$

оскільки $s^*|_{dom(s_0)} = s'$.

Покажемо, що s_0, s^* поточково у відношенні R на $dom(s_0) \cap dom(s^*)$. Як було показано вище, $C_1 \subseteq Tr_{s_0,R}^0(\Sigma, \lambda)$, тому для кожного $s \in C_1$, s_0, s поточково у відношенні R на $dom(s_0) \cap dom(s)$. Також, як було показано вище, $s'(t) \downarrow = s(t) =$

$s^*(t)$ для всіх $s \in C_1$ і $t \in \text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0)$. Тоді

$$(s_0(t), s^*(t)) = (s_0(t), s(t)) \in R$$

для всіх $s \in C_1$ і $t \in \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s)$. Тоді s_0, s^* поточково у відношенні R на

$$\bigcup_{s \in C_1} \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s) = \bigcup_{s \in C_1} \text{dom}(s|_{\text{dom}(s_0)}) = \bigcup_{s \in C'} \text{dom}(s).$$

Оскільки Tr є замкненою відносно власних обмежень множиною траєкторій, $C' \subseteq Tr$ є непорожнім $\sqsubseteq$ -ланцюгом, $s' \in Tr$ і s' є точною верхньою межею ланцюга C' у Tr у сенсі $\sqsubseteq$, то за лемою 4.2.11 графік функції s' є об'єднанням графіків елементів ланцюга C' . Тоді виконується

$$\text{dom}(s') = \bigcup_{s \in C'} \text{dom}(s),$$

тому s_0, s^* поточково у відношенні R на множині

$$\bigcup_{s \in C'} \text{dom}(s) = \text{dom}(s') = \text{dom}(s^*|_{\text{dom}(s_0)}) = \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s^*).$$

Отже, $s^* : T \rightarrow Q$, $\text{dom}(s^*) \in \mathfrak{T}$, $s^*|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$, $\lambda(s^*|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$ і s_0, s^* поточково у відношенні R на $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s^*)$. Таким чином,

$$s^* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$$

за визначенням множини $Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$. Тоді

$$s^* \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda),$$

оскільки $\text{dom}(s^*) \in \mathfrak{T}$ і $s^* \sqsubseteq s^*$.

Таким чином, в обох випадках $s^* \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$. Оскільки $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ є замкненою відносно власних обмежень множиною траєкторій, C є непорожнім ланцюгом у $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ (як частково впорядкованій множині з порядком $\sqsubseteq$), $s^* \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ і графік s^* є об'єднанням графіків елементів C , то за лемою 4.2.11 s^* є точною верхньою межею C у $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$.

Отже, $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ є повною множиною траєкторій. □

Лема 4.2.13. Якщо $s_0 \in Tr$ і $R \subseteq Q \times Q$, то $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda) \in \text{НПМС}$.

Доведення. Випливає безпосередньо з визначення $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$, леми 4.2.9 і леми 4.2.12. $\square$

Лема 4.2.14. Нехай $s_0 \in Tr$ і R є локальною часовою симуляцією на (Σ, λ) . Тоді $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda) \in \text{НПМС}$, що задовольняє умову локальної продовжуваності (англ. *local forward extensibility* [69, 68]).

Доведення. Згідно леми 4.2.13, $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda) \in \text{НПМС}$. Нехай

$$s \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$$

є траєкторією в $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ з областю визначення вигляду $[a, b]$, де $a, b \in T$, $a < b$. Покажемо, що існують число $b' > b$ і функція $s' : [a, b'] \rightarrow Q$, такі, що $s' \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ і $s \sqsubseteq s'$.

Оскільки $s \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$, то існує траєкторія

$$\hat{s} \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda),$$

така, що $s \sqsubseteq \hat{s}$. Тоді $dom(\hat{s}) \in \mathfrak{T}$, $\hat{s}|_{dom(s_0)} \in Tr$, $\lambda(\hat{s}|_{dom(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$ і $s_0, \hat{s}$ поточною у відношенні R на $dom(s_0) \cap dom(\hat{s})$.

Розглянемо такі випадки.

Випадок 1: $dom(\hat{s}) \cap (b, +\infty) \neq \emptyset$.

Нехай b' є деяким елементом множини $dom(\hat{s}) \cap (b, +\infty)$. Тоді виконується $a \in dom(s) \subseteq dom(\hat{s})$, $b \in dom(\hat{s})$ і $a < b < b'$, тому оскільки $dom(\hat{s}) \in \mathfrak{T}$, то

$$[a, b'] \subseteq dom(\hat{s}).$$

Нехай $s' = \hat{s}|_{[a, b']}$. Очевидно, $s'|_{[a, b]} = \hat{s}|_{[a, b]} = \hat{s}|_{dom(s)} = s$, тому $s \sqsubseteq s'$. Крім того, $dom(s') = [a, b'] \in \mathfrak{T}$, $s' = \hat{s}|_{[a, b']} \sqsubseteq \hat{s}$ і $\hat{s} \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$, тому

$$s' \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda).$$

Таким чином, $b' > b$, $s' : [a, b'] \rightarrow Q$, $s' \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ і $s \sqsubseteq s'$.

Випадок 2: $dom(\hat{s}) \cap (b, +\infty) = \emptyset$.

Тоді $\text{dom}(\hat{s}) \subseteq [0, b]$. Крім того, має місце включення

$$[a, b] = \text{dom}(s) \subseteq \text{dom}(\hat{s}),$$

звідки робимо висновок, що b є найбільшим елементом множини $\text{dom}(\hat{s})$. Маємо $\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$, тому $\text{dom}(\hat{s}) \cap \text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}$. Тоді множина $[0, b] \cap \text{dom}(s_0)$ містить більше одного елементу, тому існує елемент $t_* \in \text{dom}(s_0)$, такий, що $t_* < b$.

Розглянемо такі підвипадки:

Підвипадок 1.1. $\text{dom}(s_0) \subseteq [0, b]$.

Нехай $b' = b + 1$ і $s' : [a, b'] \rightarrow Q$ є функцією, такою, що

$$s'(t) = \begin{cases} \hat{s}(t), & t \in [a, b'] \cap \text{dom}(\hat{s}), \\ s(b), & t \in [a, b'] \setminus \text{dom}(\hat{s}). \end{cases}$$

Тоді $b' > b$, $[a, b] = \text{dom}(s) \subseteq \text{dom}(\hat{s}) \cap [a, b']$ і $s \sqsubseteq \hat{s}$, тому $s \sqsubseteq s'$ за визначенням функції s' . Крім того,

$$\text{dom}(s') = [a, b'] \in \mathfrak{T}.$$

Нехай $\hat{s}' : \text{dom}(\hat{s}) \cup [a, b'] \rightarrow Q$ є функцією, такою, що

$$\hat{s}'(t) = \begin{cases} \hat{s}(t), & t \in \text{dom}(\hat{s}), \\ s(b), & t \in [a, b'] \setminus \text{dom}(\hat{s}). \end{cases}$$

Доведемо, що

$$\hat{s}' \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda).$$

Маємо $\text{dom}(\hat{s}) \in \mathfrak{T}$, $[a, b'] \in \mathfrak{T}$ і $\text{dom}(\hat{s}) \cap [a, b'] \supseteq \text{dom}(s) \cap [a, b'] \neq \emptyset$, тому

$$\text{dom}(\hat{s}') = \text{dom}(\hat{s}) \cup [a, b'] \in \mathfrak{T}.$$

Тоді маємо такі рівності

$$\begin{aligned} \text{dom}(\hat{s}') \cap \text{dom}(s_0) &= (\text{dom}(\hat{s}) \cup [a, b']) \cap \text{dom}(s_0) = \\ &= (\text{dom}(\hat{s}) \cap \text{dom}(s_0)) \cup ([a, b'] \cap \text{dom}(s_0)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (dom(\hat{s}) \cap dom(s_0)) \cup ([a, b] \cap dom(s_0)) = \\
&= (dom(\hat{s}) \cup [a, b]) \cap dom(s_0) = dom(\hat{s}) \cap dom(s_0),
\end{aligned}$$

оскільки $[a, b] \subseteq dom(\hat{s})$ і $dom(s_0) \subseteq [0, b]$. Крім того, $\hat{s}'(t) = \hat{s}(t)$ для всіх елементів $t \in dom(\hat{s}) \cap dom(s_0)$. Тоді

$$\hat{s}'|_{dom(s_0)} = \hat{s}|_{dom(s_0)} \in Tr.$$

Крім того,

$$\begin{aligned}
\lambda(\hat{s}'|_{dom(s_0)}) &= \lambda(\hat{s}|_{dom(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0), \\
(s_0(t), \hat{s}'(t)) &= (s_0(t), \hat{s}(t)) \in R
\end{aligned}$$

виконується для всіх елементів

$$t \in dom(s_0) \cap dom(\hat{s}) = dom(s_0) \cap dom(\hat{s}').$$

Тоді $s_0, \hat{s}'$ поточною у відношенні R на $dom(s_0) \cap dom(\hat{s}')$. Таким чином,

$$\hat{s}' \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$$

за визначенням множини $Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$.

Крім того, $s' \sqsubseteq \hat{s}'$ за визначенням функцій s' і $\hat{s}'$, а також

$$dom(s') = [a, b'] \in \mathfrak{T}.$$

Тоді виконується

$$s' \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$$

за визначенням множини $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$. Таким чином, $b' > b$, $s' : [a, b'] \rightarrow Q$, $s' \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ і $s \sqsubseteq s'$.

Підвипадак 1.2. $dom(s_0)$ не є підмножиною проміжку $[0, b]$.

Тоді існує елемент $t^* \in dom(s_0)$, такий, що $t^* > b$. Оскільки $t_*, t^* \in dom(s_0)$, $t_* < b < t^*$ і $dom(s_0) \in \mathfrak{T}$, то маємо

$$[t_*, t^*] \subseteq dom(s_0).$$

Нехай $s_1 = s_0|_{[b, t^*]}$. Оскільки $s_0 \in Tr$, $[b, t^*] \subseteq [t_*, t^*] \subseteq dom(s_0)$ і $[b, t^*] \in \mathfrak{T}$,

то $s_1 \in Tr$ за властивістю замкненості відносно власних обмежень множини Tr . Крім того, $dom(s_1) = [b, t^*]$. Тоді $s_1(b) \xrightarrow{s_1}_b$, тому $s_0(b) \xrightarrow{s_1}_b$, оскільки $s_0(b) = s_1(b)$. Маємо, що $s_0, \hat{s}$ поточково у відношенні R на множині

$$dom(s_0) \cap dom(\hat{s}) \supseteq dom(s_0) \cap dom(s) \supseteq [t_*, t^*] \cap [a, b] \supseteq \{b\}.$$

Тоді виконується

$$(s_0(b), \hat{s}(b)) \in R.$$

Тоді оскільки $s_1 \in Tr$, $s_0(b) \xrightarrow{s_1}_b$ і R є локальною часовою бісимуляцією на (Σ, λ) , то існує траєкторія $s_2 \in Tr$, така, що $\hat{s}(b) \xrightarrow{s_2}_b$, $\lambda(s_1) \dot{=}_{b+} \lambda(s_2)$ і s_1, s_2 поточково у відношенні R у правому півоколі b . Тоді існують елементи $b'_1 > b$ і $b'_2 > b$, такі, що $\lambda(s_1) \dot{=}_{[b, b'_1]} \lambda(s_2)$ і s_1, s_2 поточково у відношенні R на $[b, b'_2]$. Нехай

$$b' = \min\{(b + \min\{b'_1, b'_2\})/2, t^*\}.$$

Тоді $b < b' < \min\{b'_1, b'_2\}$, тому $\lambda(s_1) \dot{=}_{[b, b']} \lambda(s_2)$ і s_1, s_2 поточково у відношенні R на проміжку $[b, b']$. Крім того, $dom(s_2) \supseteq [b, b'_2] \supset [b, b']$. Нехай $s' : [a, b'] \rightarrow Q$ є функцією, такою, що

$$s'(t) = \begin{cases} s(t), & t \in [a, b], \\ s_2(t), & t \in (b, b']. \end{cases}$$

Тоді виконується відношення $s \sqsubseteq s'$.

Доведемо, що

$$s' \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda).$$

Маємо $dom(s') = [a, b'] \in \mathfrak{T}$.

Спочатку, доведемо, що $s'|_{dom(s_0)} \in Tr$. Маємо

$$dom(s), dom(s_0) \in \mathfrak{T},$$

$$dom(s) \cap dom(s_0) \supseteq [a, b] \cap [t_*, t^*] = [\max\{t_*, a\}, b] \in \mathfrak{T},$$

оскільки $\max\{t_*, a\} < b$, тому $dom(s) \cap dom(s_0) \in \mathfrak{T}$. Крім того,

$$dom(s) \cap dom(s_0) \subseteq dom(\hat{s}) \cap dom(s_0) = dom(\hat{s}|_{dom(s_0)})$$

і $\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$. Тоді виконується

$$\hat{s}|_{\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s)} = (\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)})|_{\text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0)} \in Tr$$

за властивістю замкненості відносно власних обмежень множини Tr .

Введемо позначення

$$s'_1 = s|_{\text{dom}(s_0)} \text{ and } s'_2 = s_2|_{[b, b']}.$$

Оскільки виконується $s \sqsubseteq \hat{s}$, то

$$s'_1 = s|_{\text{dom}(s_0)} = \hat{s}|_{\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s)} \in Tr.$$

Оскільки $s_2 \in Tr$, $[b, b'] \in \mathfrak{T}$ і $[b, b'] \subseteq \text{dom}(s_2)$, то

$$s'_2 = s_2|_{[b, b']} \in Tr$$

за властивістю замкненості відносно власних обмежень множини Tr . Крім того,

$$\text{dom}(s'_1) = \text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0) \subseteq [a, b],$$

$$b \in \text{dom}(s) \cap \text{dom}(s_0),$$

тому b є найбільшим елементом множини $\text{dom}(s'_1)$. Також,

$$\text{dom}(s'_2) = \text{dom}(s_2) \cap [b, b'] = [b, b'],$$

тому b є найменшим елементом множини $\text{dom}(s'_2)$. Крім того,

$$s'_2(b) = s_2(b) = \hat{s}(b) = s(b) = s'_1(b),$$

оскільки $\hat{s}(b) \xrightarrow{s_2}_b$ і $s \sqsubseteq \hat{s}$. Тоді за недетермінованою марківською властивістю множини Tr , наведена нижче функція $s'_3 : \text{dom}(s'_1) \cup \text{dom}(s'_2) \rightarrow Q$ належить Tr :

$$s'_3(t) = \begin{cases} s'_1(t), & t \in \text{dom}(s'_1), \\ s'_2(t), & t \in \text{dom}(s'_2). \end{cases}$$

Маємо такі рівності

$$\begin{aligned} \text{dom}(s'_3) &= \text{dom}(s'_1) \cup \text{dom}(s'_2) = ([a, b] \cap \text{dom}(s_0)) \cup [b, b'] = \\ &= ([a, b] \cap \text{dom}(s_0)) \cup ([b, b'] \cap \text{dom}(s_0)) = \\ &= [a, b'] \cap \text{dom}(s_0) = \text{dom}(s'|_{\text{dom}(s_0)}), \end{aligned}$$

оскільки $[b, b'] \subseteq [t_*, t^*] \subseteq \text{dom}(s_0)$ і $a < b < b'$. Крім того,

$$s'_3(t) = s'_1(t) = s(t) = s'(t)$$

для всіх елементів $t \in \text{dom}(s'_1)$ і

$$s'_3(t) = s'_2(t) = s_2(t) = s'(t)$$

для всіх елементів $t \in \text{dom}(s'_2) = [b, b']$, оскільки $s_2(b) = \hat{s}(b) = s(b)$. Тоді оскільки $\text{dom}(s'_3) = \text{dom}(s'_1) \cup \text{dom}(s'_2)$, то $s'_3 \sqsubseteq s'$. Крім того, $\text{dom}(s'_3) \subseteq \text{dom}(s_0)$, тому $s'_3 \sqsubseteq s'|_{\text{dom}(s_0)}$. Тоді оскільки $\text{dom}(s'_3) = \text{dom}(s'|_{\text{dom}(s_0)})$, то $s'_3 = s'|_{\text{dom}(s_0)}$. Таким чином, $s'|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$, оскільки $s'_3 \in Tr$.

Тепер покажемо, що

$$\lambda(s'|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0).$$

Маємо $s \sqsubseteq \hat{s}$, тому $s|_{\text{dom}(s_0)} \sqsubseteq \hat{s}|_{\text{dom}(s_0)}$. Крім того, $\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$ і $s|_{\text{dom}(s_0)} = s'_1 \in Tr$. Тоді за монотонністю функції λ маємо

$$\lambda(s'_1) = \lambda(s|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(\hat{s}|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0),$$

тому $\lambda(s'_1) \sqsubseteq \lambda(s_0)$ за транзитивністю відношення $\sqsubseteq$. Тоді

$$\lambda(s'_3)(t) = \lambda(s'_3|_{\text{dom}(s'_1)})(t) = \lambda(s'_1)(t) = \lambda(s_0)(t)$$

для всіх елементів $t \in \text{dom}(s'_1)$ за лемою 4.2.3, оскільки $s'_3 \in Tr$, $\text{dom}(s'_1) \in \mathfrak{T}$ і $\text{dom}(s'_1) \subseteq \text{dom}(s'_3)$. Маємо рівність

$$\lambda(s'_3)(t) = \lambda(s'_3|_{\text{dom}(s'_2)})(t) = \lambda(s'_2)(t) = \lambda(s_2|_{[b, b']})(t) = \lambda(s_2)(t)$$

для всіх елементів

$$t \in \text{dom}(s'_2) \cap [b, b'] = [b, b']$$

за лемою 4.2.3, оскільки $s'_3 \in Tr$, $\text{dom}(s'_2) \in \mathfrak{T}$, $\text{dom}(s'_2) \subseteq \text{dom}(s'_3)$, $s_2 \in Tr$, $[b, b'] \in \mathfrak{T}$ і $[b, b'] \subseteq \text{dom}(s_2)$. Тоді

$$\lambda(s'_3)(t) = \lambda(s_2)(t) = \lambda(s_1)(t) = \lambda(s_0|_{[b, t^*]})(t)$$

для всіх елементів $t \in [b, b']$, оскільки $\lambda(s_1) \dot{=}_{[b, b']} \lambda(s_2)$. Тоді

$$\lambda(s'_3)(t) = \lambda(s_0|_{[b, t^*]})(t) = \lambda(s_0)(t)$$

для всіх елементів

$$t \in [b, b'] \cap [b, t^*] = [b, b'] = \text{dom}(s'_2)$$

за лемою 4.2.3, оскільки $[b, t^*] \in \mathfrak{T}$ і $[b, t^*] \subseteq \text{dom}(s_0)$. Таким чином,

$$\lambda(s'|_{\text{dom}(s_0)})(t) = \lambda(s'_3)(t) = \lambda(s_0)(t)$$

для всіх елементів

$$t \in \text{dom}(s'_1) \cup \text{dom}(s'_2) = \text{dom}(s'_3) = \text{dom}(\lambda(s'_3)) = \text{dom}(\lambda(s'|_{\text{dom}(s_0)})).$$

Отже, виконується відношення

$$\lambda(s'|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0).$$

Доведемо, що s_0, s' поточною у відношенні R на $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s')$. Для кожного $t \in \text{dom}(s_0) \cap [a, b]$ маємо

$$(s_0(t), s'(t)) = (s_0(t), s(t)) = (s_0(t), \hat{s}(t)) \in R,$$

оскільки $s \sqsubseteq \hat{s}$ і $s_0, \hat{s}$ поточною у відношенні R на множині

$$\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(\hat{s}) \supseteq \text{dom}(s_0) \cap [a, b].$$

Маємо включення

$$(b, b'] \subset [b, t^*] = \text{dom}(s_1) \subseteq \text{dom}(s_0).$$

Тоді для кожного елементу $t \in (b, b']$ маємо

$$(s_0(t), s'(t)) = (s_0(t), s_2(t)) = (s_1(t), s_2(t)) \in R,$$

оскільки s_1, s_2 поточною у відношенні R на $[b, b']$. Таким чином, $(s_0(t), s'(t)) \in R$ виконується для всіх елементів

$$\begin{aligned} t &\in ([a, b] \cap \text{dom}(s_0)) \cup ((b, b'] \cap \text{dom}(s_0)) = \\ &= \text{dom}(s_0) \cap [a, b'] = \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s'). \end{aligned}$$

Тоді s_0, s' поточною у відношенні R на множині $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s')$.

Отже, виконується

$$s' \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$$

за визначенням множини $Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$. Тоді

$$s' \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda).$$

Крім того, $s' : [a, b'] \rightarrow Q$, $b' > b$ і $s \sqsubseteq s'$.

У всіх випадках існують елемент $b' > b$ і функція $s' : [a, b'] \rightarrow Q$, такі, що $s' \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ і $s \sqsubseteq s'$.

Отже, $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ задовольняє умову локальної продовжуваності. $\square$

Лема 4.2.15. Нехай f^+ є нормальною правою мірою продовжуваності, $s_0 \in Tr$ і R є f^+ -часовою симуляцією на розміченій НПМС (Σ, λ) . Припустимо, що s_* є правим тупиковим шляхом (англ. *right dead-end path* [69, 68]) в НПМС $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$. Тоді s_* є таким, що можна уникнути в сенсі f^+ (англ. *f^+ -escapable* [69, 68]).

Доведення. За припущенням леми, s_* є правим тупиковим шляхом у $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$. Тоді $s_* \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ і існують $a, b \in T$, $a < b$, такі, що

$$\text{dom}(s_*) = [a, b).$$

Крім того, не існує функції $s : [a, b] \rightarrow Q$, такої, що $s \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ і $s_* \sqsubset s$.

Покажемо, що існують $c, d \in T$, такі, що $c \in (a, b)$ і $d \geq f^+(c, b)$, і існує

$$s^* : [c, d] \rightarrow Q,$$

така, що $s^* \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ і $s_*(c) = s^*(c)$.

Оскільки $s_* \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$, то існує траєкторія

$$\hat{s}_* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda),$$

така, що $s_* \sqsubseteq \hat{s}_*$. Тоді $dom(\hat{s}_*) \in \mathfrak{T}$, $\hat{s}_*|_{dom(s_0)} \in Tr$, $\lambda(\hat{s}_*|_{dom(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$ і $s_0, \hat{s}_*$ поточково у відношенні R на множині $dom(s_0) \cap dom(\hat{s}_*)$.

Доведемо, що виконується включення

$$dom(\hat{s}_*) \subseteq [0, b).$$

Припустимо, що $dom(\hat{s}_*)$ не є підмножиною проміжку $[0, b)$. Тоді існує елемент $t' \geq b$, такий, що $t' \in dom(\hat{s}_*)$. Маємо

$$a \in dom(s_*) \subseteq dom(\hat{s}_*),$$

тому оскільки $a < b \leq t'$ і $dom(\hat{s}_*) \in \mathfrak{T}$, то

$$[a, b] \subset [a, t'] \subseteq dom(\hat{s}_*).$$

Крім того, $[a, b] \in \mathfrak{T}$ і виконується

$$\hat{s}_* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda) \subseteq Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda).$$

Тоді за лемою 4.2.8 і властивістю замкненості відносно власних обмежень множини $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ маємо

$$\hat{s}_*|_{[a, b]} \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda).$$

Крім того, $dom(\hat{s}_*|_{[a, b]}) = [a, b]$, оскільки $[a, b] \subseteq dom(\hat{s}_*)$. Також,

$$s_* = s_*|_{[a, b]} \sqsubseteq \hat{s}_*|_{[a, b]},$$

оскільки $dom(s_*) \subset [a, b]$ і $s_* \sqsubseteq \hat{s}_*$. Тоді $s_* \sqsubset \hat{s}_*|_{[a, b]}$, оскільки $dom(s_*) = [a, b] \neq [a, b] = dom(\hat{s}_*|_{[a, b]})$. Це суперечить тому факту, що не існує функції $s : [a, b] \rightarrow Q$, такої, що $s \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ і $s_* \sqsubset s$. Тоді припущення про те, що $dom(\hat{s}_*)$ не є підмножиною проміжку $[0, b)$ не виконується. Таким чином, $dom(\hat{s}_*) \subseteq [0, b)$.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1: припустимо, що $\text{dom}(s_0) \cap [b, +\infty) \neq \emptyset$.

Тоді існує елемент $t'' \in \text{dom}(s_0)$, такий, що $t'' \geq b$. Оскільки $\hat{s}_*|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$, то

$$\text{dom}(\hat{s}_*) \cap \text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}.$$

Тоді існує елемент $t'_0 \in \text{dom}(s_0)$, такий, що $t'_0 \in \text{dom}(\hat{s}_*)$. Оскільки $\text{dom}(\hat{s}_*) \subseteq [0, b)$, то $t'_0 \in [0, b)$. Оскільки $\text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}$, $t'_0, t'' \in \text{dom}(s_0)$ і $t'_0 < b \leq t''$, маємо $[t'_0, t''] \subseteq \text{dom}(s_0)$. Тоді $b \in \text{dom}(s_0)$.

Введемо позначення

$$t' = \max\{a, t'_0\}.$$

Оскільки $a < b$ і $t'_0 < b$, то $t' \in [a, b)$ і виконується

$$t' \in [t'_0, b) \subset [t'_0, t''] \subseteq \text{dom}(s_0).$$

Тоді $t' \in [a, b)$ і $t' \in \text{dom}(s_0)$. Тоді $[t', t''] \subseteq \text{dom}(s_0)$, оскільки $\text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}$, $t' \in \text{dom}(s_0)$, $t'' \in \text{dom}(s_0)$ і $t' < b \leq t''$.

Введемо позначення

$$D = \text{dom}(s_0) \cap (a, b),$$

$$s' = \hat{s}_*|_D.$$

Маємо $\text{dom}(s_0) \in \mathfrak{T}$, $(a, b) \in \mathfrak{T}$ і

$$\text{dom}(s_0) \cap (a, b) \supseteq [t', t''] \cap (a, b) \supseteq (t', b) \in \mathfrak{T},$$

оскільки $a \leq t' < b \leq t''$. Тоді $D = \text{dom}(s_0) \cap (a, b) \in \mathfrak{T}$. Крім того,

$$D \subseteq (a, b) \subset \text{dom}(s_*) \subseteq \text{dom}(\hat{s}_*).$$

Тоді оскільки

$$\hat{s}_* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda) \subseteq Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$$

і множина $Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ має властивість замкненості відносно власних обмежень за лемою 4.2.8, то маємо

$$s' = \hat{s}_*|_D \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda).$$

Маємо $\text{dom}(s') \subseteq D \subseteq \text{dom}(s_0)$, тому

$$\text{dom}(s') \cap \text{dom}(s_0) = \text{dom}(s') \in \mathfrak{T}.$$

Крім того, $s_0 \in Tr$. Тоді за лемою 4.2.10 маємо $s' \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$. Тоді

$$s'|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$$

за визначенням множини $Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$. Тоді

$$s' = s'|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr,$$

оскільки $\text{dom}(s') \subseteq \text{dom}(s_0)$. Маємо

$$\text{dom}(s') = \text{dom}(\hat{s}_*) \cap D = D = \text{dom}(s_0) \cap (a, b) \supseteq [t', t''] \cap (a, b) \supseteq (t', b),$$

оскільки $D \subseteq \text{dom}(\hat{s}_*)$ і $a \leq t' < b \leq t''$. Крім того, s_0, s' поточно у відношенні R на множині

$$\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s') = \text{dom}(s') \supseteq (t', b),$$

оскільки $s' \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$. Тоді оскільки $t' < b$, маємо, що s_0, s' поточно у відношенні R у проколотому лівому півколі b . Маємо

$$\lambda(s') = \lambda(s'|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0),$$

оскільки $s' = s'|_{\text{dom}(s_0)}$ і $s' \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$.

Введемо позначення

$$t'_1 = (t' + b)/2.$$

Тоді $t' < t'_1 < b$, оскільки $t' < b$. Оскільки

$$\text{dom}(\lambda(s')) = \text{dom}(s') \supseteq (t', b) \supseteq [t'_1, b)$$

і $\lambda(s') \sqsubseteq \lambda(s_0)$, то маємо

$$\lambda(s_0) \dot{=}_{[t'_1, b)} \lambda(s').$$

Отже, $s_0 \in Tr$ і, як було показано вище, $s' \in Tr$, $b \in \text{dom}(s_0)$, s_0, s' поточно у відношенні R у проколотому лівому півколі b і $\lambda(s_0) \dot{=}_{[t'_1, b)} \lambda(s')$, де

$t'_1 < b$. Тоді оскільки $R \in f^+$ -часовою симуляцією на (Σ, λ) , то існують $s'_2 \in Tr$, $c \in \text{dom}(s') \cap \text{dom}(s'_2)$, $d_1 \in T$, такі, що

1. $c < b$ і $s'(c) = s'_2(c)$;
2. або $d_1 \geq f^+(c, b)$, або d_1 є максимальним елементом $\text{dom}(s_0)$;
3. $\lambda(s_0) \dot{=}_{[c, d_1]} \lambda(s'_2)$;
4. s_0, s'_2 поточною у відношенні R на $[c, d_1]$.

Тоді $\text{dom}(s'_2) \supseteq [c, d_1]$ і виконується

$$c \in \text{dom}(s') = \text{dom}(\hat{s}_*|_D) \subseteq D \subseteq (a, b).$$

Тоді $c \in (a, b)$. Маємо або $d_1 \geq f^+(c, b)$, або d_1 є максимальним елементом множини $\text{dom}(s_0)$ за властивістю 2, тому або $d_1 \geq f^+(c, b) > f^+(b, b) = b$, або $d_1 \geq t'' \geq b$, оскільки функція $f^+|_{\{(x, y) \in T \times T \mid x \leq y\}}$ є строго спадною за першим аргументом на $[t', t''] \subseteq \text{dom}(s_0)$. В обох випадках, $d_1 \geq b > c$. Тоді $[c, d_1] \in \mathfrak{T}$.

Введемо позначення

$$\bar{s} = s'_2|_{[c, d_1]}.$$

Тоді оскільки $[c, d_1] \in \mathfrak{T}$, $[c, d_1] \subseteq \text{dom}(s'_2)$ і $s'_2 \in Tr$, то $\bar{s} \in Tr$ за властивістю замкненості відносно власних обмежень множини Tr . Крім того, $\text{dom}(\bar{s}) = [c, d_1]$ і $s'(c) = s'_2(c) = \bar{s}(c)$ за властивістю 1, вказаною вище. Оскільки виконується $s'(c) \downarrow$ і $s' = \hat{s}_*|_D$, то виконується

$$\hat{s}_*(c) \downarrow = s'(c) = \bar{s}(c).$$

Оскільки $s_* \sqsubseteq \hat{s}_*$ і $c \in (a, b) \subset [a, b) = \text{dom}(s_*)$, то

$$s_*(c) \downarrow = \hat{s}_*(c) = \bar{s}(c).$$

Введемо позначення

$$d = \max\{f^+(c, b), d_1\}.$$

Тоді $d \geq d_1 \geq b > c$, тому $[c, d] \in \mathfrak{T}$.

Нехай $s^* : [c, d] \rightarrow Q$ є функцією, такою, що

$$s^*(t) = \begin{cases} \bar{s}(t), & t \in [c, d_1]; \\ \bar{s}(d_1), & t \in [c, d] \setminus [c, d_1]. \end{cases}$$

Як було показано вище, $s_*(c) = \bar{s}(c)$. Оскільки $c \in [c, d_1]$, то $s^*(c) = \bar{s}(c)$ за визначенням функції s^* . Тоді $s_*(c) = s^*(c)$.

Доведемо, що виконується рівність

$$s^*|_{dom(s_0)} = \bar{s}|_{dom(s_0)}.$$

Розглянемо два підвипадки.

Підвипадок 1.1. Припустимо, що d_1 є максимальним елементом $dom(s_0)$. Тоді

$$dom(s^*|_{dom(s_0)}) = dom(s^*) \cap dom(s_0) \subseteq [c, d] \cap [0, d_1] = [c, d_1],$$

тому $s^*|_{dom(s_0)} \sqsubseteq \bar{s}$ за визначенням функції s^* , звідки

$$s^*|_{dom(s_0)} \sqsubseteq \bar{s}|_{dom(s_0)}.$$

Тоді виконується включення

$$dom(s^*|_{dom(s_0)}) \subseteq dom(\bar{s}|_{dom(s_0)}).$$

З іншого боку, має місце включення

$$dom(\bar{s}|_{dom(s_0)}) = dom(\bar{s}) \cap dom(s_0) = [c, d] \cap dom(s_0) \subseteq$$

$$\subseteq [c, d] \cap dom(s_0) = dom(s^*) \cap dom(s_0) = dom(s^*|_{dom(s_0)}),$$

тому $dom(s^*|_{dom(s_0)}) = dom(\bar{s}|_{dom(s_0)})$. Тоді оскільки $s^*|_{dom(s_0)} \sqsubseteq \bar{s}|_{dom(s_0)}$, маємо

$$s^*|_{dom(s_0)} = \bar{s}|_{dom(s_0)}.$$

Підвипадок 1.2. Припустимо, що d_1 не є максимальним елементом $dom(s_0)$. Тоді $d_1 \geq f^+(b, c)$ за властивістю 2, вказаною вище, тому $d = \max\{f^+(c, b), d_1\} = d_1$ і $s^* \sqsubseteq \bar{s}$ за визначенням функції s^* . Крім того, $dom(s^*) = [c, d] = [c, d_1] = dom(\bar{s})$, тому $s^* = \bar{s}$. Тоді виконується рівність

$$s^*|_{dom(s_0)} = \bar{s}|_{dom(s_0)}.$$

Отже, в обох підвипадках, $s^*|_{dom(s_0)} = \bar{s}|_{dom(s_0)}$.

Доведемо, що виконується

$$s^* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda).$$

Маємо $dom(s^*) = [c, d] \in \mathfrak{T}$. Спочатку, доведемо, що

$$\bar{s}|_{dom(s_0)} \in Tr \quad \text{і} \quad \lambda(\bar{s}|_{dom(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0).$$

Маємо $dom(s^*) = [c, d] \in \mathfrak{T}$, $dom(s_0) \in \mathfrak{T}$ і

$$dom(s^*) \cap dom(s_0) \supseteq [c, d] \cap [t', t''] = [\max\{c, t'\}, \min\{d, t''\}] \in \mathfrak{T},$$

оскільки $\max\{c, t'\} < b$ і $\min\{d, t''\} \geq b$. Тоді

$$dom(\bar{s}|_{dom(s_0)}) = dom(s^*|_{dom(s_0)}) = dom(s^*) \cap dom(s_0) \in \mathfrak{T}.$$

Тоді $dom(\bar{s}|_{dom(s_0)}) \in \mathfrak{T}$ і $dom(\bar{s}|_{dom(s_0)}) \subseteq dom(\bar{s})$. Крім того, як було показано вище, $\bar{s} \in Tr$. Тоді за властивістю замкненості відносно власних обмежень Tr ,

$$\bar{s}|_{dom(s_0)} = \bar{s}|_{dom(\bar{s}|_{dom(s_0)})} \in Tr.$$

Крім того, виконується рівність

$$\lambda(\bar{s}|_{dom(s_0)})(t) = \lambda(\bar{s}|_{dom(\bar{s}|_{dom(s_0)})})(t) = \lambda(\bar{s})(t)$$

для всіх елементів

$$t \in dom(\bar{s}|_{dom(s_0)}) = dom(\lambda(\bar{s}|_{dom(s_0)}))$$

за лемою 4.2.3. Тоді виконується відношення

$$\lambda(\bar{s}|_{dom(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(\bar{s}).$$

Маємо рівність

$$\lambda(\bar{s})(t) = \lambda(s'_2|_{[c, d_1]})(t) = \lambda(s'_2)(t)$$

для всіх елементів $t \in [c, d_1]$ за лемою 4.2.3, оскільки $s'_2 \in Tr$, $[c, d_1] \subseteq dom(s'_2)$ і

$[c, d_1] \in \mathfrak{T}$. Також, $\lambda(s_0) \dot{=}_{[c, d_1]} \lambda(s'_2)$ за властивістю 3, вказаною вище, тому

$$\lambda(\bar{s})(t) = \lambda(s'_2)(t) = \lambda(s_0)(t)$$

для всіх елементів

$$t \in [c, d_1] = \text{dom}(\bar{s}) = \text{dom}(\lambda(\bar{s})).$$

Тоді $\lambda(\bar{s}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$. Тоді оскільки $\lambda(\bar{s}|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(\bar{s})$ (як було показано вище), маємо

$$\lambda(\bar{s}|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$$

за транзитивністю відношення $\sqsubseteq$.

Таким чином, було доведено, що $\bar{s}|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$ і $\lambda(\bar{s}|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$. Тоді оскільки $s^*|_{\text{dom}(s_0)} = \bar{s}|_{\text{dom}(s_0)}$, маємо $s^*|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$ і

$$\lambda(s^*|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0).$$

Тепер доведемо, що s_0, s^* поточною у відношенні R на множині $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s^*)$. Маємо рівність

$$s^*|_{\text{dom}(s_0)} = \bar{s}|_{\text{dom}(s_0)} = s'_2|_{[c, d_1] \cap \text{dom}(s_0)}.$$

Тоді $s^*|_{\text{dom}(s_0)} \sqsubseteq s'_2$, тому виконується $(s_0(t), s^*(t)) = (s_0(t), s'_2(t))$ для всіх елементів $t \in \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s^*)$. Крім того, виконується відношення

$$s^*|_{\text{dom}(s_0)} \sqsubseteq \bar{s}.$$

Тоді виконується

$$\text{dom}(s^*) \cap \text{dom}(s_0) = \text{dom}(s^*|_{\text{dom}(s_0)}) \subseteq \text{dom}(\bar{s}) = [c, d_1].$$

Тоді оскільки s_0, s'_2 поточною у відношенні R на $[c, d_1]$ за властивістю 4, вказаною вище, то маємо

$$(s_0(t), s'_2(t)) \in R$$

для всіх елементів $t \in \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s^*)$. Тоді виконується

$$(s_0(t), s^*(t)) = (s_0(t), s'_2(t)) \in R$$

для всіх елементів $t \in \text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s^*)$. Тоді s_0, s^* поточково у відношенні R на множині $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s^*)$.

Отже, було доведено, що $\text{dom}(s^*) \in \mathfrak{T}$, $s^*|_{\text{dom}(s_0)} \in Tr$, $\lambda(s^*|_{\text{dom}(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$ і s_0, s^* поточково у відношенні R на множині $\text{dom}(s_0) \cap \text{dom}(s^*)$. Тоді

$$s^* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$$

за визначенням множини $Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$. Тоді

$$s^* \in Tr_{s_0, R}(\Sigma, \lambda).$$

Крім того, як було показано вище, $\text{dom}(s^*) = [c, d]$, $c \in (a, b)$,

$$d = \max\{f^+(c, b), d_1\} \geq f^+(c, b),$$

і має місце рівність $s_*(c) = s^*(c)$.

Випадок 2: припустимо, що $\text{dom}(s_0) \cap [b, +\infty) = \emptyset$.

Тоді $\text{dom}(s_0) \subseteq [0, b)$. Введемо позначення

$$c = (a + b)/2.$$

Тоді $c \in (a, b)$, оскільки $a < b$. Введемо позначення

$$d = f^+(c, b).$$

Тоді $d = f^+(c, b) > f^+(b, b) = b$, оскільки функція $f^+|_{\{(x, y) \in T \times T \mid x \leq y\}}$ є строго спадною за першим аргументом. Як було показано вище, $\text{dom}(\hat{s}_*) \subseteq [0, b)$. Тоді $\text{dom}(\hat{s}_*) \cap [b, d] = \emptyset$. Нехай $\hat{s}^* : \text{dom}(\hat{s}_*) \cup [b, d] \rightarrow Q$ є функцією, такою, що

$$\hat{s}^*(t) = \begin{cases} \hat{s}_*(t), & t \in \text{dom}(\hat{s}_*), \\ s_*(a), & t \in [b, d]. \end{cases}$$

Це визначення є коректним, оскільки $\text{dom}(\hat{s}_*) \cap [b, d] = \emptyset$.

Доведемо, що $\text{dom}(\hat{s}^*) \in \mathfrak{T}$. Оскільки $s_* \sqsubseteq \hat{s}_*$, то $\text{dom}(s_*) \subseteq \text{dom}(\hat{s}_*)$, звідки

$$\text{dom}(\hat{s}^*) = \text{dom}(\hat{s}_*) \cup [b, d] = \text{dom}(\hat{s}_*) \cup \text{dom}(s_*) \cup [b, d] =$$

$$= \text{dom}(\hat{s}_*) \cup [a, b] \cup [b, d] = \text{dom}(\hat{s}_*) \cup [a, d].$$

Слід зауважити, що

$$a \in \text{dom}(s_*) \cap [a, d] \subseteq \text{dom}(\hat{s}_*) \cap [a, d].$$

Тоді $\text{dom}(\hat{s}_*) \cap [a, d] \neq \emptyset$, а також $\text{dom}(\hat{s}_*) \in \mathfrak{T}$ і $[a, d] \in \mathfrak{T}$, тому маємо

$$\text{dom}(\hat{s}^*) = \text{dom}(\hat{s}_*) \cup [a, d] \in \mathfrak{T}.$$

Введемо позначення

$$s^* = \hat{s}^*|_{[c, d]}.$$

Доведемо, що $\text{dom}(s^*) = [c, d]$. Оскільки $a < c < b < d$, то маємо

$$\begin{aligned} \text{dom}(s^*) &= \text{dom}(\hat{s}^*) \cap [c, d] = (\text{dom}(\hat{s}_*) \cup [b, d]) \cap [c, d] = \\ &= (\text{dom}(\hat{s}_*) \cap [c, d]) \cup ([b, d] \cap [c, d]) = \\ &= ((\text{dom}(s_*) \cup (\text{dom}(\hat{s}_*) \setminus \text{dom}(s_*))) \cap [c, d]) \cup [b, d] = \\ &= ([a, b] \cap [c, d]) \cup ((\text{dom}(\hat{s}_*) \setminus [a, b]) \cap [c, d]) \cup [b, d] = \\ &= [c, b] \cup [b, d] \cup ((\text{dom}(\hat{s}_*) \setminus [a, b]) \cap [c, d]) = \\ &= [c, d] \cup ((\text{dom}(\hat{s}_*) \setminus [a, b]) \cap [c, d]) = [c, d]. \end{aligned}$$

Таким чином, $\text{dom}(s^*) = [c, d]$. Тоді $\text{dom}(s^*) \in \mathfrak{T}$, оскільки $c < b < d$.

Доведемо, що виконується рівність

$$\hat{s}^*|_{\text{dom}(s_0)} = \hat{s}_*|_{\text{dom}(s_0)}.$$

Оскільки $\text{dom}(s_0) \subseteq [0, b)$ (за припущенням випадку 2), з визначення функції $\hat{s}^*$ випливає, що $\hat{s}^*|_{\text{dom}(s_0)} \sqsubseteq \hat{s}_*$. Тоді виконується відношення

$$\hat{s}^*|_{\text{dom}(s_0)} \sqsubseteq \hat{s}_*|_{\text{dom}(s_0)}.$$

Крім того, виконується рівність

$$\text{dom}(\hat{s}^*|_{\text{dom}(s_0)}) = \text{dom}(\hat{s}^*) \cap \text{dom}(s_0) =$$

$$= (dom(\hat{s}_*) \cup [b, d]) \cap dom(s_0) = dom(\hat{s}_*) \cap dom(s_0) = dom(\hat{s}_*|_{dom(s_0)}).$$

Тоді виконується рівність

$$\hat{s}^*|_{dom(s_0)} = \hat{s}_*|_{dom(s_0)}.$$

Доведемо, що

$$\hat{s}^* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda).$$

Як було показано вище, $dom(\hat{s}^*) \in \mathfrak{T}$. Маємо

$$\hat{s}^*|_{dom(s_0)} = \hat{s}_*|_{dom(s_0)} \in Tr,$$

оскільки $\hat{s}_* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$. Також, виконується

$$\lambda(\hat{s}^*|_{dom(s_0)}) = \lambda(\hat{s}_*|_{dom(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0),$$

оскільки $\hat{s}_* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$.

Доведемо, що $s_0, \hat{s}^*$ поточною у відношенні R на множині $dom(s_0) \cap dom(\hat{s}^*)$. Оскільки $\hat{s}_* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$, то $s_0, \hat{s}_*$ поточною у відношенні R на множині $dom(s_0) \cap dom(\hat{s}_*)$. Тоді з визначення функції $\hat{s}^*$ випливає, що

$$(s_0(t), \hat{s}^*(t)) = (s_0(t), \hat{s}_*(t)) \in R$$

для всіх елементів

$$\begin{aligned} t \in dom(s_0) \cap dom(\hat{s}_*) &= dom(\hat{s}_*|_{dom(s_0)}) = \\ &= dom(\hat{s}^*|_{dom(s_0)}) = dom(s_0) \cap dom(\hat{s}^*). \end{aligned}$$

Тоді $s_0, \hat{s}^*$ поточною у відношенні R на множині $dom(s_0) \cap dom(\hat{s}^*)$.

Отже, для функції $\hat{s}^* : T \rightarrow Q$ було доведено такі факти: $dom(\hat{s}^*) \in \mathfrak{T}$, $\hat{s}^*|_{dom(s_0)} \in Tr$, $\lambda(\hat{s}^*|_{dom(s_0)}) \sqsubseteq \lambda(s_0)$ і $s_0, \hat{s}^*$ поточною у відношенні R на множині $dom(s_0) \cap dom(\hat{s}^*)$. Отже,

$$\hat{s}^* \in Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$$

за визначенням множини $Tr_{s_0, R}^0(\Sigma, \lambda)$.

Як було показано вище, виконується

$$dom(s^*) = [c, d] \in \mathfrak{T}.$$

Оскільки $s^* = \hat{s}^*|_{[c,d]}$, то виконується відношення

$$s^* \sqsubseteq \hat{s}^*.$$

Тоді оскільки $\hat{s}^* \in Tr_{s_0,R}^0(\Sigma, \lambda)$, то маємо

$$s^* \in Tr_{s_0,R}(\Sigma, \lambda).$$

Крім того, виконується рівність

$$s^*(c) = \hat{s}^*(c) = \hat{s}_*(c) = s_*(c),$$

оскільки $c \in (a, b) \subset \text{dom}(s_*) \subseteq \text{dom}(\hat{s}_*)$ і $s_* \sqsubseteq \hat{s}_*$. Таким чином, $c \in (a, b)$, $d = f^+(c, b)$, $s^* : [c, d] \rightarrow Q$, $s^* \in Tr_{s_0,R}(\Sigma, \lambda)$ і $s_*(c) = s^*(c)$.

Отже, в обох випадках існують елементи $c, d \in T$, такі, що $c \in (a, b)$, $d \geq f^+(c, b) > b$ і існує функція $s^* : [c, d] \rightarrow Q$, така, що $s^* \in Tr_{s_0,R}(\Sigma, \lambda)$ і $s_*(c) = s^*(c)$. Тоді s^* є виходом (англ. escape [69, 68]) з s_* в $\Sigma_{s_0,R}(\Sigma, \lambda)$, таким, що $s^* : [c, d] \rightarrow Q$ і $d \geq f^+(c, b)$. Таким чином, s_* є таким, що можна уникнути в сенсі f^+ (англ. f^+ -escapable [69, 68]). $\square$

Лема 4.2.16. Нехай $R \subseteq Q \times Q$ є локальною часовою симуляцією на (Σ, λ) . Припустимо, що для кожного $s_0 \in Tr$, $\Sigma_{s_0,R}(\Sigma, \lambda)$ є НПМС, що задовольняє умову глобальної продовжуваності (англ. global forward extensibility [69, 68]). Тоді R є глобальною часовою симуляцією на (Σ, λ) .

Доведення. Нехай $(q_1, q_2) \in R$, $s_1 \in Tr$ і $q_1 \xrightarrow{s_1}$. Тоді $\text{dom}(s_1)$ має найменший елемент. Позначимо цей найменший елемент як t_0 . Тоді $q_1 \xrightarrow{s_1}_{t_0}$. Оскільки R є локальною часовою симуляцією на (Σ, λ) , то існує траєкторія $\tilde{s}_2 \in Tr$, така, що $q_2 \xrightarrow{\tilde{s}_2}_{t_0}$, $\lambda(s_1) \dot{=}_{t_0+} \lambda(\tilde{s}_2)$ і $s_1, \tilde{s}_2$ поточно у відношенні R у правому півколі t_0 . Тоді існують елементи $t_1^*, t_2^* \in (t_0, +\infty)$, такі, що $s_1, \tilde{s}_2$ поточно у відношенні R на множині $[t_0, t_1^*]$ і $\lambda(s_1) \dot{=}_{[t_0, t_2^*]} \lambda(\tilde{s}_2)$. Нехай $t^* = \min\{t_1^*, t_2^*\}$ і $\bar{s}_2 = \tilde{s}_2|_{[t_0, t^*]}$. Тоді $t^* > t_0$ і $[t_0, t^*] \subseteq [t_0, t_1^*] \subseteq \text{dom}(\tilde{s}_2)$. Тоді оскільки $\tilde{s}_2 \in Tr$, то $\bar{s}_2 \in Tr$ за властивістю замкненості відносно власних обмежень НПМС Σ . Крім того, оскільки $\bar{s}_2 \sqsubseteq \tilde{s}_2$, то $\lambda(\bar{s}_2) \sqsubseteq \lambda(\tilde{s}_2)$. Тоді оскільки $[t_0, t^*] \subseteq [t_0, t_2^*]$, $\lambda(s_1) \dot{=}_{[t_0, t_2^*]} \lambda(\tilde{s}_2)$ і $[t_0, t^*] \subseteq \text{dom}(\tilde{s}_2)$, то виконується рівність

$$\lambda(s_1)(t) = \lambda(\tilde{s}_2)(t) = \lambda(\tilde{s}_2|_{[t_0, t^*]})(t) = \lambda(\bar{s}_2)(t)$$

для всіх елементів $t \in [t_0, t^*]$ за лемою 4.2.3. Тоді $\lambda(s_1) \dot{=}_{[t_0, t^*]} \lambda(\bar{s}_2)$.

Доведемо, що $\bar{s}_2 \in Tr_{s_1, R}(\Sigma, \lambda)$. Оскільки

$$dom(s_1) = dom(\lambda(s_1)) \supseteq [t_0, t_2^*] \supseteq [t_0, t^*] = dom(\tilde{s}_2) \cap [t_0, t^*] = dom(\bar{s}_2),$$

то $dom(\bar{s}_2) \in \mathfrak{T}$ і $\bar{s}_2|_{dom(s_1)} = \bar{s}_2 \in Tr$. Також, оскільки $\lambda(s_1) \dot{=}_{[t_0, t^*]} \lambda(\bar{s}_2)$, то

$$\lambda(\bar{s}_2|_{dom(s_1)}) = \lambda(\bar{s}_2) \sqsubseteq \lambda(s_1).$$

Також, $s_1, \bar{s}_2$ поточно у відношенні R на множині $[t_0, t^*] = dom(s_1) \cap dom(\bar{s}_2)$, оскільки $s_1, \tilde{s}_2$ поточно у відношенні R на $[t_0, t_1^*]$. Отже,

$$\bar{s}_2 \in Tr_{s_1, R}^0(\Sigma, \lambda) \subseteq Tr_{s_1, R}(\Sigma, \lambda)$$

і $dom(\bar{s}_2) = [t_0, t^*]$.

За припущенням леми, $\Sigma_{s_1, R}(\Sigma, \lambda) \in \text{НПМС}$, що задовольняє умову глобальної продовжуваності (англ. global forward extensibility [69, 68]). Тоді за даною умовою існує функція $s_2'^* : [t_0, +\infty) \rightarrow Q$, така, що $s_2'^* \in Tr_{s_1, R}(\Sigma, \lambda)$ і $\bar{s}_2 \sqsubseteq s_2'^*$. Тоді за визначенням множини $Tr_{s_1, R}(\Sigma, \lambda)$ існує функція $s_2^* \in Tr_{s_1, R}^0(\Sigma, \lambda)$, така, що $s_2'^* \sqsubseteq s_2^*$. Нехай $s_2 = s_2^*|_{dom(s_1)}$. Оскільки t_0 є найменшим елементом $dom(s_1)$ і

$$dom(s_2^*) \supseteq dom(s_2'^*) = [t_0, +\infty),$$

то $dom(s_1) \subseteq dom(s_2^*)$. Тоді маємо рівність

$$dom(s_2) = dom(s_2^*) \cap dom(s_1) = dom(s_1),$$

тому t_0 є найменшим елементом множини $dom(s_2)$. Крім того,

$$s_2(t_0) = s_2^*(t_0) = s_2'^*(t_0) = \bar{s}_2(t_0) = \tilde{s}_2(t_0) = q_2,$$

тому $q_2 \overset{s_2}{\rightsquigarrow}$. Оскільки $s_2^* \in Tr_{s_1, R}^0(\Sigma, \lambda)$, то виконується $s_2 = s_2^*|_{dom(s_1)} \in Tr$, $\lambda(s_2) = \lambda(s_2^*|_{dom(s_1)}) \sqsubseteq \lambda(s_1)$ і s_1, s_2^* поточно у відношенні R на множині $dom(s_1) \cap dom(s_2^*)$, звідки s_1, s_2 поточно у відношенні R на $dom(s_1) \cap dom(s_2)$. Тоді оскільки $dom(s_1) = dom(s_2)$, то s_1, s_2 поточно у відношенні R . Крім того,

виконується рівність $\lambda(s_1) = \lambda(s_2)$, оскільки

$$\text{dom}(\lambda(s_2)) = \text{dom}(s_2) = \text{dom}(s_1) = \text{dom}(\lambda(s_1))$$

і $\lambda(s_2) \sqsubseteq \lambda(s_1)$. Таким чином, $s_2 \in Tr$, $q_2 \xrightarrow{s_2}$, $\lambda(s_1) = \lambda(s_2)$ і s_1, s_2 поточною у відношенні R .

Оскільки q_1, q_2, s_1 є довільними, можемо зробити висновок, що R є глобальною часовою симуляцією на (Σ, λ) за означенням 4.2.4. $\square$

Лема 4.2.17. *Нехай f^+ є нормальною правою мірою продовжуваності, $s_0 \in Tr$ і R є f^+ -часовою симуляцією на (Σ, λ) . Тоді $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ задовольняє умову глобальної продовжуваності (англ. *global forward extensibility* [69, 68]).*

Доведення. Оскільки R є f^+ -часовою симуляцією на (Σ, λ) , то R є локальною часовою симуляцією на (Σ, λ) . Тоді $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ є НПМС, що задовольняє умову локальної продовжуваності за лемою 4.2.14. Згідно леми 4.2.15, кожний правий тупиковий шлях у $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ є таким, що можна уникнути у сенсі f^+ . З [69, теорема 6], що також наведена у [68], випливає, що кожний правий тупиковий шлях у $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ є таким, що можна уникнути у сильному сенсі (англ. *strongly escapable* [69, 68]). Тоді з [69, лема 14], що також наведена у [68], випливає, що $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ задовольняє умову глобальної продовжуваності. $\square$

Лема 4.2.18. *Нехай f^+ є нормальною правою мірою продовжуваності, а відношення $R \subseteq Q \times Q$ є f^+ -часовою симуляцією на (Σ, λ) . Тоді R є глобальною часовою симуляцією на (Σ, λ) .*

Доведення. Згідно леми 4.2.17, для кожної траєкторії $s_0 \in Tr$, $\Sigma_{s_0, R}(\Sigma, \lambda)$ є НПМС, що задовольняє умову глобальної продовжуваності (англ. *global forward extensibility* [69, 68]). Оскільки R є f^+ -часовою симуляцією на (Σ, λ) , то R є локальною часовою симуляцією на (Σ, λ) . Тоді за лемою 4.2.16, R є глобальною часовою симуляцією на (Σ, λ) . $\square$

Тепер наведемо доведення теорем 4.2.1 і 4.2.2.

Доведення теореми 4.2.1 випливає безпосередньо з леми 4.2.5, леми 4.2.6 і означення 4.2.6. $\square$

Доведення теореми 4.2.2 випливає безпосередньо з леми 4.2.18 і леми 4.2.7. $\square$

4.3. Апроксимація множин досяжності для абстрактних систем з неперервним часом

4.3.1. Попередні зауваження

У даному підрозділі розглядається задача доведення того, що кожний елемент у даній множині станів досягається деякою траєкторією заданої недетермінованої абстрактної динамічної системи з неперервним часом, що подана як НПМС, з деякого початкового стану.

Для дійсного числа $t \geq 0$, t -множина досяжності визначається як множина станів, які досягають у моменти часу в проміжку $[0, t]$ траєкторії НПМС, що починаються в момент часу 0. Множини досяжності може бути складно досліджувати безпосередньо за визначенням, тому доцільно розглянути верхні і нижні апроксимації цих множин.

Один з підходів до доведення того, що дана множина A є верхньою апроксимацією t -множини досяжності полягає у тому, щоб показати, що дана множина включає інваріантну множину (тобто множину станів I , така, що кожна траєкторія, що починається у I завжди залишається у I), що включає множину початкових станів НПМС.

Розглянемо задачу доведення того, що задана множина A є нижньою апроксимацією t -множини досяжності НПМС. Нижче пропонується підхід до вирішення цієї задачі, заснований на пошуку надмножини S множини A з такою властивістю, що кожна часткова траєкторія системи, що знаходиться повністю у S , або визначена у початковий момент часу, або може бути локально продовжена назад у часі, або може бути локально модифікована таким чином, щоб отримана траєкторія могла бути локально продовжена назад у часі. Така умова має відносно просте логічне формулювання і може бути поєднана з результатами про локальне існування траєкторій та методів аналізу їх локальної поведінки (наприклад, пов'язаних з лінеаризацією). Більш детально, такий підхід може бути корисним, що зробити можливим застосування різних теорем про локальне існування траєкторій і методів аналізу локальної поведінки системи для доведення досяжності. Він також може бути корисним для формалізації доведень, що стосуються досяжності в динамічних системах з неперервним часом у системах інтерактивного доведення теорем.

4.3.2. Позначення і терміни

Як і в підрозділі 4.1, будемо позначати як T множину невід'ємних дійсних чисел і як $\mathcal{T}$ множину всіх проміжків в T , що містять більше ніж один елемент.

Для будь-якої часткової функції $f : A \rightsquigarrow B$ будемо використовувати позначення $f(x) \downarrow$, щоб вказати, що значення f на x є визначеним. Також, будемо використовувати позначення $f(x) \uparrow$, щоб вказати, що значення f не є визначеним на x .

Для часткових функцій f, g будемо писати [69, 68] $f \sqsubseteq g$, якщо графік функції f є підмножиною графіку g , і $f \sqsubset g$, якщо графік функції f є власною підмножиною графіку g .

Означення 4.3.1. Якщо $I_1, I_2 \in \mathfrak{T}$ і $s_1 : I_1 \rightarrow Q$, $s_2 : I_2 \rightarrow Q$ є (тотальними) функціями, то s_2 називається *зворотним продовженням* s_1 , якщо $s_1 \sqsubset s_2$ і для кожної пари $(t_1, t_2) \in \text{dom}(s_1) \times (\text{dom}(s_2) \setminus \text{dom}(s_1))$ виконується $t_2 \leq t_1$.

Означення 4.3.2. Для функції $s_1 : I_1 \rightarrow Q$, де $I_1 \in \mathfrak{T}$, τ -зворотним виходом з s_1 в момент часу d , де τ є невід'ємним дійсним числом, а d є немаксимальним елементом множини $\text{dom}(s_1)$, називається (будь-яка) функція $s_2 : [c, d] \rightarrow Q$, така, що $c, d \in T$, $\tau = d - c$ і $s_2(d) = s_1(d)$.

Означення 4.3.3. Траєкторія $s \in \text{Tr}$ НПМС (T, Q, Tr) називається

1. *початковою*, якщо $s(0) \downarrow$ (тобто s є визначеною у момент часу 0);
2. *S-значною*, де S є множиною, якщо $\text{range}(s) \subseteq S$.

Означення 4.3.4. Нехай $\Sigma = (T, Q, \text{Tr})$ є НПМС і $t_0 \in (0, +\infty)$. Тоді

1. t_0 -множиною досяжності Σ називається множина

$$\{q \in Q \mid \exists s \in \text{Tr}_0 \exists t \in \text{dom}(s) \cap [0, t_0] q = s(t)\},$$

де Tr_0 є множиною всіх початкових траєкторій Σ (тобто t_0 -множина досяжності є множиною станів, що досягаються у певний момент часу в проміжку $[0, t_0]$ деякою початковою траєкторією);

2. *нижньою апроксимацією* t_0 -множини досяжності НПМС Σ називається (будь-яка) підмножина t_0 -множини досяжності Σ ;
3. t_0 -правою досяжною множиною Σ називається множина усіх $q \in Q$, таких, що існує траєкторія $s \in \text{Tr}$, така, що $\text{dom}(s) \subseteq [0, t_0]$, $\text{dom}(s)$ має максимальний елемент (який позначимо як $\max \text{dom}(s)$) і $q = s(\max \text{dom}(s))$ (тобто множина станів, що досягаються у правому кінці області визначення деякої траєкторії, що є визначеною на підмножині проміжку $[0, t_0]$, що має максимальний елемент).

Означення 4.3.5. НПМС Σ називається *f-зворотно продовжуваною*, де $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ є функцією класу K (тобто неперервною, строго зростаючою функцією, такою, що $f(0) = 0$), якщо для кожної траєкторії $s \in Tr$ принаймні одна з таких трьох умов виконується:

- 4.1) s є початковою траєкторією;
- 4.2) існує траєкторія $s' \in Tr$, така, що s' є зворотним продовженням s ;
- 4.3) $dom(s)$ не має мінімального елементу і існує траєкторія $s' \in Tr$, елемент $t \in T$, що є немаксимальним елементом множини $dom(s)$, і дійсне число

$$\tau \geq f(t - \inf dom(s)),$$

такі, що s' є τ -зворотним виходом з s в момент часу t .

Також, будемо називати *під-НПМС* у НПМС (T, Q, Tr) будь-яку НПМС (T, Q', Tr') , таку, що $Q \subseteq Q'$ і $Tr \subseteq Tr'$.

4.3.3. Головний результат підрозділу

Теорема 4.3.1. Нехай $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ є функцією класу K (тобто неперервною, строго зростаючою функцією, такою, що $f(0) = 0$), $\Sigma = (T, Q, Tr) \in \text{НПМС}$, $t_0 \in (0, +\infty)$, $A \subseteq Q$. Тоді множина A є нижньою апроксимацією t_0 -множини досяжності Σ тоді і тільки тоді, коли A є підмножиною t_0 -правої досяжної множини деякої *f-зворотно продовжуваної під-НПМС* у Σ .

Доведення. Будемо використовувати терміни з [69, 70, 72, 71, 68].

Припустимо, що A є підмножиною t_0 -правої досяжної множини деякої *f-зворотно продовжуваної під-НПМС* $\Sigma' = (T, Q', Tr')$ у Σ . Доведемо, що тоді A є нижньою апроксимацією t_0 -множини досяжності Σ . Ідея доведення полягає у тому, щоб показати, що локально визначені траєкторії, що закінчуються у множині A можуть бути продовжені у зворотному часі до початкового моменту часу за допомогою міри продовжуваності [69, 68].

Визначимо часткову функцію $f^- : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таким чином: для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$, значення $f^-(a, b)$ визначене тоді і тільки тоді, коли $b \leq a$, і якщо $b \leq a$, то $f^-(a, b) = a - f(a - b)$. Тоді з [69, теорема 6], що також наведена у [68] (застосованої до траєкторій у зворотному часі) впливає, що кожний лівий тупиковий шлях у Σ' є таким, що можна уникнути у сильному сенсі.

Нехай $q \in A$. Тоді $q = s(\max dom(s))$ для деякої траєкторії $s \in Tr'$, такої, що $dom(s) \subseteq [0, t_0]$. Позначимо $b = \max dom(s)$. Тоді $s \in Tr$.

Якщо s є початковою траєкторією або є підтраєкторією початкової траєкторії Σ' , то q досягається початковою траєкторією Σ у момент часу у проміжку $[0, t_0]$, тому q належить t_0 -множині досяжності Σ .

Припустимо, що s не є підтраєкторією початкової траєкторії Σ' . Припустимо, що існує траєкторія Σ' , що є зворотним продовженням s . Тоді з властивості повноти НПМС випливає, що Tr' містить максимальне (у сенсі відношення “бути підтраєкторією” $\sqsubseteq$) зворотне продовження s (серед зворотних продовжень s в Tr'). Позначимо його як s' . Тоді s' не може бути початковою траєкторією, оскільки, в іншому випадку, s була б підтраєкторією початкової траєкторії Σ' . Також, s' не має зворотного продовження в Tr' . Оскільки $\Sigma' \in f$ -зворотно продовжуваною, то $dom(s')$ не має мінімального елементу. Тоді $dom(s') = (a, b]$ для деякого елементу $a \in T$, такого, що $a < b$. Тоді s' є лівим тупиковим шляхом і є таким, що можна уникнути в сильному сенсі. Крім того, $q = s'(b)$ і $b \leq t_0$. З цього випливає, що q досягається початковою траєкторією Σ у деякий момент часу з проміжку $[0, t_0]$, тому q належить t_0 -множині досяжності Σ .

Припустимо, що не існує траєкторії Σ' , що є зворотним продовженням s . Також, s не є початковою траєкторією. Оскільки $\Sigma' \in f$ -зворотно продовжуваною, $dom(s)$ не має мінімального елементу. Тоді s є лівим тупиковим шляхом в Σ' і є таким, що можна уникнути в сильному сенсі. Крім того, $q = s(b)$ і $b \leq t_0$. З цього випливає, що q досягається початковою траєкторією Σ у деякий момент часу з $[0, t_0]$, тому q належить t_0 -множині досяжності Σ .

Тепер припустимо, що A є нижньою апроксимацією t_0 -множини досяжності Σ і доведемо, що A є підмножиною t_0 -правої досяжної множини деякої f -зворотно продовжуваної під-НПМС у Σ . За даним припущенням, A є підмножиною t_0 -множини досяжності Σ . Нехай Tr_0 є множиною початкових траєкторій Σ , $Tr' = \{s' : I \rightarrow Q \mid I \in \mathfrak{T} \wedge \exists s \in Tr_0 \ s' = s|_I\}$ і $\Sigma' = (T, Q, Tr')$. Слід зауважити, що множина Tr' є замкненою відносно власних обмежень, має недетерміновану марківську властивість і є повною (у сенсі НПМС), тому $\Sigma' \in$ НПМС. Крім того, Σ' є під-НПМС у Σ і є f -зворотно продовжуваною, оскільки кожна траєкторія, що не є початковою в Σ' , має зворотне продовження в Tr' . Крім того, для кожної початкової траєкторії s у Σ , $s|_{[0, t_0]}$ є траєкторією з областю визначення, що належить $[0, t_0]$, і за властивістю замкненості відносно власних обмежень, елементи області її значень досягаються у правих кінцях траєкторій Σ' , визначених на підмножинах $[0, t_0]$, тому A є підмножиною t_0 -правої досяжної множини Σ' . Таким чином, A

є підмножиною t_0 -правої досяжної множини Σ' , що є f -зворотно продовжуваною під-НПМС у Σ . $\square$

Зауваження 4.3.1. Можливий спосіб отримання під-НПМС в НПМС Σ полягає у звуженні множини станів Σ . Більш детально, якщо $S \subseteq Q$ і Tr_S є множиною всіх S -значних траєкторій Σ , то $\Sigma_S = (T, S, Tr_S)$ є під-НПМС у Σ . З цього випливає, що вищезгаданий підхід до доведення того, що дана множина A є нижньою апроксимацією t_0 -множини досяжності НПМС може бути сформульований таким чином: щоб довести, що A є нижньою апроксимацією, достатньо обрати функцію f класу K і вказати надмножину S множини A , таку, що A є підмножиною t_0 -правої досяжної множини Σ_S і Σ_S є f -зворотно продовжуваною.

4.4. Узагальнені ефективні схеми визначення

4.4.1. Попередні зауваження

Одним з способів застосування переписувальних систем є їх використання як абстракцій моделей обчислень [202]. Наприклад, елементи АПС можуть розглядатися як стани виконання або пари з даних та програм, а елементи відношення редукції як можливі переходи між такими станами. У цьому випадку способи задання АПС є тісно пов'язаними з різними способами подання даних та програм і відповідними поняттями обчислюваності. У даному підрозділі буде розглянуто узагальнення поняття обчислюваності на алгебраїчних структурах, запропоноване Г. Фрідманом у роботах [38, 39].

У [38] було визначено поняття ефективної схеми визначення (EDS). Напівформально, схеми EDS є визначеннями функції за рекурсивно перелічною множиною випадків (при цьому, область визначення функції *не* обов'язково є скінченною або зліченною і такі визначення можуть стосуватись, наприклад, функцій на дійсних числах або інших об'єктах, що утворюють незліченну множину). Більш детально, дане поняття може бути описано таким чином [39]. Розглянемо деяку мову термів і безкванторних формул L сигнатури зі скінченною множиною символів відношень, констант, операцій, що інтерпретується у алгебраїчній структурі M з деяким носієм, відношеннями, константами, операціями. Функція f на носії M є EDS визначною [38, 39], якщо існує множина S формул вигляду $\varphi_i(v, v_1, \dots, v_n) \rightarrow t_i(v, v_1, \dots, v_n)$, елементи якої утворені з термів $t_i(v, v_1, \dots, v_n)$ з L і базових напівалгебраїчних умов (скінченних кон'юнкцій атомарних формул та їх заперечень [39]) $\varphi_i(v, v_1, \dots, v_n)$ з L , де $v, v_1, \dots, v_n$ є іменами змінних, така, що

S є ефективною (рекурсивно перелічною як множина рядків) і існують елементи $a_1, \dots, a_n$ носія M (параметри визначення), такі, що f визначається кон'юнкцією усіх умов вигляду: $f(x) = [t_i](x, a_1, \dots, a_n)$, якщо $[\varphi_i](x, a_1, \dots, a_n)$ є істинним, для кожної формули $\varphi_i(v, v_1, \dots, v_n) \rightarrow t_i(v, v_1, \dots, v_n)$ з S , де $[t_i]$ та $[\varphi_i]$ позначають інтерпретації t_i, φ_i . Відомо [39, теорема 2], що у відповідній формалізації, програми у мові зі змінними, що приймають значення у M , присвоєнням, умовним оператором і оператором переходу задають функції, що є EDS визначними.

Однак, вищезазначене поняття EDS визначної функції охоплює лише обчислювані функції з M (або M^n) у M (або M^m).

У даному підрозділі буде запропоновано узагальнення поняття EDS визначної функції на структурі M до поняття EDS визначної функції, що перетворює складноіменні дані [189] над довільною множиною базових значень, що є різновидом номінативних даних [150, 189, 113], що узагальнюють множини пар ім'я-значення.

Більш детально, у [189] було надано визначення та порівняння деяких типів номінативних даних. Номінативні дані кожного з розглянутих типів утворюють множину, параметризовану множинами базових імен V і базових значень A . Одним з таких типів є складноіменні дані (англ. complex-named data) [189, розділ 4]. Множина складноіменних даних над (довільними) фіксованими множинами базових імен V та базових значень A позначається як $NDVC(V, A)$ [189]. Її елементи можуть розглядатись [189] як орієнтовані дерева (англ. out-tree), дуги яких розмічені непорожніми скінченними послідовностями елементів V (непорожніми словами), а листові вузли розмічені елементами $A \cup \{\emptyset\}$, причому такі дерева задовольняють принцип однозначного асоціативного іменування (англ. principle of unambiguous associative naming) [189, розділ 4]. У [189, означення 10] було визначено алгебру функцій і предикатів на складноіменних даних (номінативну алгебру), операції якої (композиції) відповідають таким конструкціям як послідовне виконання, розгалуження, цикл, а виразні функції в якій можуть розглядатись як обчислювані функції. Нижче буде запропоноване визначення EDS визначної функції [38, 39, 99] на $NDVC(V, A)$.

4.4.2. Позначення і терміни

Для будь-яких часткових функцій f, g позначення $f(x) \cong g(x)$ буде використовуватись для сильної рівності: $f(x) \downarrow$ тоді і тільки тоді, коли $g(x) \downarrow$ і з $f(x) \downarrow$ випливає, що $f(x) = g(x)$.

Також, будемо використовувати деякі позначення і терміни з [189, 150].

Будемо позначати як F, T істиннісні значення $False, True$.

Нехай V і A є фіксованими множинами базових імен і значень. Будемо припускати, що T і F не належать A .

Будемо позначати [189]:

- $Pr_{CC}(V, A) = NDVC(V, A) \rightarrow \{T, F\}$, елементи $Pr_{CC}(V, A)$ будуть називатись (частковими номінативними) предикатами [189];
- $Fn_{CC}(V, A) = NDVC(V, A) \rightarrow NDVC(V, A)$, елементи $Fn_{CC}(V, A)$ будуть називатись (частковими біномінативними) функціями [189].

Також, для $n \in \mathbb{N}$ будемо позначати:

- $Pr_{CC}^n(V, A) = (NDVC(V, A))^n \rightarrow \{T, F\}$;
- $Fn_{CC}^n(V, A) = (NDVC(V, A))^n \rightarrow NDVC(V, A)$.

Будемо позначати [189] як $\bar{U}$ множину всіх кортежів $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ для всіх $n \geq 1$, де $u_i, i = 1, 2, \dots, n$ є скінченними послідовностями елементів V (словами з V^+), такими, що для всіх $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, якщо $i \neq j$, то u_i і u_j є непорівнюваними у сенсі префіксного порядку.

Будемо позначати як $u \Rightarrow_a$ унарну операцію розіменування на $NDVC(V, A)$ з параметром $u \in V^+$, визначену як у [189, розділ 6], як $\Rightarrow u$ унарну операцію іменування на $NDVC(V, A)$ з параметром $u \in V^+$, визначену як у [189, розділ 6], і як ∇_a^u бінарну операцію локального накладання з параметром $u \in V^+$, визначену як у [189, розділ 6].

Також, будемо використовувати такі позначення відповідно до [189]:

- $\bullet$ буде позначати послідовну композицію [150, 189] $\bullet : Fn(V, A) \times Fn(V, A) \rightarrow Fn(V, A)$, де для всіх $f, g \in Fn(V, A)$ і $d \in NDVC(V, A)$:

$$(f \bullet g)(d) \cong g(f(d));$$

- $\cdot$ буде позначати композицію передбачення [150, 189] $\cdot : Fn(V, A) \times Pr(V, A) \rightarrow Pr(V, A)$, де для всіх $f \in Fn(V, A)$, $p \in Pr(V, A)$, $d \in NDVC(V, A)$ виконується

$$(f \cdot p)(d) \cong p(f(d));$$

- Asg^u буде позначати композицію присвоєння [150, 189]: $Asg^u : Fn(V, A) \rightarrow$

$Fn(V, A)$ з параметром $u \in V^+$, де для $f \in Fn(V, A)$ і $d \in NDVC(V, A)$,

$$(Asg^u(f))(d) \cong d\nabla_a^u f(d);$$

- $S_F^{u_1, u_2, \dots, u_n}$ буде позначати композицію суперпозиції у функцію [150, 189]
 $S_F^{u_1, u_2, \dots, u_n} : Fn(V, A) \times (Fn(V, A))^n \rightarrow Fn(V, A)$ з параметрами $n \geq 1$ і
 $u_1, \dots, u_n \in V^+$, такими, що $(u_1, \dots, u_n) \in \bar{U}$, де

$$S_F^{u_1, \dots, u_n}(f, f_1, \dots, f_n)(d) \cong f(\dots(d\nabla_a^{u_1} f_1(d))\dots\nabla_a^{u_n} f_n(d))\dots);$$

якщо $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \bar{U}$, то $S_F^{\bar{u}}$ буде позначати $S_F^{u_1, u_2, \dots, u_n}$;

- $S_P^{u_1, \dots, u_n}$ буде позначати композицію суперпозиції у предикат [150, 189]
 $S_P^{u_1, u_2, \dots, u_n} : Pr(V, A) \times (Fn(V, A))^n \rightarrow Pr(V, A)$ з параметрами $n \geq 1$ і
 $u_1, \dots, u_n \in V^+$, такими, що $(u_1, \dots, u_n) \in \bar{U}$, де

$$S_P^{u_1, \dots, u_n}(p, f_1, \dots, f_n)(d) \cong p(\dots(d\nabla_a^{u_1} f_1(d))\dots\nabla_a^{u_n} f_n(d))\dots);$$

якщо $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \bar{U}$, то $S_P^{\bar{u}}$ буде позначати $S_P^{u_1, u_2, \dots, u_n}$;

- IF буде позначати композицію розгалуження [150, 189] $IF : Pr(V, A) \times Fn(V, A) \times Fn(V, A) \rightarrow Fn(V, A)$, де для $p \in Pr(V, A)$, $f, g \in Fn(V, A)$, $d \in NDVC(V, A)$ виконується

$$IF(p, f, g)(d) \cong f(d), \text{ якщо } p(d) \downarrow = T,$$

$$IF(p, f, g)(d) \cong g(d), \text{ якщо } p(d) \downarrow = F,$$

$$IF(p, f, g)(d) \uparrow, \text{ якщо } p(d) \uparrow;$$

- WH буде позначати композицію циклу [150, 189] $WH : Pr(V, A) \times Fn(V, A) \rightarrow Fn(V, A)$, де для $p \in Pr(V, A)$, $f \in Fn(V, A)$, $d \in NDVC(V, A)$ виконується:

$WH(p, f)(d) \downarrow = f^{(n)}(d)$, якщо існує $n \geq 0$, таке, що $(f^{(i)} \cdot p)(d) \downarrow = T$ для всіх $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ і $(f^{(n)} \cdot p)(d) \downarrow = F$, де $f^{(n)}(d) \cong f(\dots(f(d))\dots)$, де символ f зустрічається n разів у підвиразі справа від $\cong$, причому $f^{(0)}(d) \downarrow = d$,

$WH(p, f)(d) \uparrow$ в іншому випадку;

- $\neg$ буде позначати композицію заперечення [150, 189] $\neg : Pr(V, A) \rightarrow Pr(V, A)$, де для $p \in Pr(V, A)$ і $d \in NDVC(V, A)$: $(\neg p)(d) \downarrow = T$, якщо $p(d) \downarrow = F$; $(\neg p)(d) \downarrow = F$, якщо $p(d) \downarrow = T$; $(\neg p)(d) \uparrow$, якщо $p(d) \uparrow$;
- $\vee$ буде позначати композицію диз'юнкції [150, 189] $\vee : Pr(V, A) \times$

- $Pr(V, A) \rightarrow Pr(V, A)$, де для кожних $p_1, p_2 \in Pr(V, A)$ і $d \in NDVC(V, A)$,
- $(p_1 \vee p_2)(d) = T$, якщо $p_1(d) \downarrow = T$ або $p_2(d) \downarrow = T$,
- $(p_1 \vee p_2)(d) = F$, якщо $p_1(d) \downarrow = F$ і $p_2(d) \downarrow = F$,
- $(p_1 \vee p_2)(d) \uparrow$ в іншому випадку;
- Id буде позначати тотожну композицію [189] $Id : Fn(V, A) \rightarrow Fn(V, A)$, де $Id(f) = f$ для всіх $f \in Fn(V, A)$;
 - $True$ буде позначати нуль-арну композицію – всюди істинний предикат [189] $True \in Pr(V, A)$, де $True(d) \downarrow = T$ для всіх $d \in NDVC(V, A)$;
 - $\perp_F$ буде позначати нуль-арну композицію – ніде не визначену функцію [189] $\perp_F \in Fn(V, A)$, де $\perp_F(d) \uparrow$ для всіх $d \in NDVC(V, A)$;
 - $\perp_P$ буде позначати нуль-арну композицію – ніде не визначений предикат [189] $\perp_P \in Pr(V, A)$, де $\perp_P(d) \uparrow$ для всіх $d \in NDVC(V, A)$;
 - $u!$ буде позначати нуль-арну композицію – предикат перевірки імені [150, 189] з параметром $u \in V^+$, де $u!(d) = T$, якщо $u \Rightarrow_a(d) \downarrow$ і $u!(d) = F$, якщо $u \Rightarrow_a(d) \uparrow$;
 - $Empty$ буде позначати нуль-арну композицію – порожню константу [189], де $Empty(d) = \emptyset$ для всіх $d \in NDVC(V, A)$.
 - $IsEmpty$ буде позначати нуль-арну композицію – предикат перевірки на порожність [189], де для кожного $d \in NDVC(V, A)$, $IsEmpty(d) \downarrow = T$, якщо $d = \emptyset$ і $IsEmpty(d) \downarrow = F$, якщо $d \neq \emptyset$.

Будемо називати номінативною алгоритмічною алгеброю (НАА) таку 2-сортну алгебру [189, означення 10]:

$$NGA_{CC}^a(V, A) = (Pr_{CC}(V, A), Fn_{CC}(V, A); \bullet, IF, WH, \cdot, (Asg^u)_{u \in V^+},$$

$$(S_F^{\bar{u}})_{\bar{u} \in \bar{U}}, (S_P^{\bar{u}})_{\bar{u} \in \bar{U}}, \vee, \neg, Id, True, \perp_F, \perp_P, (u!)_{u \in V^+}, Empty, IsEmpty).$$

Будемо також розглядати розширення НАА, отримані додаванням символів констант, що позначають фіксовані предикати з $Pr_{CC}(V, A)$ та/або функції з $Fn_{CC}(V, A)$ до її сигнатури.

Нехай $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p_1, p_2, \dots, p_k \in Pr_{CC}(V, A)$ і $f_1, f_2, \dots, f_l \in Fn_{CC}(V, A)$.

Будемо називати розширеною номінативною алгоритмічною алгеброю (РНАА) з константами-предикатами $p_1, \dots, p_k$ і константами-функціями $f_1, \dots, f_l$

таку 2-сортну алгебру

$$\begin{aligned}
 &NGA_{CC}^a(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l) = \\
 &(Pr_{CC}(V, A), Fn_{CC}(V, A); \bullet, IF, WH, \cdot, (Asg^u)_{u \in V^+}, \\
 &(S_F^{\bar{u}})_{\bar{u} \in \bar{U}}, (S_P^{\bar{u}})_{\bar{u} \in \bar{U}}, \vee, \neg, Id, True, \perp_F, \perp_P, (u!)_{u \in V^+}, Empty, IsEmpty, \\
 &p_1, p_2, \dots, p_k, f_1, f_2, \dots, f_l).
 \end{aligned}$$

Також, будемо позначати як $-_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ таку алгебраїчну структуру [99] (на даних з $NDVC(V, A)$):

$$\begin{aligned}
 NDAS_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l) = (NDVC(V, A); \emptyset, (u \Rightarrow_a)_{u \in V^+}, (\Rightarrow u)_{u \in V^+}, \\
 (\nabla_a^u)_{u \in V^+}, (u!)_{u \in V^+}, IsEmpty, p_1, \dots, p_k, f_1, \dots, f_l),
 \end{aligned}$$

де $\emptyset$ позначає константу – порожній елемент $NDVC(V, A)$.

Для будь-якого транзитивного бінарного відношення $\leq$ на $NDVC(V, A)$ і $n \in \mathbb{N}$ будемо позначати [99]:

- $PrM_{CC}(V, A, \leq)$ є множиною всіх $p \in Pr_{CC}(V, A)$, таких, що для всіх $d_1, d_2 \in NDVC(V, A)$, якщо $p(d_1) \downarrow$ і $d_1 \leq d_2$, то $p(d_2) \downarrow = p(d_1)$; елементи $PrM_{CC}(V, A, \leq)$ будуть називатись $\leq$ -еквітонними предикатами [99];
- $FnI_{CC}(V, A, \leq)$ є множиною всіх $f \in Fn_{CC}(V, A)$, таких, що для кожного $d \in NDVC(V, A)$, якщо $f(d) \downarrow$, то $d \leq f(d)$; елементи $FnI_{CC}(V, A, \leq)$ будуть називатись $\leq$ -зростаючими функціями [99];
- $FnM_{CC}(V, A, \leq)$ є множиною всіх $f \in Fn_{CC}(V, A)$, таких, що для кожних $d_1, d_2 \in NDVC(V, A)$, якщо $f(d_1) \downarrow$ і $d_1 \leq d_2$, то $f(d_2) \downarrow$ і $f(d_1) \leq f(d_2)$; елементи $FnM_{CC}(V, A, \leq)$ будуть називатись $\leq$ -монотонними функціями [99];
- $PrM_{CC}^n(V, A, \leq)$ є множиною всіх $p \in Pr_{CC}^n(V, A)$, таких, що для всіх $d_1, d_2, \dots, d_n, d'_1, d'_2, \dots, d'_n \in NDVC(V, A)$, якщо $p(d_1, d_2, \dots, d_n) \downarrow$ і $d_1 \leq d'_1, d_2 \leq d'_2, \dots, d_n \leq d'_n$, то $p(d'_1, d'_2, \dots, d'_n) \downarrow = p(d_1, d_2, \dots, d_n)$; елементи $PrM_{CC}^n(V, A, \leq)$ будуть називатись $\leq$ -еквітонними n -арними предикатами [99];
- $FnI_{CC}^n(V, A, \leq)$ є множиною всіх $f \in Fn_{CC}^n(V, A)$, таких, що для кожних $d_1, d_2, \dots, d_n \in NDVC(V, A)$, якщо $f(d_1, d_2, \dots, d_n) \downarrow$, то $d_i \leq f(d_1, d_2, \dots, d_n)$

- для кожного $i = 1, 2, \dots, n$; елементи множини $FnM_{CC}(V, A, \leq)$ будуть називатись $\leq$ -зростаючими n -арними функціями [99];
- $FnM_{CC}^n(V, A, \leq)$ є множиною всіх $f \in Fn_{CC}^n(V, A)$, таких, що для кожних $d_1, d_2, \dots, d_n, d'_1, d'_2, \dots, d'_n \in NDVC(V, A)$, якщо $f(d_1, d_2, \dots, d_n) \downarrow$ і $d_1 \leq d'_1, d_2 \leq d'_2, \dots, d_n \leq d'_n$, то $f(d'_1, d'_2, \dots, d'_n) \downarrow$ і $f(d_1, d_2, \dots, d_n) \leq f(d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$; елементи множини $FnM_{CC}^n(V, A, \leq)$ будуть називатись $\leq$ -монотонними n -арними функціями [99].

4.4.3. Головні результати підрозділу

Нехай $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ є фіксованою скінченною множиною базових імен, де $v_i \neq v_j$ для $i \neq j$, а A є фіксованою множиною базових значень.

Нехай $p_1, \dots, p_k \in Pr_{CC}(V, A)$, $f_1, \dots, f_l \in Fn_{CC}(V, A)$ є фіксованими скінченними послідовностями предикатів і функцій. Якщо $x_1, \dots, x_n$ є іменами змінних, позначимо як $T_{x_1, x_2, \dots, x_n}(V; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ множини всіх термів у $NDAS_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ зі змінними $x_1, \dots, x_n$, і як $\Phi_{x_1, \dots, x_n}(V; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ множини всіх базових напівалгебраїчних умов, тобто формул, що мають вигляд скінченної кон'юнкції атомарних формул у $NDAS_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ або їх заперечень (слід зауважити, що рівність не допускається).

Для кожного терму t в $T_{x_1, x_2, \dots, x_n}(V; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ або формули φ в $\Phi_{x_1, \dots, x_n}(V; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$, позначимо як $[t]$ і $[\varphi]$ їх інтерпретації (відповідну часткову функцію і предикат на кортежах елементів $NDVC(V, A)$).

Означення 4.4.1. Функція $f \in Fn_{CC}(V, A)$ є EDS визначною відносно $p_1, \dots, p_k$ і $f_1, \dots, f_l$, якщо існує натуральне число n , елементи $d_1, d_2, \dots, d_n \in NDVC(V, A)$ і скінченна або зліченна множина S вигляду

$$\{(\varphi_i(x, x_1, x_2, \dots, x_n), t_i(x, x_1, \dots, x_n)) \mid i \in I\}$$

де I є множиною індексів $I = \mathbb{N}$ або $I = \{1, 2, \dots, K\}$ для деякого натурального числа K , $\varphi_i(x, x_1, \dots, x_n) \in \Phi_{x, x_1, \dots, x_n}(V; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$, $t_i(x, x_1, \dots, x_n) \in T_{x, x_1, \dots, x_n}(V; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ і $x, x_1, \dots, x_n$ є різними іменами змінних, такими, що

1) множина всіх рядків вигляду $\varphi(x, x_1, \dots, x_n) \rightarrow t(x, x_1, \dots, x_n)$ для $(\varphi(x, x_1, \dots, x_n), t(x, x_1, \dots, x_n)) \in S$ в алфавіті $\{v_1, v_2, \dots, v_m, ,, (,), x, x_1, \dots, x_n, \emptyset, \Rightarrow, a, !, IsEmpty, \neg, \wedge, p_1, \dots, p_k, f_1, \dots, f_l\}$ є рекурсивно перелічною (припускається, що символи з верхніми та нижніми індексами ∇_a^v у термах подаються як ∇av);

2) для кожного $d \in NDVC(V, A)$ і $i \in I$, якщо $[\varphi_i](d, d_1, \dots, d_n) \downarrow = T$, то $f(d) \cong [t_i](d, d_1, \dots, d_n)$;

3) для кожного $d \in NDVC(V, A)$, якщо $[\varphi_i](d, d_1, \dots, d_n) \uparrow$ для всіх $i \in I$, то $f(d) \uparrow$.

Означення 4.4.2. Предикат $p \in Pr_{CC}(V, A)$ є EDS визначним відносно $p_1, \dots, p_k$ і $f_1, \dots, f_l$, якщо існує натуральне число n , елементи $d_1, d_2, \dots, d_n \in NDVC(V, A)$ і скінченна або зліченна множина S вигляду

$$\{(\varphi_i(x, x_1, x_2, \dots, x_n), b_i) \mid i \in I\}$$

де I є множиною індексів $I = \mathbb{N}$ або $I = \{1, 2, \dots, K\}$ для натурального числа K , $\varphi_i(x, x_1, \dots, x_n) \in \Phi_{x, x_1, \dots, x_n}(V; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$, $b_i \in \{T, F\}$ і $x, x_1, \dots, x_n$ є різними іменами змінних, такими, що

1) множина всіх рядків вигляду $\varphi(x, x_1, \dots, x_n) \rightarrow b$ для $(\varphi(x, x_1, \dots, x_n), b) \in S$ в алфавіті $\{v_1, v_2, \dots, v_m, ,, (,), x, x_1, \dots, x_n, \emptyset, \Rightarrow, , a, !, IsEmpty, \neg, \wedge, p_1, \dots, p_k, f_1, \dots, f_l\}$ є рекурсивно перелічною (припускається, що символи з верхніми індексами ∇_a^v у термах подаються як ∇av);

2) для кожного $d \in NDVC(V, A)$ і $i \in I$, якщо $[\varphi_i](d, d_1, \dots, d_n) \downarrow = T$, то $p(d) \downarrow = b_i$;

3) для кожного $d \in NDVC(V, A)$, якщо $[\varphi_i](d, d_1, \dots, d_n) \uparrow$ для всіх $i \in I$, то $p(d) \uparrow$.

Введемо такі позначення.

- $PrEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ є множиною всіх предикатів у $Pr_{CC}(V, A)$, що є EDS визначними відносно $p_1, \dots, p_k$ і $f_1, \dots, f_l$.
- $FnEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ є множиною всіх функцій у $Fn_{CC}(V, A)$, що є EDS визначними відносно $p_1, \dots, p_k$ і $f_1, \dots, f_l$.

З наведеного нижче твердження випливає, що унарні функції, виразні у РНАА з константами-предикатами $p_1, \dots, p_k$ і константами-функціями $f_1, \dots, f_l$ є EDS визначними відносно $p_1, \dots, p_k$ і $f_1, \dots, f_l$.

Твердження 4.4.1. Множини $PrEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ та $FnEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ є носіями підалгебри алгебри $NGA_{CC}^a(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$.

Доведення. Безпосередньо з визначень випливає, що всі нуль-арні композиції алгебри $NGA_{CC}^a(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l) \in EDS$ визначними за означенням 4.4.1 і означенням 4.4.2.

Унарні та бінарні композиції алгебри

$$NGA_{CC}^a(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$$

зберігають властивість “бути EDS визначною функцією (предикатом)”, аналогічно до результату [39]. З цього випливає твердження теореми. $\square$

Лема 4.4.1. *Нехай $\leq$ є транзитивним бінарним відношенням на $NDVC(V, A)$. Припустимо, що $f_1, f_2, \dots, f_l \in FnI_{CC}(V, A, \leq)$, $\Rightarrow u, u \Rightarrow_a \in FnI_{CC}(V, A, \leq)$ для кожного $u \in V^+$ і $\nabla_a^u \in FnI_{CC}^2(V, A, \leq)$ для кожного $u \in V^+$.*

Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$, різних імен змінних $x_1, \dots, x_n$ і терму $t(x_1, \dots, x_n) \in T_{x_1, \dots, x_n}(V; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ виконується $[t] \in FnI_{CC}^n(V, A, \leq)$.

Доведення. Твердження леми випливає безпосередньо із застосування індукції за структурою терму $t(x_1, \dots, x_n)$ алгебраїчної структури номінативних даних $NDAS_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ (слід зауважити, що база індукції випливає з припущень). $\square$

Лема 4.4.2. *Нехай $\leq$ є транзитивним бінарним відношенням $NDVC(V, A)$. Припустимо, що $f_1, f_2, \dots, f_l \in FnI_{CC}(V, A, \leq)$, $\Rightarrow u, u \Rightarrow_a \in FnI_{CC}(V, A, \leq)$ для кожного $u \in V^+$ і $\nabla_a^u \in FnI_{CC}^2(V, A, \leq)$ для кожного $u \in V^+$. Припустимо, що $p_1, p_2, \dots, p_k, IsEmpty \in PrM_{CC}(V, A, \leq)$ і $u! \in PrM_{CC}(V, A, \leq)$ для кожного $u \in V^+$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$, різних імен змінних $x_1, \dots, x_n$, терму $t(x_1, \dots, x_n) \in T_{x_1, \dots, x_n}(V; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ і формули $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \Phi_{x_1, \dots, x_n}(V; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ виконується $[t] \in FnI_{CC}^n(V, A, \leq)$ і $[\varphi] \in PrM_{CC}^n(V, A, \leq)$.*

Доведення. Твердження леми випливає безпосередньо із застосування індукції за структурою терму $t(x_1, \dots, x_n)$ і формули $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ алгебраїчної структури номінативних даних $NDAS_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ (слід зауважити, що база індукції випливає з припущень). $\square$

Лема 4.4.3. *Нехай $\leq$ є передпорядком на $NDVC(V, A)$.*

Припустимо, що $f_1, f_2, \dots, f_l \in FnM_{CC}(V, A, \leq)$, $\Rightarrow u, u \Rightarrow_a \in FnM_{CC}(V, A, \leq)$ для кожного $u \in V^+$ і $\nabla_a^u \in FnM_{CC}^2(V, A, \leq)$ для кожного $u \in V^+$. Припустимо, що $p_1, p_2, \dots, p_k, IsEmpty \in PrM_{CC}(V, A, \leq)$ і

$u! \in PrM_{CC}(V, A, \leq)$ для кожного $u \in V^+$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$, різних імен змінних $x_1, \dots, x_n$, терму $t(x_1, \dots, x_n) \in T_{x_1, \dots, x_n}(V; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ і формули $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \Phi_{x_1, \dots, x_n}(V; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ виконується $[t] \in FnM_{CC}^n(V, A, \leq)$ і $[\varphi] \in PrM_{CC}^n(V, A, \leq)$.

Доведення. Твердження леми впливає безпосередньо із застосування індукції за структурою терму $t(x_1, \dots, x_n)$ і формули $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ алгебраїчної структури номінативних даних $NDAS_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$. $\square$

Теорема 4.4.1.

1. Якщо $\leq$ є транзитивним відношенням на $NDVC(V, A)$ і умови леми 4.4.1 виконуються, то

$$FnEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l) \subseteq FnI_{CC}(V, A, \leq).$$

2. Якщо $\leq$ є транзитивним відношенням на $NDVC(V, A)$ і умови леми 4.4.2 виконуються, то

$$PrEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l) \subseteq PrM_{CC}(V, A, \leq)$$

$$FnEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l) \subseteq FnI_{CC}(V, A, \leq).$$

3. Якщо $\leq$ є передпорядком на $NDVC(V, A)$ і умови леми 4.4.3 виконуються, то

$$PrEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l) \subseteq PrM_{CC}(V, A, \leq)$$

$$FnEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l) \subseteq FnM_{CC}(V, A, \leq).$$

Доведення.

1. Доведемо, що $FnEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l) \subseteq FnI_{CC}(V, A, \leq)$. Нехай $f \in FnEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$, $d \in NDVC(V, A)$ і $f(d) \downarrow$. Тоді, використовуючи позначення означення 4.4.1, існує індекс i , такий, що $[\varphi_i](d, d_1, \dots, d_n) \downarrow = T$ і $[t_i](d, d_1, \dots, d_n) \downarrow = f(d)$. За лемою 4.4.2 $[t_i] \in FnI_{CC}^{n+1}(V, A, \leq)$, тому $d \leq [t_i](d, d_1, \dots, d_n) = f(d)$. Оскільки d є довільним, маємо $f \in FnI_{CC}(V, A, \leq)$.

2. Доведемо, що $PrEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l) \subseteq PrM_{CC}(V, A, \leq)$. Нехай $p \in PrEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$, $d', d'' \in NDVC(V, A)$ і $d' \leq d''$. Припустимо, що $p(d') \downarrow$. Тоді, використовуючи позначення означення 4.4.2, існує індекс i , такий, що $p(d') = b_i$ і $[\varphi_i](d', d_1, \dots, d_n) \downarrow = T$. За лемою 4.4.2 $[\varphi_i] \in PrM_{CC}^{n+1}(V, A, \leq)$, тому

$[\varphi_i](d'', d_1, \dots, d_n) \downarrow = T$. Тоді $p(d'') \downarrow = b_i = p(d')$. Оскільки d є довільним, маємо $p \in PrM_{CC}(V, A, \leq)$.

Також, аналогічно до випадку 1 вище, маємо

$$FnEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l) \subseteq FnI_{CC}(V, A, \leq).$$

3. Доведемо, що $PrEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l) \subseteq PrM_{CC}(V, A, \leq)$.

Нехай $p \in PrEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$, $d', d'' \in NDVC(V, A)$ і $d' \leq d''$. Припустимо, що $p(d') \downarrow$. Тоді, використовуючи позначення означення 4.4.2, існує індекс i , такий, що $p(d') = b_i$ і $[\varphi_i](d', d_1, \dots, d_n) \downarrow = T$. За лемою 4.4.3 $[\varphi_i] \in PrM_{CC}^{n+1}(V, A, \leq)$, тому $[\varphi_i](d'', d_1, \dots, d_n) \downarrow = T$. Тоді $p(d'') \downarrow = b_i = p(d')$. Оскільки d є довільним, маємо $p \in PrM_{CC}(V, A, \leq)$.

Доведемо, що $FnEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l) \subseteq FnM_{CC}(V, A, \leq)$.

Нехай $f \in FnEds_{CC}(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$, $d, d' \in NDVC(V, A)$, $d \leq d'$ і $f(d) \downarrow$. Тоді, використовуючи позначення означення 4.4.1, існує індекс i , такий, що $[\varphi_i](d, d_1, \dots, d_n) \downarrow = T$ і $[t_i](d, d_1, \dots, d_n) \downarrow = f(d)$. За лемою 4.4.3, $[t_i] \in FnM_{CC}^{n+1}(V, A, \leq)$ і $[\varphi_i] \in PrM_{CC}^{n+1}(V, A, \leq)$, тому $[t_i](d', d_1, \dots, d_n) \downarrow$ і $f(d) = [t_i](d, d_1, \dots, d_n) \leq [t_i](d', d_1, \dots, d_n)$. Крім того, $[\varphi_i](d', d_1, \dots, d_n) \downarrow = T$, тому $f(d') \downarrow = [t_i](d', d_1, \dots, d_n)$ і $f(d) \leq f(d')$. Оскільки d є довільним, маємо $f \in FnM_{CC}(V, A, \leq)$. □

Наслідок 4.4.1. За умови виконання припущень лем 4.4.1 або лем 4.4.2, всі унарні функції, що є виразними у $NGA_{CC}^a(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ належать $FnI_{CC}(V, A, \leq)$.

Доведення. Випливає безпосередньо з твердження 4.4.1 і теореми 4.4.1. □

Наслідок 4.4.2. За умови виконання припущень лем 4.4.3, всі унарні функції, що є виразними у $NGA_{CC}^a(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ належать $FnM_{CC}(V, A, \leq)$.

Доведення. Випливає безпосередньо з твердження 4.4.1 і теореми 4.4.1. □

Зауваження 4.4.1. З наслідку 4.4.1 випливає, що для того, щоб показати, що функція f , виразна у $NGA_{CC}^a(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ має властивість $(d, f(d)) \in \leq$ (пара з вхідних і вихідних даних f належить транзитивному відношенню $\leq$), достатньо перевірити властивості базових операцій на номінативних даних, що сформульовані у лемі 4.4.1. При цьому не є необхідним доведення збереження цієї

властивості композиціями $NGA_{CC}^a(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$, оскільки це збереження випливає з того, що всі функції, виразні у $NGA_{CC}^a(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ є EDS визначними.

Зауваження 4.4.2. Результати, подібні до наслідків з теореми 4.4.1 можуть бути сформульовані не тільки для РНАА, а і для редукта НАА, тобто алгебри, отриманої з НАА шляхом вилучення деяких операцій і предикатів:

1) якщо всі константи-функції редукта РНАА є $\leq$ -зростаючими, то всі унарні функції, виразні у цьому редукті є $\leq$ -зростаючими;

2) якщо в редукті РНАА всі константи-функції є $\leq$ -монотонними і всі константи-предикати є $\leq$ -еквітонними, то всі унарні функції, що є виразними у цьому редукті є $\leq$ -монотонними.

З наслідку 4.4.2 випливає, що для того, щоб показати, що функція, виразна у $NGA_{CC}^a(V, A; p_1, \dots, p_k; f_1, \dots, f_l)$ є монотонною відносно деякого передпорядку на даних, достатньо перевірити властивості базових операцій на номінативних даних, що сформульовані у лемі 4.4.3.

4.5. Виразність в алгебрі предикатів з предикатним доповненням

4.5.1. Попередні зауваження

Переписувальні системи можуть бути використані як абстракції моделей міркувань і логічного виводу [108]. При цьому, на синтаксичному рівні елементами переписувальних систем можуть бути терми, формули або пов'язані конструкції, а на семантичному рівні – функції і предикати. В останньому випадку є важливим дослідження композицій предикатів, що можуть бути корисними для застосування у правилах переписування і розгляд пов'язаного питання виразності предикатів у термінах обраних композицій.

У цьому підрозділі розглядається питання про виразність часткових предикатів в алгебрі часткових предикатів з композиціями диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення, визначеними відповідно до принципів сильної тризначної логіки Кліні [105], розширеній композицією предикатного доповнення [95], і отримано критерії такої виразності (теореми 4.5.1, 4.5.2, 4.5.3).

4.5.2. Позначення і терміни

Нижче n буде позначати невід'ємне ціле число.

Будемо використовувати позначення $f : A \leadsto B$ для часткових функцій, а позначення $f : A \rightarrow B$ для тотальних функцій.

Будемо використовувати позначення $x \mapsto e(x)$, де e є деяким виразом, для функції, яка для кожного x приймає значення, визначене виразом $e(x)$.

Як і підрозділі 4.1 для будь-якої часткової функції $f : A \rightarrow B$ будемо використовувати позначення:

- $f(x) \downarrow$ – f є визначеною на x ;
- $f(x) \downarrow = y$ – f є визначеною на x і $f(x) = y$;
- $f(x) \uparrow$ – f не є визначеною на x .

Будемо позначати як $f_1(x_1) \cong f_2(x_2)$ сильну рівність: $f_1(x_1) \downarrow$ тоді і тільки тоді, коли $f_2(x_2) \downarrow$, і якщо $f_1(x_1) \downarrow$, то $f_1(x_1) = f_2(x_2)$.

Символи F, T будуть позначати хибне і істинне значення предикатів. Будемо вважати, що $Bool = \{F, T\}$. Символ $\perp$ буде позначати ніде не визначений частковий предикат.

Залежно від контексту, $|\cdot|$ буде позначати або потужність множини, або абсолютне значення (цілого) числа.

Будемо використовувати символ $\circ$ для позначення функціональної композиції: $(f \circ g)(x) \cong f(g(x))$.

Нехай D є непорожньою множиною, $n \geq 1$ і $P_1, \dots, P_n$ є частковими предикатами на D .

Будемо називати алгеброю часткових предикатів на D з предикатним доповненням і константами $P_1, \dots, P_n$ таку алгебру [95]:

$$APr_{P_1, \dots, P_n}(D) = (D \rightarrow \{T, F\}; \vee, \wedge, \neg, \sim, P_1, P_2, \dots, P_n),$$

де

1. $\vee, \wedge, \neg$ є операціями диз'юнкції, кон'юнкції і заперечення на часткових предикатах, що визначені відповідно до принципів сильної тризначної логіки Кліні [105]:

$$(P \vee Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) \downarrow = T \text{ або } Q(d) \downarrow = T; \\ F, & \text{якщо } P(d) \downarrow = F \text{ і } Q(d) \downarrow = F; \\ \text{не визначено,} & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P \wedge Q)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) \downarrow = T \text{ і } Q(d) \downarrow = T; \\ F, & \text{якщо } P(d) \downarrow = F \text{ і } Q(d) \downarrow = F; \\ \text{не визначено,} & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$(\neg P)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) \downarrow = F; \\ F, & \text{якщо } P(d) \downarrow = T; \\ \text{не визначено,} & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

2. $\sim$ є унарною операцією предикатного доповнення [95]:

$$(\sim P)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d) \uparrow; \\ \text{не визначено,} & \text{якщо } P(d) \downarrow. \end{cases}$$

Нехай V, W є непорожніми множинами, $n \geq 1$ і $Q_1, \dots, Q_n$ є частковими предикатами на множині $V \rightsquigarrow W$ (що є множиною всіх часткових функцій на V , що приймають значення у W). Елементи V будуть розглядатись як імена змінних, елементи W будуть розглядатись як значення, елементи $V \rightsquigarrow W$ будуть розглядатись як часткові призначення значень змінним.

Будемо позначати $QPr_W^V = (V \rightsquigarrow W) \rightsquigarrow \{T, F\}$. Елементи множини QPr_W^V будуть називатись частковими квазіарними предикатами [150, 95] над V і W . Для фіксованої скінченної множини V , де $|V| = n$, такі елементи можуть розглядатись як продовження часткових n -арних предикатів на W на випадки, коли деякі аргументи не є визначеними, з можливістю приймати визначене (істинне або хибне) значення у таких випадках, наприклад, якщо $Q \in QPr_W^V$, то $Q(d)$ може приймати істинне значення, коли d є ніде не визначеним на V (порожнє призначення значень змінним).

Будемо називати композицією екзистенціальної квантифікації [150, 95] $\exists v$ (з параметром $v \in V$) унарну операцію на QPr_W^V , таку, що для кожного $Q \in QPr_W^V$ виконується [150, 95]:

$$(\exists v(Q))(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Q(d \nabla^v a) \downarrow = T \text{ для деякого } a \in W; \\ F, & \text{якщо } Q(d \nabla^v a) \downarrow = F \text{ для всіх } a \in W; \\ \text{не визначено,} & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де $d\nabla^v a$ (локальне накладання) [150, 189, 95] позначає елемент множини $V \leadsto W$ з таким графіком:

$$\{(v, a)\} \cup \{((v', d(v')) \mid v' \in V \setminus \{v\}, d(v') \downarrow\}.$$

Слід зауважити, що якщо обмежитись тотальними предикатами і тотальними призначеннями значень змінним над фіксованою скінченною V , то $\exists v$ буде мати звичайний сенс квантора існування.

Будемо називати композицією універсальної квантифікації [150, 95] $\forall v$ (з параметром $v \in V$) унарну операцію на QPr_W^V , таку, що для кожного $Q \in QPr_W^V$ виконується [150, 95]:

$$(\forall v(Q))(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Q(d\nabla^v a) \downarrow = T \text{ для всіх } a \in W; \\ F, & \text{якщо } Q(d\nabla^v a) \downarrow = F \text{ для деякого } a \in W; \\ \text{не визначено,} & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Будемо називати композицією реномінації [150, 95] (перейменуванням змінних) $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}$ з параметрами $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n) \in V^n$ і $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$ (де $n \geq 1$), де $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ попарно різними, унарну операцію на QPr_W^V , таку, що для кожних $Q \in QPr_W^V$ і $d \in {}^V W$ виконується [150, 95]:

$$R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(Q)(d) \cong Q(r_{\bar{v}}^{\bar{u}}(d)),$$

де $r_{\bar{v}}^{\bar{u}}(d) = d \circ rn_{\bar{v}}^{\bar{u}}$, а $rn_{\bar{v}}^{\bar{u}} : V \rightarrow V$ позначає функцію з таким графіком:

$$\{(u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)\} \cup \{(u, u) \mid u \in V \setminus \{u_1, \dots, u_n\}\}.$$

Будемо називати алгеброю часткових предикатів першого порядку над множиною імен V і значень W з предикатним доповненням і константами $Q_1, \dots, Q_n$ таку алгебру [95]:

$$\begin{aligned} AQPr_{Q_1, \dots, Q_n}(V, W) = \\ = (QPr_W^V; \vee, \wedge, \neg, \sim, (R_{\bar{v}}^{\bar{u}})_{n' \geq 1, \bar{u} \in V^{n'}, \bar{v} \in V^{n'}}, (\exists v)_{v \in V}, (\forall v)_{v \in V}, Q_1, \dots, Q_n), \end{aligned}$$

де $\vee, \wedge, \neg, \sim$ визначені як вище для $D = V \leadsto W$, а $V^{n'}$ – це множина кортежів

$(v_1, \dots, v_{n'}) \in V^{n'}$, таких, що $v_i \neq v_j$ для всіх $i, j \in \{1, 2, \dots, n'\}$, таких, що $i \neq j$.

Будемо називати реномінативною алгеброю часткових предикатів з предикатним доповненням і константами $Q_1, \dots, Q_n$ таку алгебру [95]:

$$ARPr_{Q_1, \dots, Q_n}(V, W) = (QPr_W^V; \vee, \wedge, \neg, \sim, (R_{\bar{v}}^{\bar{u}})_{n' \geq 1, \bar{u} \in V_{\neq}^{n'}, \bar{v} \in V^{n'}, Q_1, \dots, Q_n).$$

Будемо казати, що ім'я змінної $v \in V$ є несуттєвим [150, 95] для квазіарного предиката $Q : (V \rightarrowtail W) \rightarrowtail Bool$, якщо $Q(d|_{V \setminus \{v\}}) \cong Q(d)$ для всіх $d \in V \rightarrowtail W$.

Позначимо $X = \{-1, 0, 1\}$. Також, позначимо як $F^{(n)}$ множину всіх функцій $f : X^n \rightarrow X$. Елементи $F^{(n)}$ будуть використовуватись для подання функцій тризначної логіки, де 1 відповідає істинному значенню, -1 відповідає хибному значенню, а 0 відповідає проміжному істиннісному значенню.

Позначимо $F = \bigcup_{n \geq 0} F^{(n)}$.

Будемо позначати як $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ кортеж елементів X ($x_i \in X$).

Будемо розглядати X^n як метричний простір з відстанню супремуму [177]:

$$\rho_n((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Будемо казати, що функція $f \in F^{(n)}$ коротка, якщо вона є коротким відображенням: для всіх $\bar{x}, \bar{y}$ виконується

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq \rho_n(\bar{x}, \bar{y}).$$

Будемо позначати як $M^{(n)}$ множину всіх коротких функцій в $F^{(n)}$.

Для будь-якої множини D і часткового предиката $P : D \rightarrowtail \{T, F\}$ будемо позначати як $\Phi(P)$ функцію з D в X , таку, що для всіх $d \in D$:

$$\Phi(P)(d) = \begin{cases} 1, & P(d) \downarrow = T, \\ 0, & P(d) \uparrow, \\ -1, & P(d) \downarrow = F. \end{cases}$$

Слід зауважити, що Φ є бієкцією між $D \rightarrowtail \{T, F\}$ і $D \rightarrow X$.

4.5.3. Головні результати підрозділу

Нехай D є фіксованою непорожньою множиною, $P_0, P_1, \dots, P_n : D \rightarrowtail \{T, F\}$ є частковими предикатами і $p_i = \Phi(P_i)$ для $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Позначимо $\|f\| = \sum_{\bar{x} \in X^n} |f(\bar{x})|$ для будь-якої функції $f \in F^{(n)}$ і розглянемо таку задачу оптимізації:

$$\|f\| \rightarrow \min \quad (4.6)$$

$$f(p_1(d), p_2(d), \dots, p_n(d)) = p_0(d) \text{ для всіх } d \in D. \quad (4.7)$$

Наведена нижче теорема надає умову виразності предикатів в алгебрі часткових предикатів з предикатним доповненням.

Теорема 4.5.1. *Нехай $n \geq 1$. Предикат P_0 є виразним в алгебрі $APr_{P_1, \dots, P_n}(D)$ тоді і тільки тоді, коли на множині $F^{(n)}$ задача (4.6)-(4.7) має оптимальний розв'язок, який є короткою функцією.*

Доведення цієї теореми наведене у пункті 4.5.5.

Для кожних $d, d' \in D$ позначимо:

$$\tilde{\rho}_{P_1, \dots, P_n}(d, d') = \rho_n((p_1(d), \dots, p_n(d)), (p_1(d'), \dots, p_n(d'))).$$

Будемо казати, що предикат P_0 є *коротким відносно* $P_1, \dots, P_n$, якщо для всіх $d, d' \in D$ виконується

$$|p_0(d) - p_0(d')| \leq \rho_{P_1, \dots, P_n}(d, d').$$

Теорема 4.5.2. *Нехай $n \geq 1$. Предикат P_0 є виразним в алгебрі $APr_{P_1, \dots, P_n}(D)$ тоді і тільки тоді, коли P_0 є коротким відносно $P_1, P_2, \dots, P_n$.*

Доведення цієї теореми наведене у пункті 4.5.6.

Нехай $V \neq \emptyset, W \neq \emptyset$ є фіксованими множинами.

Нехай $Q_0, Q_1, \dots, Q_n : (V \rightarrow W) \rightarrow \{T, F\}$ є частковими квазіарними предикатами і $q_i = \Phi(Q_i)$ для $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Якщо $k \geq 0$ і $m \in [0, 2^k - 1]$ є цілими числами, а $\bar{v} = (v_1, \dots, v_k) \in V^k$ (припускаємо V^0 складається з єдиного порожнього кортежу), позначимо як $\mathfrak{Q}_{m, \bar{v}}^k(P)$, де P є частковим предикатом, k -й елемент скінченної послідовності предикатів $T_j, j = 0, 1, \dots, k$, такої, що $T_0 = P$ і для всіх $j = 1, 2, \dots, k$:

$$T_{j+1} = \begin{cases} \exists v_j(T_j), & b_j = 0; \\ \forall v_j(T_j), & b_j = 1, \end{cases}$$

де (b_j) позначає j -ту цифру у двійковому поданні числа m (починаючи з найменш значущої цифри).

Наведена нижче теорема надає умову виразності предикатів в алгебрі часткових предикатів першого порядку з предикатним доповненням.

Теорема 4.5.3. *Нехай $n \geq 1$. Припустимо, що існує нескінченна множина $V' \subseteq V$, така, що кожне ім'я у V' є несуттєвим для кожного предиката в $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$. Тоді предикат Q_0 є виразним в алгебрі $AQPr_{Q_1, \dots, Q_n}(V, W)$ тоді і тільки тоді, коли існують*

- цілі числа $l \geq 1, k \geq 0, m \in [0, 2^k - 1]$,
- кортеж $\bar{v} \in V^k$,
- скінченні послідовності цілих чисел $k_j \geq 1$ і $n_j \in [1, n]$ для $j = 1, 2, \dots, l$,
- скінченні послідовності кортежів $\bar{u}_j \in V_{\neq}^{k_j}, \bar{v}_j \in V^{k_j}$ для $j = 1, 2, \dots, l$,
- частковий предикат P на $V \rightsquigarrow W$, що є коротким відносно $R_{\bar{v}_j}^{\bar{u}_j}(Q_{n_j})$ для $j = 1, 2, \dots, l$, і такий, що $Q_0 = \mathfrak{Q}_{m, \bar{v}}^k(P)$.

Доведення цієї теореми наведене у пункті 4.5.7.

4.5.4. Предикатне доповнення у перед- і після-умовах

Слід зауважити, що часткові предикати, виражені в алгебрі предикатів з предикатним доповненням також можуть бути використані у якості семантики перед- і після-умов при доведенні властивостей програм за допомогою варіанту логіки Хоара [55, 146, 116, 148].

Нехай D, D' є множинами. Будемо називати семантичною слабкою трійкою Хоара [55, 146, 116, 148] (будь-яку) трійку (p, f, q) , де $f : D \rightsquigarrow D', p : D \rightsquigarrow Bool, q : D' \rightsquigarrow Bool$ є такими, що для кожного $d \in D$, якщо $p(d) \downarrow = T$, $f(d) \downarrow$ і $q(f(d)) \downarrow$, то $q(f(d)) = T$.

Будемо використовувати таке позначення:

- $\{p\}f\{q\}$ позначає, що (p, f, q) є семантичною слабкою трійкою Хоара.

Як у пункті 4.4.2, будемо використовувати позначення $\bullet$ і WH для таких композицій [150, 189]:

- якщо $f, g : D \rightsquigarrow D$, то $f \bullet g$ є такою частковою функцією з D в D , що $(f \bullet g)(d) \cong g(f(d))$ для всіх $d \in D$;
- якщо $f : D \rightsquigarrow D$ і $p : D \rightsquigarrow Bool$, то $WH(p, f)$ є частковою функцією з D в D , такою, що для кожного $d \in D$:
 $WH(p, f)(d) \downarrow = f^{(n)}(d)$, якщо існує число $n \geq 0$, таке, що $p(f^{(i)}(d)) \downarrow = T$ для

всіх $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ і $p(f^{(n)}(d)) \downarrow = F$, де $f^{(n)}(d) \cong f(\dots(f(d))\dots)$, де символ f зустрічається n разів у підвиразі справа від $\cong$, причому $f^{(0)}(d) \downarrow = d$, $WH(p, f)(d) \uparrow$ в іншому випадку.

Теорема 4.5.4. Припустимо, що $\{p\}f\{q\}$, $\{q\}g\{r_1\}$ і $\{\sim q\}g\{r_2\}$.

Тоді $\{p\}f \bullet g\{r_1 \vee r_2\}$.

Доведення. Нехай $d \in D$.

Припустимо, що $p(d) \downarrow = T$, $(f \bullet g)(d) \downarrow$ та $(r_1 \vee r_2)((f \bullet g)(d)) \downarrow$. Тоді $f(d) \downarrow$ і $g(f(d)) \downarrow$. Позначимо $d' = f(d)$ і $d'' = (f \bullet g)(d) = g(f(d))$.

Доведемо, що $(r_1 \vee r_2)(d'') = T$.

Припустимо, що $(r_1 \vee r_2)(d'') \downarrow = F$. Тоді $r_1(d'') \downarrow = F$ і $r_2(d'') \downarrow = F$.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1: $q(d') \downarrow$. Тоді $q(f(d)) \downarrow$, і оскільки $p(d) \downarrow = T$ і $\{p\}f\{q\}$, то $q(f(d)) = q(d') = T$. Тоді оскільки $r_1(g(d')) \cong r_1(d'') \downarrow$ і $\{q\}g\{r_1\}$, маємо $r_1(g(d')) = r_1(d'') = T$, але це суперечить тому факту, що $r_1(d'') = F$. Отже, даний випадок не є можливим.

Випадок 2: $q(d') \uparrow$. Тоді $(\sim q)(d') \downarrow = T$. Тоді оскільки $r_2(g(d')) \cong r_2(d'') \downarrow$ і $\{\sim q\}g\{r_2\}$, маємо $r_2(g(d')) = r_2(d'') = T$, але це суперечить тому факту, що $r_2(d'') = F$. Отже, даний випадок не є можливим.

В обох випадках маємо суперечність, тому припущення $(r_1 \vee r_2)(d'') \downarrow = F$ є хибним. Слід зауважити, що $(r_1 \vee r_2)(d'') \cong (r_1 \vee r_2)((f \bullet g)(d)) \downarrow$, тому $(r_1 \vee r_2)(d'') = T$. $\square$

Зауваження 4.5.1. Теорема 4.5.4 може використовуватись як обґрунтування такого правила [92, 93] для послідовної композиції для логіки Флойда-Хоара з частковими перед- і після-умовами [148, 116]:

$$\frac{\{p\} f \{q\}, \{q\} g \{r_1\}, \{\sim q\} g \{r_2\}}{\{p\} f \bullet g \{r_1 \vee r_2\}}$$

У випадку, коли r_1 і r_2 збігаються, це правило може бути переформульовано [92, 93] як:

$$\frac{\{p\} f \{q\}, \{q\} g \{r\}, \{\sim q\} g \{r\}}{\{p\} f \bullet g \{r\}}$$

Теорема 4.5.5. Припустимо, що виконується $\{r \wedge p\}f\{p\}$ і $\{r \wedge (\sim p)\}f\{p\}$.

Тоді $\{p\}WH(r, f)\{\neg r \wedge p\}$.

Доведення. Нехай $d \in D$. Припустимо, що $p(d) \downarrow = T$, $WH(r, f)(d) \downarrow = d'$ і $(\neg r \wedge p)(WH(r, f)(d)) \downarrow$.

Доведемо, що $(\neg r \wedge p)(WH(r, f)(d)) = (\neg r \wedge p)(d') = T$.

З визначення WH випливає, що існує ціле число $n \geq 0$, таке, що $r(f^{(i)}(d)) \downarrow = T$ для всіх $i = 0, 1, \dots, n-1$, $r(f^{(n)}(d)) \downarrow = F$ і

$$d' = WH(r, f)(d) = f^{(n)}(d).$$

Якщо $n = 0$, то $d' = d$, тому $r(d') \downarrow = F$ і $p(d') \downarrow = T$, звідки $(\neg r \wedge p)(d') = T$.

Припустимо, що $n \geq 1$. Доведемо за індукцією за $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, що якщо $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, то $p(f^{(i)}(d)) \downarrow = T$ або $p(f^{(i)}(d)) \uparrow$.

База індукції. Оскільки $p(f^{(0)}(d)) \cong p(d) \downarrow = T$, то база індукції виконується.

Індуктивний перехід. Припустимо, що $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Припустимо, що $p(f^{(i)}(d)) \downarrow = T$ або $p(f^{(i)}(d)) \uparrow$. Припустимо, що $i+1 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Слід зауважити, що $r(f^{(i)}(d)) \downarrow = T$, оскільки $i < n$. Позначимо $d_1 = f^{(i)}(d)$. Розглянемо два випадки.

Випадок 1: $p(f^{(i)}(d)) \downarrow = T$. Тоді оскільки $r(d_1) \downarrow = T$ і $p(d_1) \downarrow = T$, маємо $(r \wedge p)(d_1) \downarrow = T$. Якщо $p(f(d_1)) \downarrow$, то оскільки $\{r \wedge p\}f\{p\}$, маємо $p(f^{(i+1)}(d)) \cong p(f(d_1)) \downarrow = T$. В іншому випадку, $p(f(d_1)) \uparrow$. Тому виконується або $p(f^{(i+1)}(d)) \downarrow = T$, або $p(f^{(i+1)}(d)) \uparrow$.

Випадок 2: $p(f^{(i)}(d)) \uparrow$. Тоді $p(d_1) \uparrow$ і $r(d_1) \downarrow = T$. Тоді $(\sim p)(d_1) \downarrow = T$, тому $(r \wedge (\sim p))(d_1) \downarrow = T$. Тоді оскільки $\{r \wedge (\sim p)\}f\{p\}$, маємо, що або $p(f^{(i+1)}(d)) \cong p(f(d_1)) \downarrow = T$, або $p(f^{(i+1)}(d)) \cong p(f(d_1)) \uparrow$.

В обох випадках, $p(f^{(i+1)}(d)) \downarrow = T$ або $p(f^{(i+1)}(d)) \uparrow$, тому індуктивний перехід завершено.

Оскільки $n \geq 1$ за припущенням, з доведеного твердження випливає, що або $p(f^{(n-1)}(d)) \downarrow = T$, або $p(f^{(n-1)}(d)) \uparrow$. Маємо

$$(\neg r \wedge p)(f^{(n)}(d)) \cong (\neg r \wedge p)(WH(r, f)(d)) \downarrow.$$

Крім того, $r(f^{(n)}(d)) \downarrow = F$, тому $(\neg r)(f^{(n)}(d)) \downarrow = T$, звідки $p(f^{(n)}(d)) \downarrow$.

Розглянемо випадок, коли $p(f^{(n-1)}(d)) \downarrow = T$. Маємо $r(f^{(n-1)}(d)) \downarrow = T$, тому $(r \wedge p)(f^{(n-1)}(d)) \downarrow = T$. Тоді оскільки $\{r \wedge p\}f\{p\}$ і $p(f(f^{(n-1)}(d))) \cong p(f^{(n)}(d)) \downarrow$, то $p(f^{(n)}(d)) = T$.

Розглянемо випадок, коли $p(f^{(n-1)}(d)) \uparrow$. Тоді оскільки $f^{(n-1)}(d) \downarrow$, маємо

$(\sim p)(f^{(n-1)}(d)) \downarrow = T$. Крім того, $r(f^{(n-1)}(d)) \downarrow = T$, звідки

$$(r \wedge (\sim p))(f^{(n-1)}(d)) \downarrow = T.$$

Тоді оскільки $\{r \wedge (\sim p)\}f\{p\}$ і $p(f(f^{(n-1)}(d))) \cong p(f^{(n)}(d)) \downarrow$, то виконується $p(f^{(n)}(d)) = T$.

В будь-якому випадку виконується $p(f^{(n)}(d)) = T$. Оскільки $r(f^{(n)}(d)) \downarrow = F$, то маємо

$$(\neg r \wedge p)(WH(r, f)(d)) \cong (\neg r \wedge p)(f^{(n)}(d)) \downarrow = T.$$

□

Зауваження 4.5.2. Теорема 4.5.5 може використовуватись як обґрунтування такого правила для циклу [92, 93] для логіки Флойда-Хоара з частковими перед- і після-умовами [148, 116]:

$$\frac{\{r \wedge p\} f \{p\}, \{r \wedge (\sim p)\} f \{p\}}{\{p\} WH(r, f) \{\neg r \wedge p\}}$$

4.5.5. Доведення теореми 4.5.1

Щоб довести теорему 4.5.1, спочатку сформулюємо і доведемо ряд допоміжних лем. Введемо такі позначення для всіх $x, y \in X$:

$$\neg x = -x$$

$$\sim x = 1 - |x|$$

$$x^{[y]} = \begin{cases} x, & y = 1; \\ \sim x, & y = 0; \\ \neg x, & y = -1. \end{cases}$$

Лема 4.5.1. $\rho_n(\bar{x}, \bar{y}) = 1 - \min_{i=1}^n x_i^{[y_i]}$ для кожних $n \geq 1$ і $\bar{x}, \bar{y} \in X^n$.

Доведення. Слід зауважити, що для всіх $x, y \in X$ виконується

$$x^{[y]} = 1 - |x - y|.$$

Тоді $\rho_n(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{i=1}^n |x_i - y_i| = \max_{i=1}^n (1 - x_i^{[y_i]}) = 1 - \min_{i=1}^n x_i^{[y_i]}$.

□

Розглянемо X як ґратку з операціями $\vee, \wedge$, де:

$$x \vee y = \max(x, y);$$

$$x \wedge y = \min(x, y).$$

Нижче буде припускатись, що у виразах, що включають символи операцій над X , операція $x^{[y]}$ має найвищий пріоритет, за якою йдуть (за пріоритетом) унарні операції $\neg, \sim$, за якими йдуть бінарні операції $\wedge$ і $\vee$. Серед $\wedge, \vee$, операція $\wedge$ має вищий пріоритет.

Лема 4.5.2. Для кожної короткої функції $f \in F^{(n)}$ і для кожного $\bar{x} \in X^n$ виконується рівність

$$f(\bar{x}) = \hat{f}(\bar{x}) \wedge f_{\neq 0}(\bar{x}) \vee \neg f_{\neq 0}(\bar{x}),$$

де використовуються такі позначення:

$$\hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} \bigvee_{\bar{y}: f(\bar{y})=1} \bigwedge_{i=1}^n x_i^{[y_i]}, & \exists \bar{y} f(\bar{y}) = 1; \\ -1, & \neg(\exists \bar{y} f(\bar{y}) = 1); \end{cases}$$

$$f_{\neq 0}(\bar{x}) = \begin{cases} \bigvee_{\bar{y}: f(\bar{y}) \neq 0} \bigwedge_{i=1}^n \sim (x_i^{[y_i]} \wedge \sim x_i^{[y_i]}) \wedge \sim \sim x_i^{[y_i]}, & \exists \bar{y} f(\bar{y}) \neq 0; \\ 0, & \neg(\exists \bar{y} f(\bar{y}) \neq 0). \end{cases}$$

Доведення. Для всіх $x, y \in X$ виконується рівність:

$$\sim (x^{[y]} \wedge \sim x^{[y]}) \wedge \sim \sim x^{[y]} = \begin{cases} 1, & x = y; \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

Тоді виконується рівність:

$$f_{\neq 0}(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & f(\bar{x}) \neq 0; \\ 0, & f(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

Згідно леми 4.5.1, виконується рівність

$$\hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} \bigvee_{\bar{y}: f(\bar{y})=1} (1 - \rho_n(\bar{x}, \bar{y})), & \exists \bar{y} f(\bar{y}) = 1; \\ -1, & \neg(\exists \bar{y} f(\bar{y}) = 1). \end{cases}$$

Якщо $f(\bar{x}) = 1$, то $\hat{f}(\bar{x}) = 1$ і $f_{\neq 0}(\bar{x}) = 1$, тому $\hat{f}(\bar{x}) \wedge f_{\neq 0}(\bar{x}) \vee \neg f_{\neq 0}(\bar{x}) = 1$.

Якщо $f(\bar{x}) = 0$, то $f_{\neq 0}(\bar{x}) = 0$, тому

$$\hat{f}(\bar{x}) \wedge f_{\neq 0}(\bar{x}) \vee \neg f_{\neq 0}(\bar{x}) = (\hat{f}(\bar{x}) \wedge 0) \vee 0 = 0.$$

Якщо $f(\bar{x}) = -1$, то для кожного $\bar{y}$, такого, що $f(\bar{y}) = 1$, виконується $\rho_n(\bar{x}, \bar{y}) \geq |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| = 2$, з чого випливає, що $1 - \rho_n(\bar{x}, \bar{y}) = -1$. Тоді $\hat{f}(\bar{x}) = -1$ і $f_{\neq 0}(\bar{x}) = 1$, тому $\hat{f}(\bar{x}) \wedge f_{\neq 0}(\bar{x}) \vee \neg f_{\neq 0}(\bar{x}) = -1$.

Таким чином,

$$f(\bar{x}) = \hat{f}(\bar{x}) \wedge f_{\neq 0}(\bar{x}) \vee \neg f_{\neq 0}(\bar{x}).$$

□

Лема 4.5.3. Множина всіх коротких функцій з F є функціональним замиканням множини $\{f_U, f_{\neg}, f_{\sim}, f_{\vee}, f_{\wedge}\}$ (тобто кожна коротка функція з F може бути виражена як композиція елементів $\{f_U, f_{\neg}, f_{\sim}, f_{\vee}, f_{\wedge}\}$ і проєкцій $\pi_k^n(x_1, \dots, x_n) = x_k$, $n \geq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$), де $f_U \in F^{(0)}$, $f_{\neg}, f_{\sim} \in F^{(1)}$, $f_{\vee}, f_{\wedge} \in F^{(2)}$, $f_U = 0$, $f_{\neg}(x) = -x$, $f_{\sim}(x) = 1 - |x|$, $f_{\vee}(x, y) = \max(x, y)$, $f_{\wedge}(x, y) = \min(x, y)$.

Доведення. Позначимо як S множину всіх коротких функцій з F . Відповідно до визначення, коротка функція з F може бути альтернативно охарактеризована як функція $X^n \rightarrow X$ ($n \geq 0$), що не змінює знак на кожній з множин $\prod_{i=1}^n \{0, a_i\}$, де $a_1, \dots, a_n \in \{-1, 1\}^n$. Тоді $\{f_U, f_{\neg}, f_{\sim}, f_{\vee}, f_{\wedge}\} \subseteq S$. З іншого боку, оскільки константна функція зі значенням -1 може бути виражена як $f_{\neg} \circ f_{\sim} \circ f_U$, з леми 4.5.2 і визначення $x^{[y]}$ випливає, що кожна $f \in S$ може бути виражена як композиція елементів $\{f_U, f_{\neg}, f_{\sim}, f_{\vee}, f_{\wedge}\}$ і проєкцій $\pi_k^n(x_1, \dots, x_n) = x_k$ ($n \geq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$). Таким чином, S є функціональним замиканням $\{f_U, f_{\neg}, f_{\sim}, f_{\vee}, f_{\wedge}\}$. □

Лема 4.5.4. Множина всіх коротких функцій з F є функціональним замиканням множини $\{f_T, f_F, f_U, f_{\neg}, f_{\wedge}, f_{\sim}\}$, де $f_F, f_U, f_T \in F^{(0)}$, $f_{\neg}, f_{\sim} \in F^{(1)}$, $f_{\wedge} \in F^{(2)}$, $f_F = -1$, $f_U = 0$, $f_T = 1$, $f_{\neg}(x) = -x$, $f_{\sim}(x) = 1 - |x|$, $f_{\wedge}(x, y) = \min(x, y)$.

Доведення. З рівностей $f_{\sim}(0) = 1$, $f_{\neg}(f_{\sim}(0)) = -1$ випливає, що множина $\{f_T, f_F, f_U, f_{\neg}, f_{\wedge}, f_{\sim}\}$ має те саме функціональне замикання, що і множина $\{f_U, f_{\neg}, f_{\sim}, f_{\vee}, f_{\wedge}\}$ (де $f_{\vee}(x, y) = \max(x, y)$), тому це функціональне замикання є множиною всіх коротких функцій з F за лемою 4.5.3. $\square$

Лема 4.5.5. Для кожних $P, Q : D \rightarrow \{T, F\}$ і $d \in D$ виконуються рівності:

1. $\Phi(\perp)(d) = 0$;
2. $\Phi(\neg P)(d) = -(\Phi(P)(d))$;
3. $\Phi(\sim P)(d) = 1 - |\Phi(P)(d)|$;
4. $\Phi(P \vee Q)(d) = \max(\Phi(P)(d), \Phi(Q)(d))$;
5. $\Phi(P \wedge Q)(d) = \min(\Phi(P)(d), \Phi(Q)(d))$.

Доведення. Випливає безпосередньо з визначення Φ і операцій $\neg, \sim, \vee, \wedge$ на часткових предикатах. $\square$

Лема 4.5.6. Якщо задача (4.6)-(4.7) має оптимальний розв'язок на $F^{(n)}$, то цей розв'язок єдиний.

Доведення. Припустимо, що задача (4.6)-(4.7) має оптимальні розв'язки $f, g \in F^{(n)}$. Тоді $\|f\| = \|g\|$ і виконується рівність

$$f(p_1(d), \dots, p_n(d)) = p_0(d) = g(p_1(d), \dots, p_n(d))$$

для всіх $d \in D$.

Припустимо, що $f \neq g$. Тоді існує кортеж $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in X^n$, такий, що $f(\bar{x}^*) \neq g(\bar{x}^*)$. Розглянемо два випадки.

1. Розглянемо випадок, коли $f(\bar{x}^*) \neq 0$. Визначимо функцію $h \in F^{(n)}$, таку, що $h(\bar{x}) = f(\bar{x})$, якщо $\bar{x} \neq \bar{x}^*$, і $h(\bar{x}) = 0$, якщо $\bar{x} = \bar{x}^*$. Тоді для всіх $d \in D$ виконується $(p_1(d), \dots, p_n(d)) \neq \bar{x}^*$, тому $h(p_1(d), \dots, p_n(d)) = p_0(d)$. Крім того, $\|h\| = \|f\| - |f(\bar{x}^*)| = \|f\| - 1 < \|f\|$, що суперечить припущенню про те, що f є оптимальним розв'язком задачі (4.6)-(4.7). Отже, цей випадок не є можливим.

2. Розглянемо випадок, коли $f(\bar{x}^*) = 0$. Тоді $|g(\bar{x}^*)| = 1$. Визначимо функцію $h \in F^{(n)}$, таку, що $h(\bar{x}) = g(\bar{x})$, якщо $\bar{x} \neq \bar{x}^*$, і $h(\bar{x}) = 0$, якщо $\bar{x} = \bar{x}^*$. Тоді для всіх $d \in D$ виконується $(p_1(d), \dots, p_n(d)) \neq \bar{x}^*$, тому $h(p_1(d), \dots, p_n(d)) = p_0(d)$. Крім того, $\|h\| = \|g\| - |g(\bar{x}^*)| = \|g\| - 1 < \|g\|$, що суперечить припущенню про те, що g є оптимальним розв'язком задачі (4.6)-(4.7). Отже, цей випадок не є можливим.

Таким чином, $f = g$. Отже, якщо задача (4.6)-(4.7) має оптимальний розв'язок на $F^{(n)}$, то цей розв'язок єдиний. $\square$

Лема 4.5.7. Нехай $f \in M^{(n)}$, $g \in F^{(n)}$ і $g(\bar{x}) \in \{f(\bar{x}), 0\}$ для кожного $\bar{x} \in X^n$. Тоді $g \in M^{(n)}$.

Доведення. Нехай $\bar{x}, \bar{y} \in X^n$. Розглянемо такі 4 випадки.

Випадок 1: $g(\bar{x}) = f(\bar{x})$ і $g(\bar{y}) = f(\bar{y})$. Тоді

$$|g(\bar{x}) - g(\bar{y})| = |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq \rho(\bar{x}, \bar{y}).$$

Випадок 2: $g(\bar{x}) = f(\bar{x})$ і $g(\bar{y}) = 0$. Тоді $|g(\bar{x}) - g(\bar{y})| = |f(\bar{x})| \leq \rho(\bar{x}, \bar{y})$, якщо $\bar{x} \neq \bar{y}$, і $|g(\bar{x}) - g(\bar{y})| = 0 \leq \rho(\bar{x}, \bar{y})$, якщо $\bar{x} = \bar{y}$.

Випадок 3: $g(\bar{x}) = 0$ і $g(\bar{y}) = f(\bar{y})$. Тоді $|g(\bar{x}) - g(\bar{y})| = |f(\bar{y})| \leq \rho(\bar{x}, \bar{y})$, якщо $\bar{x} \neq \bar{y}$, і $|g(\bar{x}) - g(\bar{y})| = 0 \leq \rho(\bar{x}, \bar{y})$, якщо $\bar{x} = \bar{y}$.

Випадок 4: $g(\bar{x}) = 0$ і $g(\bar{y}) = 0$. Тоді $|g(\bar{x}) - g(\bar{y})| \leq \rho(\bar{x}, \bar{y})$.

Таким чином, $g \in M^{(n)}$. □

Лема 4.5.8. Задача (4.6)-(4.7) має оптимальний розв'язок на $M^{(n)}$ тоді і тільки тоді, коли вона має оптимальний розв'язок на $F^{(n)}$, який належить $M^{(n)}$.

Доведення. Спочатку припустимо, що задача (4.6)-(4.7) має оптимальний розв'язок $f \in F^{(n)}$, що належить $M^{(n)}$. Тоді $f(p_1(d), p_2(d), \dots, p_n(d)) = p_0(d)$ для всіх $d \in D$. Крім того, для кожної функції $g \in M^{(n)}$, такої, що $g(p_1(d), p_2(d), \dots, p_n(d)) = p_0(d)$ для всіх $d \in D$, виконується $g \in F^{(n)}$, тому $\|f\| \leq \|g\|$. Таким чином, f є оптимальним розв'язком задачі (4.6)-(4.7) на $M^{(n)}$.

Припустимо, що задача (4.6)-(4.7) має оптимальний розв'язок f на $M^{(n)}$. Тоді $f(p_1(d), p_2(d), \dots, p_n(d)) = p_0(d)$ для всіх $d \in D$. Тоді оскільки множина $F^{(n)}$ є скінченною, задача (4.6)-(4.7) має оптимальний розв'язок на $F^{(n)}$. Згідно леми 4.5.6, задача (4.6)-(4.7) має єдиний оптимальний розв'язок на $F^{(n)}$. Позначимо його як g . Тоді $g(p_1(d), p_2(d), \dots, p_n(d)) = p_0(d)$ для всіх $d \in D$ і $\|g\| \leq \|f\|$. Визначимо функцію $h \in F^{(n)}$, таку, що для кожного $\bar{x} \in X^n$, $h(\bar{x}) = f(\bar{x})$, якщо $g(\bar{x}) \neq 0$, і $h(\bar{x}) = g(\bar{x})$, якщо $g(\bar{x}) = 0$. Тоді для всіх $d \in D$ виконується $h(p_1(d), \dots, p_n(d)) = p_0(d)$. Крім того, $h \in M^{(n)}$ за лемою 4.5.7. Тоді $\|h\| = \|f\|$, тому для кожного $\bar{x}$, такого, що $g(\bar{x}) = 0$ виконується $f(\bar{x}) = 0$. Тоді $\|f\| \leq \|g\|$. Оскільки $\|g\| \leq \|f\|$, як було зазначено вище, маємо $\|f\| = \|g\|$. Тоді f є оптимальним розв'язком задачі (4.6)-(4.7) на $F^{(n)}$ і f належить $M^{(n)}$. □

Тепер наведемо доведення теореми 4.5.1.

Доведення теореми 4.5.1.

Припустимо, що задача (4.6)-(4.7) має оптимальний розв'язок на множині $F^{(n)}$, який є короткою функцією. Позначимо такий розв'язок як f . Тоді маємо

$$p_0(d) = f(p_1(d), p_2(d), \dots, p_n(d))$$

для всіх $d \in D$. Згідно лемі 4.5.3, f належить до функціонального замикання множини $\{f_U, f_{\neg}, f_{\sim}, f_{\vee}, f_{\wedge}\}$, де функції f визначені як у лемі 4.5.3. З лемі 4.5.5 випливає, що умова $p_0(d) = \Phi(P)(d)$ для всіх $d \in D$ виконується для деякого предиката $P : D \rightarrow \{T, F\}$, виразного в алгебрі

$$(D \rightarrow \{T, F\}; \vee, \wedge, \neg, \sim, \perp, P_1, P_2, \dots, P_n).$$

Оскільки $n \geq 1$ і предикат $\perp$ може бути виражений як $\sim P_1 \wedge \sim \sim P_1$, можемо зробити висновок, що предикат P є виразним в алгебрі $APr_{P_1, \dots, P_n}(D)$. Тоді $\Phi(P_0)(d) = \Phi(P)(d)$ для всіх $d \in D$. Тоді з визначення Φ випливає, що $P_0 = P$, тому предикат P_0 є виразним у $APr_{P_1, \dots, P_n}(D)$.

Тепер припустимо, що предикат P_0 є виразним в алгебрі $APr_{P_1, \dots, P_n}(D)$. Тоді з лемі 4.5.5 випливає, що умова

$$\Phi(P_0)(d) = f(\Phi(P_1)(d), \Phi(P_2)(d), \dots, \Phi(P_n)(d))$$

для всіх $d \in D$ виконується для деякої функції $f \in F^{(n)}$, що належить до функціонального замикання множини $\{f_U, f_{\neg}, f_{\sim}, f_{\vee}, f_{\wedge}\}$, де функції f визначені як у лемі 4.5.3. Тоді за лемою 4.5.3, f є короткою функцією і

$$p_0(d) = f(p_1(d), \dots, p_n(d))$$

для всіх $d \in D$. Тоді оскільки $M^{(n)} \subseteq F^{(n)}$ і $F^{(n)}$ є скінченною множиною, задача (4.6)-(4.7) має оптимальний розв'язок на множині $M^{(n)}$. Тоді з лемі 4.5.8 випливає, що задача (4.6)-(4.7) має оптимальний розв'язок на $F^{(n)}$, який є короткою функцією. $\square$

Додатково слід зауважити, що задача (4.6)-(4.7) має таку властивість.

Твердження 4.5.1. *Якщо задача (4.6)-(4.7) має оптимальний розв'язок на $M^{(n)}$, то цей розв'язок єдиний.*

Доведення. Припустимо, що f, g є оптимальними розв'язками задачі (4.6)-(4.7) на $M^{(n)}$. Тоді за лемою 4.5.8, задача (4.6)-(4.7) має оптимальний розв'язок на $F^{(n)}$, що належить $M^{(n)}$. Згідно леми 4.5.6 цей розв'язок єдиний. Позначимо його як h . Тоді $\|h\| \leq \|f\|$ і $\|h\| \leq \|g\|$. Тоді h є оптимальним розв'язком задачі (4.6)-(4.7) на $M^{(n)}$ і $\|h\| = \|f\| = \|g\|$. Тоді f, g є оптимальними розв'язками задачі (4.6)-(4.7) на $F^{(n)}$. Тоді за лемою 4.5.6, $f = g$. $\square$

Також, потужність множини $M^{(n)}$ може бути оцінена таким чином.

Твердження 4.5.2. $|M^{(n)}| = 2^{3^n + O(2^n)}$

Доведення. Оскільки X^n має 2^{3^n} підмножин, достатньо довести, що для будь-якого $n \geq 1$ і підмножини $Z \subseteq X^n$, кількість різних функцій з $M^{(n)}$, які мають множину нулів Z належить множині $\{1, 2, 3, \dots, 2^{2^n}\}$.

Нехай $n \geq 1$ і $Z \subseteq X^n$. Позначимо $M_Z^{(n)} = \{f \in M^{(n)} \mid f^{-1}(\{0\}) = Z\}$.

Нехай $f_Z \in F^{(n)}$ є функцією, такою, що $f_Z(\bar{x}) = 1$ для $\bar{x} \in X^n \setminus Z$ і $f_Z(\bar{x}) = 0$ для $\bar{x} \in Z$. Тоді для кожних $\bar{x}, \bar{y} \in X^n$, таких, що $\bar{x} \neq \bar{y}$, маємо

$$|f_Z(\bar{x}) - f_Z(\bar{y})| \leq 1 \leq \rho_n(\bar{x}, \bar{y}).$$

З цього факту і з визначення f_Z випливає, що $f_Z \in M_Z^{(n)}$. Тоді $|M_Z^{(n)}| \geq 1$.

Якщо $Z = X^n$, то $|M_Z^{(n)}| = 1 \in \{1, 2, \dots, 2^{2^n}\}$.

Припустимо, що $Z \neq X^n$. Нехай $G = (X^n, E)$ є графом одиничних відстаней метричного простору (X^n, ρ_n) , тобто вершини $\bar{x}, \bar{y} \in X^n$ з'єднані ребром у E тоді і тільки тоді, коли $\rho_n(\bar{x}, \bar{y}) = 1$, і нехай G_Z є підграфом, породженим у G множиною вершин $X^n \setminus Z \neq \emptyset$. Для кожних $\bar{x}, \bar{y} \in X^n \setminus Z$, таких, що $\rho_n(\bar{x}, \bar{y}) = 1$, маємо $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq 1$, $f(\bar{x}) \neq 0$ і $f(\bar{y}) \neq 0$, звідки $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$. Тоді f є константною на множині вершин кожної компоненти зв'язності G_Z .

Позначимо як C_Z множину компонент зв'язності G_Z . Зафіксуємо функцію вибору $c : C_Z \rightarrow X^n$, що вибирає вершину з кожного елементу C_Z . Тоді для кожних $f_1, f_2 \in M_Z^{(n)}$ з умови $f_1 \circ c = f_2 \circ c$ випливає, що $f_1|_{X^n \setminus Z} = f_2|_{X^n \setminus Z}$ і $f_1|_Z = f_2|_Z$, звідки $f_1 = f_2$. Тоді відображення $f \mapsto f \circ c$ є ін'єктивним на $M_Z^{(n)}$ і приймає значення у $\{-1, 1\}^{C_Z}$. Тоді $|M_Z^{(n)}| \leq |\{-1, 1\}^{C_Z}| = 2^{|C_Z|}$.

Позначимо як $c(C_Z)$ образ C_Z при відображенні c . Маємо $|C_Z| = |c(C_Z)|$, оскільки множини вершин компонент зв'язності попарно не перетинаються і c є ін'єктивною. Крім того, $c(C_Z)$ є множиною взаємно рівновіддалених точок у

метричному просторі (X^n, ρ_n) , оскільки різні елементи $\bar{x}, \bar{y} \in c(C_Z)$ належать до різних компонент зв'язності G_Z і не з'єднані ребром у E , з чого випливає, що $\rho_n(\bar{x}, \bar{y}) = 2$.

Відомо [160], що для будь-якого $n \geq 1$, еквілатеральна розмірність (максимальна потужність підмножини метричного простору, такої, що будь-які дві її різні точки знаходяться на одній і тій же відстані [160]) метричного простору (X^n, ρ_n) рівна 2^n . Тоді $|c(C_Z)| \leq 2^n$. Тому $|M_Z^{(n)}| \leq 2^{|C_Z|} \leq 2^{2^n}$.

Таким чином, кількість різних функцій з $M^{(n)}$ які мають множину нулів Z належить $\{1, 2, 3, \dots, 2^{2^n}\}$. Тоді можна зробити висновок, що $|M^{(n)}| = 2^{3^n + O(2^n)}$. $\square$

4.5.6. Доведення теореми 4.5.2

Доведення теореми 4.5.2. Спочатку припустимо, що предикат P_0 є коротким відносно $P_1, P_2, \dots, P_n$ і доведемо, що P_0 є виразним в алгебрі $APr_{P_1, \dots, P_n}(D)$. Оскільки P_0 є коротким відносно $P_1, P_2, \dots, P_n$, то для всіх $d, d' \in D$ виконується

$$|p_0(d) - p_0(d')| \leq \tilde{\rho}_{P_1, \dots, P_n}(d, d') = \rho_n((p_1(d), \dots, p_n(d)), (p_1(d'), \dots, p_n(d'))).$$

Для кожного $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X$ позначимо

$$F(\bar{x}) = \{p_0(d) \mid d \in D \wedge \bigwedge_{i=1}^n (p_i(d) = x_i)\}.$$

Нехай $f : X^n \rightarrow X$ є функцією, такою, що $f(\bar{x}) \in F(\bar{x})$, якщо $F(\bar{x}) \neq \emptyset$, і $f(\bar{x}) = 0$, якщо $F(\bar{x}) = \emptyset$. Тоді оскільки P_0 є коротким відносно $P_1, P_2, \dots, P_n$, то для всіх $\bar{x}$ з умови $F(\bar{x}) \neq \emptyset$ випливає, що $F(\bar{x})$ є одноелементною множиною. Тоді $f(p_1(d), p_2(d), \dots, p_n(d)) = p_0(d)$ для всіх $d \in D$.

Нехай $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in X^n$. Припустимо, що $\bar{x} \neq \bar{y}$. Якщо $F(\bar{x}) = \emptyset$ або $F(\bar{y}) = \emptyset$, то $f(\bar{x}) = 0$ або $f(\bar{y}) = 0$, звідки

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq 1 \leq \rho_n(\bar{x}, \bar{y}).$$

Інакше, $F(\bar{x}) \neq \emptyset$ і $F(\bar{y}) \neq \emptyset$, тому $f(\bar{x}) = p_0(d_x)$ і $f(\bar{y}) = p_0(d_y)$ для деяких $d_x, d_y \in D$, таких, що $p_i(d_x) = x_i$ і $p_i(d_y) = y_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Тоді

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| = |p_0(d_x) - p_0(d_y)| \leq \rho_n(\bar{x}, \bar{y}).$$

Отже, $f \in M^{(n)}$.

Нехай $g \in F^{(n)}$ є функцією, такою, що

$$g(p_1(d), \dots, p_n(d)) = p_0(d)$$

для всіх $d \in D$. Тоді для всіх $\bar{x}$ з умови $F(\bar{x}) \neq \emptyset$ випливає, що $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$. Тоді $\|f\| \leq \|g\|$, оскільки $f(\bar{x}) = 0$, якщо $F(\bar{x}) = \emptyset$. Таким чином, на множині $F^{(n)}$ задача (4.6)-(4.7) має оптимальний розв'язок, який є короткою функцією. Тоді за теоремою 4.5.1, предикат P_0 є виразним у $APr_{P_1, \dots, P_n}(D)$.

Тепер припустимо, що предикат P_0 є виразним у $APr_{P_1, \dots, P_n}(D)$. Тоді за теоремою 4.5.1, існує функція $f \in M^{(n)}$ така, що

$$f(p_1(d), p_2(d), \dots, p_n(d)) = p_0(d)$$

для всіх $d \in D$. Тоді для всіх $d, d' \in D$ виконується нерівність

$$|p_0(d) - p_0(d')| \leq |f(p_1(d), \dots, p_n(d)) - f(p_1(d'), \dots, p_n(d'))| \leq \tilde{\rho}_{P_1, \dots, P_n}(d, d').$$

Тоді предикат P_0 є коротким відносно $P_1, P_2, \dots, P_n$. □

4.5.7. Доведення теореми 4.5.3

Доведемо допоміжні леми.

Лема 4.5.9. Нехай V і $W \neq \emptyset$ є множинами, $Q \in QPr_W^V$ і $v \in V$. Тоді

$$\sim (\exists v Q) = (\exists v (\sim Q)) \wedge (\forall v (\sim Q \vee \neg Q)).$$

Доведення. Зафіксуємо $d \in V \rightarrow W$ і розглянемо такі два випадки.

Випадок 1. Припустимо, що $(\sim (\exists v Q))(d) \downarrow = T$. Тоді $(\exists v Q)(d) \uparrow$, тому існує елемент $a \in W$, такий, що $Q(d \nabla^v a) \uparrow$ і не існує $b \in W$, такого, що $Q(d \nabla^v b) \downarrow = T$. Тоді $(\sim Q)(d \nabla^v a) \downarrow = T$, тому $(\exists v (\sim Q))(d) \downarrow = T$. Крім того, для кожного $b \in W$ виконується або $Q(d \nabla^v b) \uparrow$, або $Q(d \nabla^v b) \downarrow = F$, тому або $(\sim Q)(d \nabla^v b) \downarrow = T$, або $(\neg Q)(d \nabla^v b) \downarrow = T$, звідки $(\sim Q \vee \neg Q)(d \nabla^v b) \downarrow = T$. Тому $(\forall v (\sim Q \vee \neg Q))(d) \downarrow = T$. Таким чином,

$$((\exists v (\sim Q)) \wedge (\forall v (\sim Q \vee \neg Q)))(d) \downarrow = T.$$

Випадок 2. Припустимо, що $(\sim (\exists v Q))(d) \uparrow$. Тоді $(\exists v Q)(d) \downarrow$. Тоді або існує елемент $a \in W$, такий, що $Q(d \nabla^v a) \downarrow = T$, або $Q(d \nabla^v b) \downarrow = F$ для всіх $b \in W$.

Підвипадок 2.1. Розглянемо підвипадок, коли існує елемент $a \in W$, такий,

що $Q(d\nabla^v a) \downarrow = T$. Тоді $(\sim Q)(d\nabla^v a) \uparrow$ і $(\sim Q \vee \neg Q)(d\nabla^u a) \uparrow$. Слід зауважити, що $(\sim Q \vee \neg Q)(d\nabla^u b)$ не є хибним для будь-якого $b \in W$, оскільки $(\sim Q)(d\nabla^u b)$ не може бути хибним. Тоді $(\forall v(\sim Q \vee \neg Q))(d) \uparrow$. Крім того, $(\exists v(\sim Q))(d)$ не є хибним, оскільки $(\sim Q)(d\nabla^v a) \uparrow$. Тоді

$$((\exists v(\sim Q)) \wedge (\forall v(\sim Q \vee \neg Q)))(d) \uparrow.$$

Підвипадок 2.2. Розглянемо підвипадок, коли $Q(d\nabla^v b) \downarrow = F$ для всіх $b \in W$. Тоді $(\exists v(\sim Q))(d) \uparrow$ (оскільки $W \neq \emptyset$). Крім того, $(\sim Q \vee \neg Q)(d\nabla^u b) \downarrow = T$ для всіх $b \in W$. Тоді $(\forall v(\sim Q \vee \neg Q))(d) \downarrow = T$. Тому $((\exists v(\sim Q)) \wedge (\forall v(\sim Q \vee \neg Q)))(d) \uparrow$.

Оскільки $(\sim (\exists v Q))(d)$ не може бути хибним для будь-якого d , можемо зробити висновок, що

$$(\sim (\exists v Q))(d) \cong ((\exists v(\sim Q)) \wedge (\forall v(\sim Q \vee \neg Q)))(d)$$

для всіх $d \in V \rightarrow W$.

Таким чином, $\sim (\exists v Q) = (\exists v (\sim Q)) \wedge (\forall v (\sim Q \vee \neg Q))$. □

Наслідок 4.5.1. Нехай V і $W \neq \emptyset$ є множинами, $Q \in QPr_W^V$, $u, v \in V$, $u \neq v$ і u є несуттєвим для Q . Тоді $\sim (\exists v Q) = \forall u \exists v (\sim Q \wedge (\sim R_v^u(Q) \vee \neg R_v^u(Q)))$.

Доведення. Випливає безпосередньо з леми 4.5.9. □

Лема 4.5.10. Нехай V і $W \neq \emptyset$ є множинами, $Q \in QPr_W^V$ і $v \in V$. Тоді

$$\sim (\forall v Q) = (\exists v (\sim Q)) \wedge (\forall v (\sim Q \vee Q)).$$

Доведення. З урахуванням леми 4.5.9 і рівностей $\forall v Q = \neg \exists v (\neg Q)$, $\neg \neg Q = Q$ і $\sim (\neg Q) = \sim Q$, маємо:

$$\begin{aligned} \sim (\forall v Q) &= \sim (\neg \exists v (\neg Q)) = \sim (\exists v (\neg Q)) = \\ &= (\exists v (\sim (\neg Q))) \wedge (\forall v (\sim (\neg Q) \vee \neg \neg Q)) = \\ &= (\exists v (\sim Q)) \wedge (\forall v (\sim Q \vee Q)). \end{aligned}$$

□

Наслідок 4.5.2. Нехай V і $W \neq \emptyset$ є множинами, $Q \in QPr_W^V$, $u, v \in V$, $u \neq v$ і u є несуттєвим для Q . Тоді $\sim (\forall v Q) = \forall u \exists v (\sim Q \wedge (\sim R_v^u(Q) \vee R_v^u(Q)))$.

Доведення. Впливає безпосередньо з леми 4.5.10. □

Доведення теореми 4.5.3.

Спочатку припустимо, що існують

– цілі числа $l \geq 1$, $k \geq 0$, $m \in [0, 2^k - 1]$,

– кортеж $\bar{v} \in V^k$,

– скінченні послідовності цілих чисел $k_j \geq 1$ і $n_j \in [1, n]$ для $j = 1, 2, \dots, l$,

– скінченні послідовності кортежів $\bar{u}_j \in V_{\neq}^{k_j}$, $\bar{v}_j \in V^{k_j}$ для $j = 1, 2, \dots, l$,

– частковий предикат P на $V \rightarrowtail W$, що є коротким відносно $R_{\bar{v}_j}^{\bar{u}_j}(Q_{n_j})$ для $j = 1, 2, \dots, l$, такі, що $Q_0 = \mathfrak{Q}_{m, \bar{v}}^k(P)$. За теоремою 4.5.2, P є виразним в алгебрі $APr_{P_1, \dots, P_l}(V \rightarrowtail W)$, де $P_j = R_{\bar{v}_j}^{\bar{u}_j}(Q_{n_j})$ для $j = 1, 2, \dots, l$. Тоді $\mathfrak{Q}_{m, \bar{v}}^k(P)$ є виразним у $AQPr_{Q_1, \dots, Q_n}(V, W)$. Таким чином, Q_0 є виразним у $AQPr_{Q_1, \dots, Q_n}(V, W)$.

Тепер припустимо, що Q_0 є виразним в алгебрі $AQPr_{Q_1, \dots, Q_n}(V, W)$. Враховуючи наслідок 4.5.1, наслідок 4.5.2 і властивості $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\exists u$, $\forall u$ і реномінації [149], маємо, що існує предикат P , виразний у $ARPr_{Q_1, \dots, Q_n}(V, W)$, такий, що $Q_0 = \mathfrak{Q}_{m, \bar{v}}^k(P)$ для деяких цілих чисел $k \geq 0$, $m \in [0, 2^k - 1]$ і кортежу $\bar{v} \in V^k$. Враховуючи властивості реномінації стосовно $\vee$, $\wedge$, $\neg$, і $\sim$ [149] (наприклад, $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(P_1 \vee P_2) = R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(P_1) \vee R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(P_2)$), і те, що композиція реномінацій може бути подана як реномінація (тобто $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(R_{\bar{v}'}^{\bar{u}'}(P))$ може бути подано як $R_{\bar{v}''}^{\bar{u}''}(P)$ для деяких $\bar{u}'', \bar{v}''$), існують ціле число $l \geq 1$, скінченні послідовності цілих чисел $k_j \geq 1$ і $n_j \in [1, n]$ для $j = 1, 2, \dots, l$ і скінченна послідовність кортежів $\bar{u}_j \in V_{\neq}^{k_j}$, $\bar{v}_j \in V^{k_j}$ для $j = 1, 2, \dots, l$, такі, що P є виразним у $APr_{Q^1, \dots, Q^l}(V \rightarrowtail W)$, де $Q^j = R_{\bar{v}_j}^{\bar{u}_j}(Q_{n_j})$ для $j = 1, 2, \dots, l$. Тоді за теоремою 4.5.2, P є коротким відносно $R_{\bar{v}_j}^{\bar{u}_j}(Q_{n_j})$ для $j = 1, 2, \dots, l$. □

4.6. Висновки до розділу 4

У підрозділі 4.1 було запропоновано формальну мову для виразу основних властивостей траєкторій НПМС, визначено інтерпретацію цієї мови і показано, що асоційована формальна теорія (множина речень, які є істинними в усіх інтерпретаціях) є розв'язною. Для доведення розв'язності зазначеної теорії було використано теорему М.О. Рабіна [170] про розв'язність одномісної теорії другого порядку дійсного сегмента $[0, 1]$ з квантифікацією за F_σ -підмножинами (зліченими об'єднаннями замкнених множин).

У підрозділі 4.2 було запропоновано визначення розміченої НПМС, що може розглядатись як аналог розміченої транзиційної системи для неперервного часу,

і визначення глобальної часової бісимуляції на станах розміченої НПМС. Також, було запропоновано необхідну і достатню умову (критерій) локального характеру для перевірки, чи є задане відношення глобальною часовою бісимуляцією для розмічених НПМС.

У підрозділі 4.3 було розглянуто задачу доведення того, що кожний елемент у даній множині станів досягається деякою траєкторією заданої НПМС з деякого початкового стану. Було запропоновано критерій для визначення, чи є множина нижньою апроксимацією множини досяжності НПМС, що спирається на локальну продовжуваність траєкторій.

У підрозділі 4.4 було запропоновано узагальнення поняття EDS визначної функції на структурі *М* Г. Фрідмана [38, 39] до поняття EDS визначної функції, що перетворює складноіменні дані [189].

У підрозділі 4.5 було запропоновано критерії виразності часткових предикатів в алгебрі часткових предикатів з композиціями диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення, визначеними відповідно до принципів сильної тризначної логіки Кліні [105], розширеній композицією предикатного доповнення [95].

ВИСНОВКИ

У дисертації побудовано теорію, що розширює та узагальнює класичні результати теорії абстрактних переписувальних систем на випадки, що становлять інтерес з точки зору аналізу недискретних математичних моделей систем і процесів. У дисертації отримано такі нові наукові результати:

- вперше доведено повноту методу спадних діаграм ван Оострома-де Брейна для доведення конфлюентності абстрактних переписувальних систем мінімальної незліченної потужності (попередні відомі результати: V. van Oostrom, 1994 – метод є повним для доведення конфлюентності систем, що мають властивість кофінальності; J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek, 2018 – метод з двома мітками є повним для доведення конфлюентності систем, що мають властивість кофінальності; також, загальновідомо, що властивість кофінальності може не виконуватись для конфлюентних абстрактних переписувальних систем будь-якої незліченної потужності); за припущення континуум-гіпотези, з отриманого у дисертації результату випливає, що метод спадних діаграм є повним для доведення конфлюентності довільних бінарних відношень на множині дійсних чисел, множині послідовностей дійсних чисел, індексованих натуральними числами, множині неперервних дійсних функцій, множині орієнтованих графів із фіксованою зліченною множиною вузлів і на різноманітних інших структурах, що становлять інтерес з точки зору інформатики та прикладної математики; доведення повноти було повністю формалізовано та автоматично перевірено за допомогою відомої системи інтерактивного доведення теорем Isabelle; обсяг формального доказу перевищує 300 сторінок у форматі Archive of Formal Proofs;
- вперше отримано розв’язки проблем неповноти методу спадних діаграм з двома мітками та відсутності колапсу на рівні 2 ієрархії систем, що мають спадну властивість Черча–Россера (ці проблеми були сформульовані J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek у 2018 році як відкриті проблеми);
- вперше запропоновано узагальнення леми Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем;
- вперше запропоновано спеціальні принципи індукції для доведення власти-

- востей елементів переписувальних систем, що не задовольняють припущенням про термінальність та зліченність;
- дістали подальшого розвитку формальні теорії для аналізу властивостей абстрактних недискретних динамічних моделей; запропоновано розв'язну формальну теорію для перевірки властивостей траєкторій НПМС; отримано необхідну і достатню умову локального характеру для перевірки, чи є дане відношення глобальною часовою бісимуляцією на розміченій НПМС, запропоновано критерій для визначення, чи є множина нижньою апроксимацією множини досяжності НПМС, що спирається на локальну продовжуваність траєкторій, запропоновано узагальнення поняття EDS визначної функції Г. Фрідмана до поняття EDS визначної функції, що перетворює складноіменні дані, отримано критерії виразності часткових предикатів в алгебрі часткових предикатів з композицією предикатного доповнення.

Отримані результати суттєво удосконалюють розуміння меж застосовності класичних методів теорії абстрактних переписувальних систем та випадків, коли є необхідність застосування нових методів аналізу абстрактних переписувальних систем, породжених недискретними математичними моделями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Alur R., Courcoubetis C., Dill D. Model checking in dense real-time. *Information and Computation*. 1993. Vol. 104. P. 2–34.
2. Alur R., Courcoubetis C., Halbwachs N. et al. The algorithmic analysis of hybrid systems. *Theoretical computer science*. 1995. Vol. 138, no. 1. P. 3–34.
3. Alur R., Courcoubetis C., Henzinger T. A., Ho P. H. Hybrid automata: An algorithmic approach to the specification and verification of hybrid systems. Springer-Verlag, 1993. P. 209–229.
4. Alur R., Henzinger T. A., Lafferriere G., Pappas G. J. Discrete abstractions of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*. 2000. Vol. 88, no. 7. P. 971–984.
5. Baader F., Nipkow T. Term rewriting and all that. Cambridge university press, 1999.
6. Baheti R., Gill H. Cyber-physical systems. The impact of control technology. 2011. Vol. 12, no. 1. P. 161–166.
7. Barringer H., Kuiper R., Pnueli A. A really abstract concurrent model and its temporal logic. *POPL*. ACM Press, 1986. P. 173–183.
8. Behr N., Krivine J. Rewriting theory for the life sciences. *International Conference on Graph Transformation*. 2020. P. 185–202.
9. Bellini P., Mattolini R., Nesi P. Temporal logics for real-time system specification. *ACM Comput. Surv.* 2000. Vol. 32, no. 1. P. 12–42.
10. Birkhoff G. D. Dynamical systems. American Mathematical Society, 1927. 312 p.
11. Blanchette J. C., Popescu A., Traytel D. Cardinals in Isabelle/HOL. Vol. 8558 of *Lecture Notes in Computer Science*. 2014. P. 111–127.
12. Bognar M. A point version of decreasing diagrams. *Proceedings Accolade 1996*. Dutch Graduate School in Logic. 1997. P. 1–14.
13. Branicky M. S. *Studies in Hybrid Systems: Modeling, Analysis, and Control* : Ph. D. thesis / Michael S. Branicky ; Massachusetts Institute of Technology. 1995.
14. Buchberger B. Introduction to Gröbner bases. *Gröbner Bases and Applications*. Cambridge University Press, 1998. P. 3–31.
15. Buss S. An introduction to proof theory. *Handbook of Proof Theory*. Elsevier, 1998.

16. Cardone F., Hindley J. Lambda-calculus and combinators in the 20th century. Handbook of the History of Logic, Volume 5. North-Holland, 2009. P. 723–817.
17. Chaochen Z., Hansen M. R., Sestoft P. Decidability and undecidability results for duration calculus. Vol. 665 of Lecture Notes in Computer Science. 1993. P. 58–68.
18. Chen C. Diamond-free partial orders : Ph.D. thesis / Cong Chen ; University of Leeds, UK. 2014.
19. Clark P. The instructor's guide to real induction. URL: <http://arxiv.org/abs/1208.0973>. 2012.
20. Clark P. L. The instructor's guide to real induction. Mathematics Magazine. 2019. Vol. 92, no. 2. P. 136–150.
21. Cohn P. Universal Algebra. Harper and Row, 1965.
22. Cuijpers P. Prefix orders as a general model of dynamics. Proceedings of the 9th International Workshop on Developments in Computational Models. 2013. P. 25–29.
23. Cuijpers P. J. L., Reniers M. A. Lost in translation: Hybrid-time flows vs. real-time transitions. Hybrid Systems: Computation and Control. Springer Science + Business Media, 2008. P. 116–129.
24. Davoren J., Tabuada P. On simulations and bisimulations of general flow systems. Hybrid Systems: Computation and Control, 10th International Workshop, HSCC 2007, Pisa, Italy, April 3-5, 2007, Proceedings. 2007. P. 145–158.
25. De Bruijn N. A note on weak diamond properties. Memorandum 78–08, Eindhoven University of Technology. 1978.
26. Deineha O., Donets V., Zholtkevych G. Estimating lambda-term reduction complexity with regression methods. CEUR Workshop Proceedings. 2023. Vol. 3624. P. 147–156.
27. Deineha O., Donets V., Zholtkevych G. On randomization of reduction strategies for typeless lambda calculus. Communications in Computer and Information Science. 2023. Vol. 1980. P. 25–38.
28. Diestel R., Pikhurko O. On the cofinality of infinite partially ordered sets: Factoring a poset into lean essential subsets. Order. 2003. Vol. 20. P. 53–66.
29. Doroshenko A., Shevchenko R. A rewriting framework for rule-based programming dynamic applications. Fundamenta Informaticae. 2006. Vol. 72, no. 1–3. P. 95–108.

30. Endrullis J., Klop J. W. De Bruijn's weak diamond property revisited. *Indagationes Mathematicae*. 2013. Vol. 24. P. 1050–1072.
31. Endrullis J., Klop J. W., Overbeek R. Decreasing diagrams with two labels are complete for confluence of countable systems. 3rd International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2018) / Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik. 2018. P. 14:1–14:15.
32. Endrullis J., Klop J. W., Overbeek R. Decreasing diagrams for confluence and commutation. *Logical Methods in Computer Science*. 2020. Vol. 16. P. 23:1–23:25.
33. Ferlez J., Cleaveland R., Marcus S. Generalized synchronization trees. *Lecture Notes in Computer Science*. 2014. Vol. 8412. P. 304–319.
34. Filippov A. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems (Mathematics and its Applications)*. Springer, 1988. 304 p.
35. *Formal methods. Computing Handbook*. CRC Press, 2014.
36. Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Levy A. *Foundations of Set Theory*. Elsevier, 1973.
37. Fremlin D. H. *Consequences of Martin's axiom*. Cambridge tracts in mathematics, no. 84. Cambridge University Press, 1984.
38. Friedman H. Algorithmic procedures, generalized turing algorithms, and elementary recursion theory. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. 1971. Vol. 61. P. 361–389.
39. Friedman H., Mansfield R. Algorithmic procedures. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1992. Vol. 332. P. 297–312.
40. Galdino A., Ayala-Rincon M. A PVS theory for term rewriting systems. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*. 2009. Vol. 247. P. 67–83.
41. Gavazzo F., Florio C. Elements of quantitative rewriting. *Proc. ACM Program. Lang.* Vol. 7. 2023. P. 63:1–63:32.
42. Glushkov V., Bodnarchuk V., Grinchenko T. et al. ANALITIK (algorithmic language for the description of computing processes using analytical transformations). *Cybernetics and Systems Analysis*. 1971. Vol. 7. P. 513–552.
43. Goebel R., Sanfelice R. G., Teel A. R. Hybrid dynamical systems. *IEEE Control Systems Magazine*. 2009. Vol. 29, no. 2. P. 28–93.
44. Gottschalk W. H., Hedlund G. A. *Topological dynamics*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 1955. 163 p.
45. Goubault-Larrecq J. *Non-Hausdorff topology and domain theory: Selected topics*

- in point-set topology. Cambridge University Press, 2013. Vol. 22.
46. Gundersen D. Handbook of mathematical induction. Theory and Applications. Chapman and Hall/CRC, 2010.
 47. Haghverdi E., Tabuada P., Pappas G. Unifying bisimulation relations for discrete and continuous systems. Proceedings of the International Symposium MTNS2002, South. 2002.
 48. Haghverdi E., Tabuada P., Pappas G. Bisimulation relations for dynamical, control, and hybrid systems. Theoretical Computer Science. 2005. Vol. 342, no. 2-3. P. 229–261.
 49. Hájek O. Theory of processes, I. Czechoslovak Mathematical Journal. 1967. Vol. 17. P. 159–199.
 50. Hájek O. Theory of processes, II. Czechoslovak Mathematical Journal. 1967. Vol. 17, no. 3. P. 372–398.
 51. Henzinger T. A. The theory of hybrid automata. Proc. Eleventh Annual IEEE Symp Logic in Computer Science LICS '96. 1996. P. 278–292.
 52. Hindley J. The Church–Rosser Property and a Result in Combinatory Logic : Ph. D. thesis / J.R. Hindley ; University of Newcastle-upon-Tyne. 1964.
 53. Hirokawa N., Middeldorp A., Sternagel C., Winkler S. Abstract completion, formalized. Logical Methods in Computer Science. 2019. Vol. 15, no. 3. P. 19:1–19:42.
 54. Hirshfeld Y., Rabinovich A. Logics for real time: Decidability and complexity. Fundam. Inf. 2004. Vol. 62, no. 1. P. 1–28.
 55. Hoare C. An axiomatic basis for computer programming. Communications of the ACM. 1969. Vol. 12, no. 10. P. 576–580.
 56. Huet G. Confluent reductions: Abstract properties and applications to term rewriting systems. Journal of the ACM. 1980. Vol. 27, no. 4. P. 797–821.
 57. Isabelle proof assistant. URL: <https://isabelle.in.tum.de>.
 58. An Isabelle/HOL Formalization of Rewriting for Certified Tool Assertions. URL: <http://cl-informatik.uibk.ac.at/isafor/>.
 59. Isbell J. The category of cofinal types. II. Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 116. P. 394–416.
 60. Ivanov E. On inductive definitions on non-well-ordered domains and their potential applications to verification of cyber-physical systems. Прикладні системи та технології в інформаційному суспільстві : зб. тез доповідей і наук. повідомл.

- учасників II Міжнародної науково-практичної конференції. Київ, 1 жовтня 2018. P. 67–68.
61. Ivanov I. On confluence criteria for non-terminating abstract rewriting systems. Proceedings of the 12th International Workshop on Confluence, August 23-24, 2023, Obergurgl, Austria. P. 9–13.
 62. Ivanov I. On generalizations of real induction. Conference on Mathematical Foundations of Informatics. Proceedings MFOI-2020. 12-16 January 2021, Kyiv, Ukraine. P. 162–167.
 63. Ivanov I. On generalized well-founded induction. Logic and its Applications. 2nd World Logic Day – January 14, 2020. Logic and its Applications, The workshop. Book of Abstracts. January 14, 2020, Kyiv. P. 7–8.
 64. Ivanov I. On non-triviality of the hierarchy of decreasing Church-Rosser abstract rewriting systems. Proceedings of the 13th International Workshop on Confluence. July 9, 2024, Tallinn, Estonia. P. 30–35.
 65. Ivanov I. On the partial Floyd-Hoare logic based on predicate complement. 1st World Logic Day – January 14, 2019. Logic and its Applications, The workshop. Book of Abstracts. January 14, 2019, Kyiv. P. 4–5.
 66. Ivanov I. An abstract block formalism for engineering systems. ICTERI. 2013. P. 448–463.
 67. Ivanov I. A criterion for existence of global-in-time trajectories of non-deterministic Markovian systems. Vol. 347 of Communications in computer and information science. Springer-Verlag, 2013. P. 111–130.
 68. Ivanov I. Investigation of abstract systems with inputs and outputs as partial functions of time. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Київ. 2013.
 69. Ivanov I. On existence of total input-output pairs of abstract time systems. Communications in computer and information science. 2013. Vol. 412. P. 308–331.
 70. Ivanov I. On representations of abstract systems with partial inputs and outputs. Lecture Notes in Computer Science. 2014. Vol. 8402. P. 104–123.
 71. Ivanov I. On local characterization of global timed bisimulation for abstract continuous-time systems. Lecture notes in computer science. 2016. Vol. 9608. P. 216–234.
 72. Ivanov I. On the underapproximation of reach sets of abstract continuous-time

- systems. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*. 2017. Vol. 247. P. 46–51.
73. Ivanov I. On induction for diamond-free directed complete partial orders. *CEUR workshop proceedings*. 2020. Vol. 2732. P. 70–73.
 74. Ivanov I. On induction principles for diamond-free partial orders. *Communications in computer and information science*. 2021. Vol. 1308. P. 166–190.
 75. Ivanov I. On induction principles for partial orders. *Logica Universalis*. 2022. Vol. 16. P. 105–147.
 76. Ivanov I. Formalization of generalized Newman’s lemma. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7855691>. 2023.
 77. Ivanov I. Generalized Newman’s lemma for discrete and continuous systems. *Leibniz international proceedings in informatics*. 2023. Vol. 260. P. 9:1–9:17.
 78. Ivanov I. Formal proof of completeness of the decreasing diagrams method for proving confluence of relations of the least uncountable cardinality. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.14254256>. 2024.
 79. Ivanov I. Formalization of an abstract rewriting system in the class $DCR3 \setminus DCR2$. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.11571490>. 2024.
 80. Ivanov I. On Newman’s lemma and non-termination. *CEUR workshop proceedings*. 2024. Vol. 3624. P. 14–24.
 81. Ivanov I. Completeness of decreasing diagrams for the least uncountable cardinality. *Archive of Formal Proofs*. 2025. April. 319 pages. URL: https://isa-afp.org/entries/Completeness_Decreasing_Diagrams_for_N1.html.
 82. Ivanov I. Completeness of the decreasing diagrams method for proving confluence of rewriting systems of the least uncountable cardinality. *Leibniz international proceedings in informatics*. 2025. Vol. 337. P. 25:1–25:20.
 83. Ivanov I. Formalization of a confluent abstract rewriting system of the least uncountable cardinality outside of the class $DCR2$. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.14740062>. 2025.
 84. Ivanov I. Formalization of Generalized Newman’s lemma for countable acyclic strictly inductive ars. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.17014305>. 2025.
 85. Ivanov I. Formalization of induction principles for diamond-free and locally diamond-free partially ordered sets. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.17014351>. 2025.
 86. Ivanov I. Formalization of the cofinal connected subgraph theorem

- for the DCR hierarchy of abstract rewriting systems. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.17014316>. 2025.
87. Ivanov I. On the cofinality property in the context of the hierarchy of decreasing Church-Rosser abstract rewriting systems. CEUR workshop proceedings. 2025. Vol. 3909. P. 466–479.
 88. Ivanov I., Kornilowicz A., Nikitchenko M. Formalization of nominative data in Mizar. Праці Міжнародної науково-практичної конференції “Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем” ТАAPSD’2015. 23-26 листопада 2015 р., м. Київ. P. 82–85.
 89. Ivanov I., Kornilowicz A., Nikitchenko M. Implementation of the composition-nominative approach to program formalization in Mizar. Computer science journal of Moldova. 2018. Vol. 26, no. 1. P. 59–76.
 90. Ivanov I., Kornilowicz A., Nikitchenko M. An inference system of an extension of Floyd-Hoare logic for partial predicates. Formalized mathematics. 2018. Vol. 26, no. 2. P. 159–164.
 91. Ivanov I., Nikitchenko M. On nominative Glushkov algebras. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції “В.М. Глушков – піонер кібернетики”. 11 грудня 2014, м. Київ. P. 48–49.
 92. Ivanov I., Nikitchenko M. On the sequence rule for the Floyd-Hoare logic with partial pre- and post-conditions. CEUR workshop proceedings. 2018. Vol. 2104. P. 716–724.
 93. Ivanov I., Nikitchenko M. Inference rules for the partial Floyd-Hoare logic based on composition of predicate complement. Communications in computer and information science. 2019. Vol. 1007. P. 71–88.
 94. Ivanov I., Nikitchenko M. On the Kleene algebra of partial predicates with predicate complement. CEUR workshop proceedings. 2019. Vol. 2393. P. 542–551.
 95. Ivanov I., Nikitchenko M. Expressibility in the Kleene algebra of partial predicates with the complement composition. Communications in computer and information science. 2020. Vol. 1175. P. 50–67.
 96. Ivanov I., Nikitchenko M., Abraham U. On a decidable formal theory for abstract continuous-time dynamical systems. Communications in computer and information science. 2014. Vol. 469. P. 78–99.
 97. Ivanov I., Nikitchenko M., Kryvolap A., Kornilowicz A. Simple-named complex-

- valued nominative data – definition and basic operations. *Formalized Mathematics*. 2017. Vol. 25, no. 3. P. 205–216.
98. Ivanov I., Nikitchenko M., Skobelev V. Properties of nominative programs specified by effective definitional schemes. *Conference on Mathematical Foundations of Informatics. Proceedings MFOI-2016*. Institute of Mathematics and Computer Science, July 25-30, 2016, Chisinau, Moldova. P. 222–240.
 99. Ivanov I., Nikitchenko M., Skobelev V. Proving properties of programs on hierarchical nominative data. *Computer science journal of Moldova*. 2016. Vol. 24, no. 3. P. 371–398.
 100. Jech T. *Set Theory*. Springer, 2003.
 101. Julius A., Schaft van der A. Bisimulation as congruence in the behavioral setting. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference 2005*. Seville, Spain, December 12-15, 2005. 2005.
 102. Kalantari I. Induction over the continuum. *Induction, Algorithmic Learning Theory, and Philosophy*. Springer, 2007. P. 145–154.
 103. Kalman R. E., Falb P. L., Arbib M. A. *Topics in Mathematical System Theory (Pure & Applied Mathematics S.)*. McGraw-Hill Education, 1969. 358 p.
 104. Kelley J. L. *General topology*. Van Nostrand, 1955.
 105. Kleene S. *Introduction to metamathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, and P. Noordhoff, Groningen, 1952.
 106. Kloeden P. E. *General control systems*. Springer-Verlag, 1978. P. 119–137. ISBN: 978-3-540-08941-4.
 107. Klop J. W. *Combinatory Reduction Systems : Ph.D. thesis / Jan Willem Klop ; Rijks-universiteit Utrecht*. 1980.
 108. Klop J. W. *Term rewriting systems*. Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1990.
 109. Knuth D., Bendix P. Simple word problems in universal algebras. *Computational Problems in Abstract Algebra*. Pergamon Press, 1970. P. 263–297.
 110. Kornilowicz A., Ivanov I., Nikitchenko M. Kleene algebra of partial predicates. *Formalized Mathematics*. 2018. Vol. 26, no. 1. P. 11–20.
 111. Kornilowicz A., Kryvolap A., Nikitchenko M., Ivanov I. Formalization of the algebra of nominative data in Mizar. *Proceedings of the 2017 Federated Conference on Computer Science and Information Systems*, September 3-6, 2017, Prague, Czech Republic. P. 237–244.
 112. Kornilowicz A., Kryvolap A., Nikitchenko M., Ivanov I. An approach to formali-

- zation of an extension of Floyd-Hoare logic. CEUR workshop proceedings. 2017. Vol. 1844. P. 504–523.
113. Kornilowicz A., Kryvolap A., Nikitchenko M., Ivanov I. Formalization of the Nominative Algorithmic Algebra in Mizar. Information Systems Architecture and Technology: Proceedings of 38th International Conference on Information Systems Architecture and Technology – ISAT 2017: Part II / Ed. by Jerzy Świątek, Leszek Borzemski, Zofia Wilimowska. Cham : Springer International Publishing, 2018. P. 176–186.
 114. Kraus N., Forsberg F. N., Xu C. Type-theoretic approaches to ordinals. Theoretical computer science. 2023. Vol. 957.
 115. Krauss A., Schropp A. A mechanized translation from Higher-Order Logic to set theory. Vol. 6172 of Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2010. P. 323–338.
 116. Kryvolap A., Nikitchenko M., Schreiner W. Extending Floyd-Hoare logic for partial pre- and postconditions. Communications in computer and information science. 2013. Vol. 412. P. 355–378.
 117. Kunen K., Vaughan J. e. Handbook of Set-Theoretic Topology. North-Holland, 1984.
 118. Kunčar O., Popescu A. A consistent foundation for Isabelle/HOL. Journal of Automated Reasoning. 2019. Vol. 62. P. 531–555.
 119. Lee E. A. Fundamental limits of cyber-physical systems modeling. ACM Transactions on Cyber-Physical Systems. 2016. Vol. 1, no. 1.
 120. Letichevsky A., Kapitonova J. Algebraic programming in the APS system. Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. 1990. P. 68–75.
 121. Letichevsky A., Kapitonova J., Konozenko S. Computations in APS. Theoretical Computer Science. 1993. Vol. 119. P. 145–171.
 122. Letichevsky A., Letychevskiy O., Peschanenko V. Insertion modeling and its applications. Computer Science Journal of Moldova. 2016. Vol. 24, no. 3(72). P. 357–370.
 123. Letichevsky A., Letychevskiy O., Skobelev V., Volkov V. Cyber-physical systems. Cybernetics and Systems Analysis. 2017. Vol. 53. P. 821–834.
 124. Letychevskiy O. Algebraic school of V.M. Glushkov and insertion modeling. Cybernetics and Computer Technologies. 2023. P. 8–15.

125. Letychevskyi O., Peschanenko V. Applying algebraic virtual machine to cybersecurity tasks. The 2022 IEEE 9th International Conference on Sciences of Electronics, Technologies of Information and Telecommunications. 2022.
126. Letychevskyi O., Peschanenko V., Kharchenko V. et al. Modeling method for development of digital system algorithms based on programmable logic devices. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, no. 5. P. 710–717.
127. Li X. Decidability of mean value calculus. *J. Comp. Sci. Tech.* 1999. Vol. 14, no. 2. P. 173–180.
128. Liberzon D. *Switching in Systems and Control (Systems & Control: Foundations & Applications)*. Birkhauser Boston Inc., 2003. 246 p.
129. Liu J., Jouannaud J.-P. Confluence: The unifying, expressive power of locality. *Lecture Notes in Computer Science*. 2014. Vol. 8373. P. 337–358.
130. Lvov M., Kravtsov H., Shishko L., Hniedkova O. Three-subject didactic model for teaching algorithmization and programming online. *CEUR Workshop Proceedings*. 2023. Vol. 3679. P. 43–53.
131. Lyaletski A., Paskevich A., Verchinine K. Theorem proving and proof verification in the system SAD. *Lecture Notes in Computer Science*. 2004. Vol. 3119. P. 236–250.
132. Lynch N., Segala R., Vaandrager F. Hybrid I/O automata. *Information and Computation*. 2003. Vol. 185, no. 1. P. 105–157.
133. Malbos P. Lectures on algebraic rewriting. URL: <http://hal.science/hal-02461874v1>. 2019.
134. Markowsky G. Chain-complete posets and directed sets with applications. *Algebra universalis*. 1976. Vol. 6, no. 1. P. 53–68.
135. Mathematical induction. URL: <http://www.britannica.com/science/mathematical-induction>.
136. McKinley R. Proof nets for Herbrand's theorem. *ACM Trans. Comput. Logic*. 2013. Vol. 14(1). P. 1–31.
137. Mendelson E. *Introduction to Mathematical Logic*. CRC Press, 2015.
138. Mesarovic M. D., Takahara Y. *Abstract Systems Theory (Lecture Notes in Control and Information Sciences)*. Springer, 1989. 439 p.
139. Meseguer J. Twenty years of rewriting logic. *The Journal of Logic and Algebraic Programming*. 2012. Vol. 81. P. 721–781.
140. Milner E. C., Pouzet M. On the cofinality of partially ordered sets. *Ordered sets*.

1982. P. 279–298.
141. Milner E. C., Prikry K. The cofinality of a partially ordered set. *Proc. London Math. Soc.* 1983. Vol. 46. P. 454–470.
 142. Milner R. *Communication and Concurrency*. Upper Saddle River, NJ, USA : Prentice-Hall, Inc., 1989. ISBN: 0-13-115007-3.
 143. Nederpelt R. Strong normalization in a typed lambda calculus with lambda structured types : Ph.D. thesis / R.P. Nederpelt ; Eindhoven University of Technology. 1973.
 144. Nerode A., Kohn W. Models for hybrid systems: Automata, topologies, controllability, observability. *Springer-Verlag*, 1993. Jun. P. 317–356.
 145. Newman M. H. A. On theories with a combinatorial definition of “equivalence”. *Annals of mathematics*. 1942. P. 223–243.
 146. Nielson H., Nielson F. *Semantics with applications – a formal introduction*. Wiley professional computing. Wiley, 1992.
 147. Nikitchenko M., Ivanov I., Kornilowicz A., Kryvolap A. Extended Floyd-Hoare logic over relational nominative data. *Communications in computer and information science*. 2018. Vol. 826. P. 41–64.
 148. Nikitchenko M., Kryvolap A. Properties of inference systems for Floyd-Hoare logic with partial predicates. *Acta Electrotechnica et Informatica*. 2013. Vol. 13, no. 4. P. 70–78.
 149. Nikitchenko M., Shkilniak O., Shkilniak S., Mamedov T. Completeness of the logic of partial quasiary predicates with the complement composition. *Proceedings of the Conference on Mathematical Foundations of Informatics, MFOI’2019*, July 3-6, 2019, Iasi, Romania. 2019.
 150. A composition nominative approach to program semantics : Rep. / IT-TR 1998-020, Technical University of Denmark ; Executor: Nikolaj S. Nikitchenko : 1998.
 151. Nipkow T., Wenzel M., Paulson L. C. *Isabelle/HOL: a proof assistant for higher-order logic*. Springer, 2002.
 152. Odarushchenko O., Letychevskiy O., Shamanskyi V. et al. Information technology of formal verification and design of FPGA electronic projects. *The 14th IEEE International Conference on Dependable Systems, Services and Technologies*. 2024.
 153. Odarushchenko O., Striuk O., Shamanskyi V. et al. Application of formal verification methods in a safety-oriented software development life cycle. *The 13th IEEE*

International Conference on Dependable Systems, Services and Technologies. 2023.

154. Ogawa M., Sternagel C. Open induction. *Archive of Formal Proofs*. 2012.
155. Ohlebusch E. *Advanced Topics in Term Rewriting*. Springer, 2002.
156. Panangaden P. Causality in physics and computation. *Theoretical Computer Science*. 2014. Vol. 546. P. 10–16.
157. Pappas G. Bisimilar linear systems. *Automatica*. 2003. Vol. 39, no. 12. P. 2035–2047.
158. Park D. Concurrency and automata on infinite sequences. *Proceedings of the 5th GI-Conference on Theoretical Computer Science*. London, UK : Springer-Verlag, 1981. P. 167–183.
159. Peterson G. Myths about the mutual exclusion problem. *Information Processing Letters*. 1981. Vol. 12, no. 3. P. 115–116.
160. Petty C. Equilateral sets in Minkowski spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1971. Vol. 29(2). P. 369–374.
161. Peyton Jones S. *The Implementation of Functional Programming Languages*. Prentice-Hall, 1987.
162. Pitts A. The HOL logic. *Introduction to HOL: A Theorem Proving Environment for Higher Order Logic*. Cambridge University Press, 1993. P. 191–232.
163. Platzer A. Differential dynamic logic for hybrid systems. *J. Autom. Reas.* 2008. Vol. 41, no. 2. P. 143–189.
164. Platzer A. Differential-algebraic dynamic logic for differential-algebraic programs. *J. Log. Comput.* 2010. Vol. 20, no. 1. P. 309–352.
165. Platzer A. *Logical Analysis of Hybrid Systems: Proving Theorems for Complex Dynamics*. Heidelberg : Springer, 2010.
166. Platzer A., Tan Y. K. Differential equation axiomatization: The impressive power of differential ghosts. *Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. 2018. P. 819–828.
167. Pola G., Schaft van der A., Di Benedetto M. Equivalence of switching linear systems by bisimulation. *International Journal of Control*. 2006. Vol. 79, no. 1. P. 74–92.
168. Polderman J., Willems J. *Introduction to mathematical systems theory: a behavioral approach*. Springer, Berlin, 1997. 424 p.
169. Ptak V. Nondiscrete mathematical induction. *General topology and its relations to*

- modern analysis and algebra IV. Springer, 1977. P. 166–178.
170. Rabin M. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. *Trans. AMS.* 1969. Vol. 141. P. 1–35.
 171. Rabinovich A. On the decidability of continuous time specification formalisms. *Journal of Logic and Computation.* 1998. P. 669–678.
 172. Rabinovich A. On translations of temporal logic of actions into monadic second order logic. *Theoretical Computer Science.* 1998. Vol. 193. P. 197–214.
 173. Ralph B. A natural proof system for Herbrand’s theorem. *Lecture Notes in Computer Science.* 2018. Vol. 10703. P. 1–20.
 174. Raoult J.-C. Proving open properties by induction. *Information processing letters.* 1988. Vol. 29, no. 1. P. 19–23.
 175. Roman S. *Lattices and Ordered Sets.* Springer, 2008.
 176. Rosen B. Tree manipulating systems and Church-Rosser theorems. *Journal of the ACM.* 1973. Vol. 20. P. 160–187.
 177. Rosen K. *Handbook of discrete and combinatorial mathematics.* CRC Press, 2017.
 178. Roxin E. Local definition of generalized control systems. *The Michigan Mathematical Journal.* 1966. Vol. 13, no. 1. P. 91–96.
 179. Rutten J. Universal coalgebra: a theory of systems. *Theoretical Computer Science.* 2000. Vol. 249. P. 3–80.
 180. Sangiorgi D. On the bisimulation proof method. *Mathematical. Structures in Comp. Sci.* 1998. Vol. 8, no. 5. P. 447–479.
 181. Sangiorgi D. On the origins of bisimulation and coinduction. *ACM Trans. Program. Lang. Syst.* 2009. Vol. 31, no. 4. P. 15:1–15:41.
 182. Sangiorgi D. *Introduction to Bisimulation and Coinduction.* New York, NY, USA : Cambridge University Press, 2011.
 183. Schaft van der A. Equivalence of dynamical systems by bisimulation. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2004. Vol. 49, no. 12. P. 2160–2172.
 184. Schaft van der A. Equivalence of hybrid dynamical systems. *Proceedings of the Sixteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Leuven, Belgium, July 5-9, 2004.* 2004.
 185. Schmuck A., Raisch J. Simulation and bisimulation over multiple time scales in a behavioral setting. *CoRR.* 2014. Vol. abs/1402.3484.
 186. Sell G. R. Differential equations without uniqueness and classical topological dynamics. *Journal of Differential Equations.* 1973. Vol. 14, no. 1. P. 42–56.

187. Shramenko V., Kuznietcova V., Zholtkevych G. Studying mixed normalization strategies of lambda terms. *CEUR Workshop Proceedings*. 2022. Vol. 3348. P. 57–68.
188. Signature in logic. URL: [http://ncatlab.org/nlab/show/signature+\(in+logic\)](http://ncatlab.org/nlab/show/signature+(in+logic)).
189. Skobelev V., Nikitchenko M., Ivanov I. On algebraic properties of nominative data and functions. *Communications in computer and information science*. 2014. Vol. 469. P. 117–138.
190. Smith P. *An Introduction To Gödel's Theorems*. Cambridge University Press, 2013.
191. Smullyan R. *Set theory and the continuum problem*. Clarendon Press, 1996.
192. Sternagel C., Thiemann R. Abstract rewriting. *Archive of Formal Proofs*. 2010. June.
193. Stratulat S. A unified view of induction reasoning for first-order logic. Turing-100, The Alan Turing Centenary Conference, Jun 2012, Manchester, United Kingdom. 2012.
194. Tarski A. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific J. Math*. 1955. Vol. 5. P. 285–309.
195. Tavernini L. Differential automata and their discrete simulators. *Nonlinear Anal. Theory Methods Applic*. 1987. Vol. 11, no. 6. P. 665–683.
196. Terese. *Term Rewriting Systems*. Cambridge University Press, 2003.
197. Todorcevic S. Directed sets and cofinal types. *Trans. Amer. Math. Soc*. 1985. Vol. 290. P. 711–723.
198. Toyama Y. Reduction strategies for left-linear term rewriting systems. Vol. 3838 of *Lecture Notes in Computer Science*. 2005. P. 198–223.
199. Tripakis S., Yovine S. Analysis of timed systems using time-abtracting bisimulations. *Form. Methods Syst. Des*. 2001. Vol. 18, no. 1. P. 25–68.
200. Tukey J. W. *Convergence and uniformity in topology*. Princeton University Press, 1940.
201. Van Oostrom V. Confluence by decreasing diagrams. *Theoretical computer science*. 1994. Vol. 126, no. 2. P. 259–280.
202. Van Oostrom V. *Confluence for Abstract and Higher-Order Rewriting* : Ph.D. thesis / Vincent Van Oostrom ; Vrije Universiteit Amsterdam. 1994.
203. Van Oostrom V. Confluence by decreasing diagrams – converted. Vol. 5117 of *Lecture Notes in Computer Science*. 2008. P. 306–320.
204. Verchinine K., Lyaletski A., Paskevich A., Anisimov A. On correctness of

- mathematical texts from a logical and practical point of view. *Lecture Notes in Computer Science*. 2008. Vol. 5144. P. 583–598.
205. Wang S.-Z., Li B. Y. On the minimal cofinal subsets of a directed quasi-ordered set. *Discrete Mathematics*. 1984. Vol. 48. P. 289–306.
 206. Wiedijk F. *The seventeen provers of the world: Foreword by Dana S. Scott*. Springer, 2006. Vol. 3600.
 207. Wiedijk F. *The seventeen provers of the world. foreword by dana s. scott. / Ed. by F. Wiedijk*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. Vol. 3600 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*.
 208. Willard S. *General topology*. Dover Publications, 2004.
 209. Willems J. C. Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1991. Vol. 36, no. 3. P. 259–294.
 210. Witsenhausen H. A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*. 1966. Vol. 11, no. 2. P. 161–167.
 211. Zankl H. Confluence by decreasing diagrams – formalized. *24th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*. No. 21. *Leibniz International Proceedings in Informatics*, 2013. P. 352–367.
 212. Zankl H. *Decreasing diagrams*. *Archive of Formal Proofs*. 2013.
 213. Zhang J., Johansson K. H., Lygeros J., Sastry S. Zeno hybrid systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2001. Vol. 11, no. 5. P. 435–451.
 214. Zholtkevych G., Zozulia A. Realizability of event diagrams and existence of logical clocks. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2025. Vol. 61. P. 11–20.

ДОДАТОК А. Відповідність між позначеннями, що використовуються у формалізації в Isabelle та у тексті дисертації

Нижче наведені таблиці відповідності між позначеннями, що використовуються у формальній теорії [78] для системи Isabelle/HOL [57] та позначеннями у тексті дисертації.

Формальна мова теорій Isabelle/HOL описана у документації до програмного забезпечення Isabelle [57].

Загальні позначення

Позначення у [78]	Позначення у дисертації
$\neg, \vee, \wedge, \longrightarrow$	$\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$
$=, \in, \subseteq$	$=, \in, \subseteq$
$\cup, \cap, -, \times$	$\cup, \cap, \setminus, \times$
$\{ \}$	$\emptyset$
$f :: 'A \Rightarrow 'B$	$f : A \rightarrow B \ (A, B \neq \emptyset)$
$f \ x$	$f(x)$
$\{x. P \ x\}$	$\{x \mid P(x)\}$
<code>nat</code>	$\{0, 1, 2, \dots\}$
<code>UNIV :: 'U</code>	$U \ (U \neq \emptyset)$
$x :: 'U$	$x \in U$
$A :: 'U \text{ set}$	$A \subseteq U \ (U \neq \emptyset)$
$r :: 'U \text{ rel}$	$r \subseteq U \times U \ (U \neq \emptyset)$
<code>Field r</code>	$\text{Fld}(r)$
<code>Restr $r \ B$</code>	$r _B$
$r^{-1}, r^{\wedge\wedge n}, r^{\wedge+}, r^{\wedge=}, r^{\wedge*}$	$r^{-1}, r^n, r^+, r^=, r^*$
$ A =_o B $	$ A = B $
$ A <_o B $	$ A < B $
$ A <= _o B $	$ A \leq B $
<code>ω_ord</code>	$ \mathbb{N} $

Позначення підпункту 1.1.5.2

Рядки у [78]	Позначення у [78]	Позначення у дисертації
78–80	$\mathcal{L}_1 g \alpha$	$\mathcal{L}_1(g, \alpha)$
82–84	$\mathcal{L}_v g \alpha \beta$	$\mathcal{L}_v(g, \alpha, \beta)$
86–88	$\mathcal{D} g \alpha \beta$	$\mathcal{D}(g, \alpha, \beta)$
116–118	$CCR r$	$r \in CCR(U)$
120–122	$Conelike r$	$r \in Conelike(U)$
90–93	$DCR_generating g$	$g \in DCR\text{-генеруючою}$
95–97	$DCR n r$	$r \in DCR_n(U)$
177–178	$\mathcal{U} r$	$\mathcal{U}(r)$

Позначення підпункту 1.1.5.3

Рядки у [78]	Позначення у [78]	Позначення у дисертації
126	$r \setminus A$	$r[A]$
124–126	$dncl r A$	$dncl(r, A)$
128–130	$Inv r$	$Inv(r)$
132–134	$SF r$	$SF(r)$
136–137	$SCF r$	$SCF(r)$
147–149	$\mathcal{F} r a b$	$\mathcal{F}(r, a, b)$
155–157	$dnEsc r A a$	$dn_{Esc}(r, A, a)$
159–161	$dnesc r A a$	$dn_{esc}(r, A, a)$
163–165	$escl r A B$	$escl(r, A, B)$
167	$clterm s' r$	$clterm(s', r)$
189–190	$Span r$	$Span(r)$
195–196	$scf r$	$scf(r)$
198–200	$w_dncl r A$	$wdncl(r, A)$
234	$r \setminus \{a\}$	$r\{a\}$
307–308	$wrank r A$	$wrank(r, A)$

Позначення підпункту 1.1.5.4

Рядки у [78]	Позначення у [78]	Позначення у дисертації
202–204	$\mathcal{L} f \alpha$	$\mathcal{L}(f, \alpha)$
206–208	$\nabla f \alpha$	$\nabla(f, \alpha)$
210–212	$\mathcal{Q} r f \alpha$	$\mathcal{Q}(r, f, \alpha)$
214–216	$\mathcal{W} r f \alpha$	$\mathcal{W}(r, f, \alpha)$
218–267	$\mathcal{N}_i r \alpha_0$	$\mathcal{N}_i(r, \alpha_0)$, i є цілим числом
269–274	$\mathcal{N} r Ps$	$\mathcal{N}(r, Ps)$

ДОДАТОК Б. Інструкції щодо перевірки формальних доведень

1. Встановити програмне забезпечення *Isabelle 2025* відповідно до інструкцій, наведених за посиланням:

<https://isabelle.in.tum.de/website-Isabelle2025/installation.html>

2. Запустити програмне забезпечення *Isabelle 2025*.
3. Завантажити та відкрити (меню *File* → *Open*) необхідний файл формальної теорії, наприклад, файл *DCRN1.thy* з

<https://doi.org/10.5281/zenodo.14254256>

4. Перейти до кінця тексту і зачекати поки зникнуть маркери червоного і фіолетового кольору справа від тексту (це може зайняти декілька хвилин).

ДОДАТОК В. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Ivanov I. Completeness of the decreasing diagrams method for proving confluence of rewriting systems of the least uncountable cardinality. Leibniz international proceedings in informatics. ISSN 1868-8969. 2025. Vol. 337. P. 25:1–25:20. [Scopus]
2. Ivanov I. On the cofinality property in the context of the hierarchy of decreasing Church-Rosser abstract rewriting systems. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2024. Vol. 3909. P. 466–479. [Scopus]
3. Ivanov I. On Newman’s lemma and non-termination. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2023. Vol. 3624. P. 14–24. [Scopus]
4. Ivanov I. Generalized Newman’s lemma for discrete and continuous systems. Leibniz international proceedings in informatics. ISSN 1868-8969. 2023. Vol. 260. P. 9:1–9:17. [Scopus]
5. Ivanov I. On induction principles for partial orders. Logica Universalis. ISSN 1661-8297. 2022. Vol. 16. P. 105–147. [Scopus]
6. Ivanov I. On Induction Principles for Diamond-Free Partial Orders. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2021. Vol. 1308. P. 166–190. [Scopus]
7. Ivanov I. On induction for diamond-free directed complete partial orders. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2020. Vol. 2732. P. 70–73. [Scopus]
8. Ivanov I., Nikitchenko M. Expressibility in the Kleene algebra of partial predicates with the complement composition. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2020. Vol. 1175. P. 50–67. [Scopus]
9. Ivanov I., Nikitchenko M. Inference rules for the partial Floyd-Hoare logic based on composition of predicate complement. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2019. Vol. 1007. P. 71–88. [Scopus]
10. Ivanov I., Nikitchenko M. On the Kleene algebra of partial predicates with predicate complement. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2019. Vol. 2393. P. 542–551. [Scopus]

11. Ivanov I., Kornilowicz A., Nikitchenko M. An inference system of an extension of Floyd-Hoare logic for partial predicates. Formalized mathematics. ISSN 1426-2630. 2018. Vol. 26, no. 2. P. 159–164. [**Web of Science**]
12. Kornilowicz A., Ivanov I., Nikitchenko M. Kleene algebra of partial predicates. Formalized mathematics. ISSN 1426-2630. 2018. Vol. 26, no. 1. P. 11–20. [**Web of Science**]
13. Ivanov I., Kornilowicz A., Nikitchenko M. Implementation of the composition-nominative approach to program formalization in Mizar. Computer science journal of Moldova. ISSN 1561-4042. 2018. Vol. 26, no.1 (76). P. 59–76. [**Web of Science**]
14. Nikitchenko M., Ivanov I., Kornilowicz A., Kryvolap A. Extended Floyd-Hoare logic over relational nominative data. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2018. Vol. 826. P. 41–64. [**Scopus**]
15. Ivanov I., Nikitchenko M. On the sequence rule for the Floyd-Hoare logic with partial pre- and post-conditions. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2018. Vol. 2104. P. 716–724. [**Scopus**]
16. Ivanov I. On the underapproximation of reach sets of abstract continuous-time systems. Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. ISSN 2075-2180. 2017. Vol. 247. P. 46–51. [**Scopus**]
17. Ivanov I., Nikitchenko M., Kryvolap A., Kornilowicz A. Simple-named complex-valued nominative data – definition and basic operations. Formalized Mathematics. ISSN 1426-2630. 2017. Vol. 25, no. 3. P. 205–216. [**Web of Science**]
18. Kornilowicz A., Kryvolap A., Nikitchenko M., Ivanov I. An approach to formalization of an extension of Floyd-Hoare logic. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2017. Vol. 1844. P. 504–523. [**Scopus**]
19. Ivanov I., Nikitchenko M., Skobelev V.G. Proving properties of programs on hierarchical nominative data. Computer science journal of Moldova. ISSN 1561-4042. 2016. Vol. 24, no. 3 (72). P. 371–398. [**Web of Science**]
20. Ivanov I. On local characterization of global timed bisimulation for abstract continuous-time systems. Lecture notes in computer science. ISSN 0302-9743. 2016. Vol. 9608. P. 216–234. [**Scopus**]
21. Ivanov I., Nikitchenko M., Abraham U. On a decidable formal theory for abstract continuous-time dynamical systems. Communications in computer and

information science. ISSN 1865-0929. 2014. Vol. 469. P. 78–99. [**Scopus**]

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

22. Ivanov I. On non-triviality of the hierarchy of decreasing Church-Rosser abstract rewriting systems. Proceedings of the 13th International Workshop on Confluence. July 9, 2024, Tallinn, Estonia. P. 30-35.
23. Ivanov I. On confluence criteria for non-terminating abstract rewriting systems. Proceedings of the 12th International Workshop on Confluence. August 23-24, 2023, Obergurgl, Austria. P. 9-13.
24. Ivanov I. On generalizations of real induction. Conference on Mathematical Foundations of Informatics. Proceedings MFOI-2020. 12-16 January 2021, Kyiv, Ukraine. P. 162-167.
25. Ivanov I. On generalized well-founded induction. Logic and its Applications. 2nd World Logic Day – January 14, 2020. Logic and its Applications, The workshop. Book of Abstracts. January 14, 2020, Kyiv. P. 7-8.
26. Ivanov I. On the partial Floyd-Hoare logic based on predicate complement. 1st World Logic Day – January 14, 2019. Logic and its Applications, The workshop. Book of Abstracts. January 14, 2019, Kyiv. P. 4-5.
27. Ivanov E.V. On inductive definitions on non-well-ordered domains and their potential applications to verification of cyber-physical systems. Прикладні системи та технології в інформаційному суспільстві : зб. тез доповідей і наук. повідомл. учасників II Міжнародної науково-практичної конференції. Київ, 1 жовтня 2018. С. 67-68.
28. Kornilowicz A., Kryvolap A., Nikitchenko M., Ivanov I. Formalization of the algebra of nominative data in Mizar. Proceedings of the 2017 Federated Conference on Computer Science and Information Systems. September 3-6, 2017, Prague, Czech Republic. P. 237-244.
29. Ivanov I., Nikitchenko M., Skobelev V.G. Properties of nominative programs specified by effective definitional schemes. Conference on Mathematical Foundations of Informatics. Proceedings MFOI-2016. Institute of Mathematics and Computer Science, July 25-30, 2016, Chisinau, Moldova. P. 222-240.
30. Ivanov I., Kornilowicz A., Nikitchenko M.S. Formalization of nominative data in Mizar. Праці Міжнародної науково-практичної конференції “Теоретичні

та прикладні аспекти побудови програмних систем” ТАAPSD’2015, 23-26 листопада 2015 р., м. Київ. С. 82-85.

31. Ivanov Ie.V., Nikitchenko M.S. On nominative Glushkov algebras. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції “В.М. Глушков – піонер кібернетики”. 11 грудня 2014, м. Київ. С. 48-49.

Праці, які додатково відображають наукові результати дисертації

32. Ivanov I. Completeness of decreasing diagrams for the least uncountable cardinality. Archive of Formal Proofs. ISSN 2150-914X. 2025. April. 319 pages.