

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ІВАНОВ ЄВГЕН В'ЯЧЕСЛАВОВИЧ



УДК 519.7

**УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРІЯ
АБСТРАКТНИХ ПЕРЕПИСУВАЛЬНИХ СИСТЕМ**

01.05.01 – теоретичні основи інформатики та кібернетики

Реферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2026

Дисертацію є рукопис.

Робота виконана в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Летичевський Олександр Олександрович,
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
завідувач відділу теорії цифрових автоматів
відділення математичної кібернетики та системного аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор
Песчаненко Володимир Сергійович,
Херсонський державний університет,
завідувач кафедри комп'ютерних наук та програмної
інженерії факультету комп'ютерних наук, фізики та
математики;

доктор технічних наук, професор
Жолткевич Григорій Миколайович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри інформаційних систем
факультету прикладної математики та інформатики.

Захист відбудеться «28» травня 2026 року о 15:00 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.09 Київського національного університету імені Тараса Шевченка (просп. Академіка Глушкова, 4д, м. Київ, 03022, аудиторія 01) із використанням засобів відеозв'язку в режимі реального часу за посиланням: <https://us05web.zoom.us/j/84524385343?pwd=VrllqNx26DKCTW62T7tAypGq5QM6bE.1> Ідентифікатор конференції: 845 2438 5343. Код доступу: G8XC8K.

Із дисертацією можна ознайомитися на офіційному сайті Науково-консультаційного центру <http://scc.knu.ua> та в Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: вулиця Володимирська, 58, Київ, 01601, зал №12.

Реферат розісланий «17» квітня 2026 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради



Петро ЗІНЬКО

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Обґрунтування вибору теми. Теорія переписувальних систем є частиною теоретичних основ інформатики, що вивчає математичні моделі покрокового перетворення (переписування) об'єктів, які, типово, є пов'язаними з процесами обчислень або логічного виводу. Історично, дана теорія походить від теорій лямбда числення та комбінаторної логіки. Методи теорії переписувальних систем мають застосування у контекстах визначення операційної семантики та реалізації мов програмування, специфікації та верифікації програмного та апаратного забезпечення, моделювання та аналізу систем у різних галузях. Розробки Київської школи кібернетики, заснованої В.М. Глушковим, що стосуються застосувань теорії переписувальних систем, включають, зокрема, мову АНАЛІТИК, систему автоматизації доведень, систему алгебраїчного програмування.

Теорія абстрактних переписувальних систем (АПС) охоплює базові результати, важливі для теорії переписувальних систем, що можуть бути сформульовані на абстрактному рівні, що не накладає обмежень на структуру та подання елементів системи і правил переписування (наприклад, принцип нетерової індукції для переписувальних систем, лема Ньюмана, метод спадних діаграм ван Оострома – де Брейна).

Однією з центральних тем класичної теорії АПС є дослідження властивості Черча-Россера (або еквівалентної властивості конфлюентності), що виражає зв'язок між відношеннями конверсії (англ. convertibility) та редукції (англ. reduction) та має як наслідок властивість існування не більше однієї нормальної форми у кожного елемента системи (єдиність нормальної форми відносно редукції, англ. unique normal form property with respect to reduction). Остання властивість може бути інтерпретована таким чином: хоча недетермінована система може допускати багато виконань, неможливо, щоб два таких виконання починалися в одному стані, але завершилися у різних станах.

Методи перевірки властивості Черча-Россера (конфлюентності) досліджувалися протягом тривалого періоду 20-го століття та на початку 21-го століття як на абстрактному рівні (характерному для теорії абстрактних переписувальних систем), так і на рівнях теорій переписувальних систем спеціального вигляду (наприклад, систем переписування термів). Зокрема, такі методи вивчалися у роботах M.H.A. Newman, J.R. Hindley, B.K. Rosen, N.G. de Bruijn, G. Huet, R. Nederpelt, J.W. Klop, V. van Oostrom та інших дослідників; пов'язані дослідження проводили А.В. Анісімов, В.Г. Боднарчук, А.Ю. Дорошенко, Г.М. Жолткевич, О.А. Летичевський, О.О. Летичевський, М.С. Львов, О.В. Лялецький, В.С. Песчаненко та інші дослідники.

Тепер методи доведення конфлюентності є добре вивченими для систем, що мають спеціальні властивості, характерні для дискретних моделей обчислень, такі як термінальність або зліченність. Подібна ситуація має місце і для інших результатів теорії АПС (наприклад, принцип нетерової індукції застосовний до термінальних АПС). Однак, визначення застосовності деяких із зазначених методів, відомих для злічених або термінальних систем, до

незліченних нетермінальних систем вважається деякими провідними дослідниками з теорії переписувальних систем важливою і фундаментальною відкритою проблемою¹.

Крім того, властивості, такі, як термінальність і зліченність не є характерними для АПС, що породжені моделями, що, в певному сенсі, поєднують недискретність, недетермінізм, невизначеність (наприклад, у сенсі інтервальних моделей невизначеності), які є важливими для сучасних міждисциплінарних напрямків, пов'язаних з інформатикою, наприклад, для кіберфізичних систем² (систем, що поєднують обчислювальні та фізичні процеси). Прикладом АПС, породженої недетермінованою дискретно-неперервною (гібридною) динамічною системою (що, наприклад, моделює поведінку кіберфізичної системи) може бути пара $(S, \rightarrow)$, де S – множина повних станів, що включають інформацію про поточні значення неперервних і дискретних змінних системи, а відношення $\rightarrow$ – таке, що $s_1 \rightarrow s_2$ тоді і тільки тоді, коли гібридна система може перейти з s_1 до s_2 або внаслідок неперервної еволюції неперервного стану межах одного дискретного стану, або внаслідок одного переходу між двома дискретними станами.

У зв'язку з вищезазначеним, для теоретичних основ інформатики є актуальною побудова узагальненої теорії АПС, що розширює та узагальнює класичні результати теорії АПС на випадки, що становлять інтерес з точки зору аналізу недискретних математичних моделей.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дисертаційна робота є складовою частиною наукових робіт, які ведуться на кафедрі програмних систем і технології факультету інформаційних технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Частина досліджень, що складають роботу, виконувалась за часткової підтримки програми Erasmus+ KA107 у 2018 та 2019 роках (академічна мобільність для наукових досліджень та викладання, Університет Білостоку, Польща).

Автор роботи був членом робочої групи WG4 “Libraries of formal proofs” проєкту “European Research Network on Formal Proofs” (Cost Action CA20111) у 2024 і 2025 році.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова теорії, що розширює та узагальнює класичні результати теорії абстрактних переписувальних систем (АПС) на випадки, що становлять інтерес з точки зору аналізу недискретних математичних моделей систем і процесів.

Завдання дослідження:

- аналіз можливості послаблення припущень класичних результатів і методів теорії АПС (наприклад, слабка або сильна нормалізація, зліченність) для розширення раніше відомих меж їх застосовності;
- розроблення нових методів аналізу властивостей АПС для випадків, на які класичні методи теорії АПС не можуть бути поширені;

¹ Endrullis J., Klop J.W., Overbeek R. Decreasing diagrams for confluence and commutation. Logical methods in computer science, 2020, P. 23:1-23:25.

² Cyber-physical systems – a concept map. URL: <http://cyberphysicalsystems.org>

- аналіз меж застосовності нових, розширених, та/або узагальнених результатів теорії АПС.

Об'єкт дослідження – абстрактні переписувальні системи.

Предмет дослідження – властивості абстрактних переписувальних систем, породжених недискретними математичними моделями, методи їх перевірки та зв'язки між такими властивостями.

Методи дослідження. У роботі використовуються математичні засади формальних методів (математична логіка, теорія абстрактних переписувальних систем), а також методи формалізації та автоматизованої перевірки доведень за допомогою комп'ютерних систем інтерактивного доведення теорем. Наприклад, доказ повноти методу спадних діаграм для доведення конфлюентності абстрактних переписувальних систем мінімальної незліченної потужності, отриманий автором дисертації, був формалізований та перевірений за допомогою відомої системи інтерактивного доведення теорем Isabelle³, що, у зв'язку з особливостями реалізації та тривалою історією даної системи, може розглядатися як свідчення про високий рівень достовірності отриманого результату.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що

- *вперше* доведено повноту методу спадних діаграм ван Оострома – де Брейна для доведення конфлюентності абстрактних переписувальних систем мінімальної незліченної потужності (попередні відомі результати: V. van Oostrom, 1994⁴ – метод є повним для доведення конфлюентності систем, що мають властивість кофінальності; J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek, 2018⁵ – метод з двома мітками є повним для доведення конфлюентності систем, що мають властивість кофінальності; також, загальновідомо, що властивість кофінальності може не виконуватись для конфлюентних абстрактних переписувальних систем будь-якої незліченної потужності); за припущення континуум-гіпотези, з отриманого у дисертації результату випливає, що метод спадних діаграм є повним для доведення конфлюентності довільних бінарних відношень на множині дійсних чисел, множині послідовностей дійсних чисел, індексованих натуральними числами, множині неперервних дійсних функцій, множині орієнтованих графів із фіксованою зліченною множиною вузлів і на різноманітних інших структурах, що становлять інтерес з точки зору інформатики та прикладної математики; доведення повноти було формалізовано та автоматично перевірено за допомогою відомої системи інтерактивного доведення теорем Isabelle, обсяг формального доказу перевищує 300 сторінок у форматі Archive of Formal Proofs⁶;

³ <https://isabelle.in.tum.de>

⁴ Van Oostrom V. Confluence for abstract and higher-order rewriting. PhD thesis, Vrije Universiteit Amsterdam, 1994.

⁵ Endrullis J., Klop J.W., Overbeek R. Decreasing diagrams with two labels are complete for confluence of countable systems. 3rd International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2018), 2018, P. 14:1-14:15.

⁶ https://isa-afp.org/entries/Completeness_Decreasing_Diagrams_for_N1.html

- *вперше* отримано розв'язки проблем неповноти методу спадних діаграм з двома мітками та відсутності колапсу на рівні 2 ієрархії систем, що мають спадну властивість Черча-Россера (дані проблеми були сформульовані J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek у 2018 році як відкриті проблеми⁷);
- *вперше* запропоновано узагальнення леми Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем;
- *вперше* запропоновано спеціальні принципи індукції для доведення властивостей елементів переписувальних систем, що не задовольняють припущенням про термінальність та зліченність;
- *дістали подальшого розвитку* формальні теорії для аналізу властивостей абстрактних недискретних динамічних моделей.

Теоретичне і практичне значення отриманих результатів. Дисертація має теоретичний характер та робить істотний внесок до теорії переписувальних систем. Отримані результати суттєво удосконалюють розуміння меж застосовності класичних методів теорії абстрактних переписувальних систем та випадків, коли є необхідність застосування нових методів аналізу АПС.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертації отримані автором особисто. З публікацій зі співавторами на захист виносяться лише результати, отримані автором дисертації. У роботах 1–6 автору дисертації належать неформалізовані і формалізовані доведення основних результатів (за допомогою систем інтерактивного доведення теорем). У роботах зі співавторами 8-15, 17-19, 21, 28-31 автору дисертації належать формулювання ідей, визначення цілей і методів дослідження, неформалізовані доведення основних результатів.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати були представлені на міжнародних наукових конференціях або воркшопах, зокрема:

- 10th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2025), July 14-20, 2025, Birmingham, United Kingdom;
- 13th International Workshop on Confluence (IWC 2024), July 9, 2024, Tallinn, Estonia;
- 12th International Workshop on Confluence (IWC 2023), August 23-24, 2023, Obergurgl, Austria;
- XI International Scientific Conference "Information Technology and Implementation" (IT&I-2024), November 20-21, 2024, Kyiv, Ukraine;
- 8th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2023), July 3-6, 2023, Rome, Italy;
- X International Scientific Conference "Information Technology and Implementation" (IT&I-2023), November 20-21, 2023, Kyiv, Ukraine;
- 16th International Conference on Information and Communication Technologies in Education, Research, and Industrial Applications (ICTERI 2020), Kharkiv, Ukraine, October 6-10, 2020;

⁷ Endrullis J., Klop J.W., Overbeek R. Decreasing diagrams with two labels are complete for confluence of countable systems. 3rd International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2018), 2018, P. 14:1-14:15 [Open Problem 32, 33]

- Conference on Mathematical Foundations of Informatics. MFOI-2020. 12-16 Jan. 2021, Kyiv, Ukraine;
- Logic and its Applications. 2nd World Logic Day – January 14, 2020. The workshop, Kyiv, Ukraine;
- Logic and its Applications. 1st World Logic Day – January 14, 2019. The workshop, Kyiv, Ukraine.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 21 науковій праці у закордонних виданнях, проіндексованих у наукометричних базах Web of Science та/або Scopus. Апробацію матеріалів дисертації засвідчують 10 праць, додатково відображає наукові результати дисертації 1 праця.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотацій, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, поділених на підрозділи, висновків, списку використаних джерел, трьох додатків. Текст містить 13 рисунків. Список використаних джерел включає 214 найменувань і займає 15 сторінок. Загальний обсяг роботи становить 308 сторінок, обсяг основного тексту становить 265 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами, вказано мету, завдання, об'єкт, предмет, методи дослідження, наукову новизну, теоретичне і практичне значення одержаних результатів, зазначено особистий внесок здобувача, апробацію матеріалів дисертації, публікації, структуру та обсяг роботи.

Розділ 1 присвячено першим двом основним результатам дисертаційного дослідження – доказу повноти методу спадних діаграм ван Оострома – де Брейна для доведення конфлюентності АПС мінімальної незліченної потужності і розв'язанню проблем неповноти методу спадних діаграм з двома мітками та відсутності колапсу на рівні 2 ієрархії систем, що мають спадну властивість Черча-Россера.

У **підрозділі 1.1** отримано, що метод спадних діаграм ван Оострома – де Брейна є повним для доведення конфлюентності АПС мінімальної незліченної потужності. Даний результат було формалізовано та автоматично перевірено за допомогою відомої системи інтерактивного доведення теорем Isabelle. Даний результат фундаментально відрізняється від раніше відомих результатів стосовно повноти методу спадних діаграм для спеціальних класів АПС як охопленням широкого класу АПС, так і тим, що він *не* спирається (і *не* міг би спиратися) на властивість кофінальності⁸ для побудови розмітки АПС в усіх випадках, яка, в загальному випадку, не виконується для АПС мінімальної незліченної потужності. Також, за припущення континуум-гіпотези, метод спадних діаграм є повним для доведення конфлюентності АПС потужності континууму, що включають АПС породжені широким колом математичних

⁸ Klop J.W. Combinatory Reduction Systems. PhD thesis, Rijks-universiteit Utrecht, 1980.

моделей, що становлять інтерес з точки зору інформатики та прикладної математики.

Нижче наведені допоміжні визначення з підрозділу 1.1 (вони *не* належать автору дисертації).

*Абстрактна переписувальна система (АПС)*⁹ – це пара $(A, \rightarrow)$, де A – це множина, $\rightarrow$ – бінарне відношення на A .

*Розмічена (або індексована) переписувальна система (РПС)*⁹ – це трійка $(A, I, (\rightarrow_i)_{i \in I})$, де A, I – це множини, $(\rightarrow_i)_{i \in I}$ – це індексована сім'я, така, що $\rightarrow_i \subseteq A \times A$ для всіх $i \in I$.

*Транзитивне фундове відношення*⁹ на множині I – це бінарне відношення $< \subseteq I \times I$, таке, що $\forall a, b, c \in I (a < b \wedge a < c \Rightarrow a < c)$ і, крім того, *не* існує нескінченної послідовності $i_1, i_2, i_3, \dots$ елементів I , індексованої натуральними числами, такої, що $i_{k+1} < i_k$ для кожного натурального k .

АПС $(A, \rightarrow)$ називається *конфлюентною*⁹, якщо

$$\forall a, b, c \in A (a \rightarrow^* b \wedge a \rightarrow^* c \Rightarrow (\exists d \in A b \rightarrow^* d \wedge c \rightarrow^* d)),$$

де $\rightarrow^*$ позначає рефлексивно-транзитивне замикання $\rightarrow$ на множині A .

АПС $(A, \rightarrow)$ називається *локально конфлюентною*⁹, якщо

$$\forall a, b, c \in A (a \rightarrow b \wedge a \rightarrow c \Rightarrow (\exists d \in A b \rightarrow^* d \wedge c \rightarrow^* d)),$$

РПС $(A, I, (\rightarrow_i)_{i \in I})$ має *спадну властивість Черча-Россера*¹⁰, якщо існує транзитивне фундове відношення $< \subseteq I \times I$ та підмножини $I_h, I_v \subseteq I$, такі, що $\bigcup_{i \in I} \rightarrow_i = \bigcup_{i \in I_v} \rightarrow_i = \bigcup_{i \in I_h} \rightarrow_i$ і для кожних індексів $i \in I_v, j \in I_h$, та елементів $a, b, c \in A$, таких, що

$$a \rightarrow_i b \wedge a \rightarrow_j c,$$

існують елементи $b', b'', c', c'', d \in A$, такі, що:

$$\left(b \xrightarrow[\gamma i \cap I_h]{*} b' \xrightarrow[\{j\} \cap I_h]{=} b'' \xrightarrow[(\gamma i \cup \gamma j) \cap I_h]{*} d \right) \wedge \left(c \xrightarrow[\gamma j \cap I_v]{*} c' \xrightarrow[\{i\} \cap I_v]{=} c'' \xrightarrow[(\gamma i \cup \gamma j) \cap I_v]{*} d \right),$$

де:

- для кожного $i \in I$, γi позначає множину індексів $\{k \in I \mid k < i\}$,
- символи вигляду $\xrightarrow[*]{K}$ та $\xrightarrow{K}$, де K – множина індексів, позначають, відповідно, рефлексивно-транзитивне та рефлексивне замикання відношення $\bigcup_{k \in K} \rightarrow_k$ на множині A .

АПС $(A, \rightarrow)$ має *спадну властивість Черча-Россера*¹⁰, якщо існує множина I та індексована сім'я $(\rightarrow_i)_{i \in I}$ бінарних відношень на A , такі, що $\rightarrow = \bigcup_{i \in I} \rightarrow_i$ і РПС $(A, I, (\rightarrow_i)_{i \in I})$ має спадну властивість Черча-Россера.

АПС $(A, \rightarrow)$ *належить класу* DCR_γ^{11} , де γ – ординальне число, якщо існує індексована сім'я $(\rightarrow_i)_{i \in I}$ бінарних відношень $\rightarrow_i \subseteq A \times A$, де $I = \{i \mid i < \gamma\}$, така,

⁹ стандартне визначення

¹⁰ Van Oostrom V. Confluence for abstract and higher-order rewriting. PhD thesis, Vrije Universiteit Amsterdam, 1994.

¹¹ Endrullis J., Klop J.W., Overbeek R. Decreasing diagrams for confluence and commutation. Logical Methods in Computer Science, 16:23:1–23:25, 2020.

що $\rightarrow = \cup_{i \in I} (\rightarrow_i)$ і для будь-яких ординальних чисел $\alpha, \beta < \gamma$ та елементів $a, b, c \in A$, таких, що $a \rightarrow_\alpha b$ та $a \rightarrow_\beta c$, існують елементи $b', b'', c', c'', d \in A$, такі, що задовольняють умовам:

$$(b, b') \in (\rightarrow_{<\alpha})^* \wedge (b', b'') \in (\rightarrow_\beta)^= \wedge (b'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^*,$$

$$(c, c') \in (\rightarrow_{<\beta})^* \wedge (c', c'') \in (\rightarrow_\alpha)^= \wedge (c'', d) \in (\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta})^*,$$

де

- $\rightarrow_{<\alpha}$ позначає $\bigcup_{i < \alpha} \rightarrow_i$, $\rightarrow_{<\alpha \vee <\beta}$ позначає $\bigcup_{i < \alpha \vee i < \beta} \rightarrow_i$,
- верхні індекси $=$ та $*$ використовуються для позначення, відповідно, рефлексивного та рефлексивно-транзитивного замикання бінарного відношення на A .

Нехай U є непорожньою множиною.

Теорема 1.1.1. *Якщо (U, r) є конфлюентною АПС і $|r| \leq \omega_1$, то (U, r) належить класу DCR_3 .*

З теореми 1.1.1 випливає, що:

- 1) метод спадних діаграм ван Оострома – де Брейна є повним для доведення конфлюентності АПС потужності $\aleph_1$;
- 2) за припущення континуум-гіпотези, метод спадних діаграм ван Оострома – де Брейна є повним для доведення конфлюентності бінарних відношень на множині дійсних чисел (або скінченновимірних дійсних векторів або матриць), множині нескінченних графів на фіксованій зліченній множині вершин, множині послідовностей натуральних або дійсних чисел, індексованих натуральними числами, множині неперервних дійсних функцій та на інших множинах потужності континууму.

У підрозділі також наведено формальну версію¹² теореми 1.1.1 для системи інтерактивного доведення теорем Isabelle¹³ та логіки HOL та надано опис структури формального доказу даного результату, що був перевірений автоматично за допомогою системи Isabelle. Повний текст¹² формальної теорії, що складає дане доведення, перевищує 10 000 рядків.

У **підрозділі 1.2** описано формальний доказ¹⁴ для системи Isabelle та логіки HOL, що показує, що існує конфлюентна АПС, що *не* належить класу DCR_2 , але належить класу DCR_3 . З даного результату випливають відповіді на дві відкриті проблеми стосовно методу спадних діаграм, сформульовані J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek¹⁵ у 2018 році:

- 1) метод спадних діаграм з двома мітками *не* є повним
- 2) ієрархія абстрактних переписувальних систем, що мають спадну властивість Черча–Россера *не* має колапсу на рівні 2.

¹² <https://doi.org/10.5281/zenodo.14254256>

¹³ <https://isabelle.in.tum.de>

¹⁴ <https://doi.org/10.5281/zenodo.11571490>

¹⁵ Endrullis J., Klop J.W., Overbeek R. Decreasing diagrams with two labels are complete for confluence of countable systems. 3rd International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2018), 2018, P. 14:1-14:15 [Open Problem 32, 33]

Також, слід відмітити, що використання класу DCR_3 у теоремі 1.1.1 є *оптимальним* у тому сенсі, що заміна DCR_3 на DCR_2 у формулюванні теореми 1.1.1 робить таке формулювання хибним твердженням¹⁶.

У **підрозділі 1.3** надано формулювання та доведення такої теореми про зв'язний кофінальний підграф, що може бути використана для пояснення зв'язку властивості кофінальності з рівнем 2 в DCR ієрархії.

Теорема 1.3.1. Нехай $(A, \rightarrow)$, $(B, \rightarrow')$ є АПС, такими, що $(B, \rightarrow')$ є слабко зв'язним підграфом $(A, \rightarrow)$ і B є кофінальною підмножиною у передвпорядкованій множині $(A, \rightarrow^*)$. Тоді для будь-якого ненульового ординалу γ , якщо $(B, \rightarrow')$ належить DCR_γ , то $(A, \rightarrow)$ належить $DCR_{\gamma+1}$.

Варіант даної теореми для скінченних рівнів DCR ієрархії було формалізовано¹⁷ за допомогою системи Isabelle.

У **підрозділі 1.4** наведено висновки з **розділу 1**.

Розділ 2 присвячено узагальненню леми Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем.

Одним з природних варіантів послаблення умови сильної нормалізації у лемі Ньюмана є умова строгої індуктивності: АПС $(A, \rightarrow)$ є строго індуктивною, якщо кожний непорожній ланцюг в A у сенсі передпорядку $\rightarrow^*$ має точну верхню межу. Відомий контрприклад Ньюмана¹⁸ (ациклічного, індуктивного, локально конфлюентного відношення, що *не* є конфлюентним) *не* може бути використаний, щоб спростувати гіпотезу про еквівалентність умов локальної конфлюентності і конфлюентності для ациклічних строго індуктивних АПС.

У розділі 2 доведено, що еквівалентність умов локальної конфлюентності і конфлюентності для ациклічних строго індуктивних АПС має місце, якщо множина незвідних елементів АПС є не більш ніж зліченною. Однак, при цьому, існує ациклічна, строго індуктивна, локально конфлюентна АПС, що не є конфлюентною. Остання АПС може розглядатись як посилення контрприкладу Ньюмана, однак вона є необхідно незліченною і суттєво відрізняється від звичайного контрприкладу Ньюмана (який є зліченим). Також, у розділі запропоноване розширення цих результатів до теореми, що узагальнює лему Ньюмана для всіх строго індуктивних АПС.

У **підрозділі 2.1** отримано такий результат.

Теорема 2.1.1. Нехай $(X, \rightarrow)$ є ациклічною строго індуктивною АПС, такою, що множина всіх її незвідних елементів є *не* більш ніж зліченною. Тоді $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною тоді і тільки тоді коли $(X, \rightarrow)$ є локально конфлюентною.

Також, у підрозділі 2.1 показано, що існує ациклічна, строго індуктивна, локально конфлюентна АПС, що не є конфлюентною.

¹⁶ <https://doi.org/10.5281/zenodo.14740062>

¹⁷ <https://doi.org/10.5281/zenodo.17014316>

¹⁸ Huet G. Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems. Journal of the ACM. 1980. Vol. 27, no. 4. P. 797-821 [Figure 6a]

Дані факти було формалізовано¹⁹ та доведено за допомогою системи Isabelle та логіки HOL. З них випливає, що гіпотеза про еквівалентність умов локальної конфлюентності і конфлюентності для ациклічних строго індуктивних АПС є хибною, але будь-який контрприклад до неї є необхідно незліченним і суттєво відрізняється від контрприкладу Ньюмана (який є зліченим).

У підрозділі 2.2 отримано третій основний результат дисертаційного дослідження – запропоновано узагальнення леми Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем (теорема 2.2.1). Звичайна лема Ньюмана для термінальних АПС може розглядатись як наслідок даної теореми.

Для будь-якої передвпорядкованої множини $(X, \leq)$ будемо казати, що множина $A \subseteq X$ є

- замкненою в $(X, \leq)$, якщо для кожного непорожнього ланцюга C в $(X, \leq)$ (тобто $C \subseteq X$, $C \neq \emptyset$ і C задовольняє умову $\forall x, y \in C \ x \leq y \vee y \leq x$), якщо C має точну верхню межу $x \in X$ і $C \subseteq A$, то $x \in A$;
- відкритою в $(X, \leq)$, якщо $X \setminus A$ є замкненою в $(X, \leq)$;
- відносно відкритою в B у сенсі передпорядку $\leq$, де $B \subseteq X$ є надмножиною A , якщо A відкрита у $(B, \leq \cap (B \times B))$.

У підрозділі на основі принципу відкритої індукції Рауля²⁰ для повних частково-впорядкованих множин запропоноване таке означення:

АПС $(X, \rightarrow)$ має коректний принцип відкритої індукції, якщо для кожної відкритої множини $S \subseteq X$ у передвпорядкованій множині $(X, \rightarrow^*)$, якщо S є нетерово-індуктивною підмножиною в АПС $(X, \rightarrow)$, тобто виконується умова

$$\forall x \in X ((\forall y \in X (x \rightarrow^+ y \Rightarrow y \in S)) \Rightarrow x \in S),$$

то $S = X$.

Твердження 2.2.2. Для будь-якої АПС $(X, \rightarrow)$ такі умови еквівалентні:

1. $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною та ациклічною АПС;
2. $(X, \rightarrow)$ має коректний принцип відкритої індукції.

У підрозділі запропоновані такі визначення, де $\rightarrow^*$ позначає рефлексивно-транзитивне замикання відношення $\rightarrow$ на X .

В АПС $(X, \rightarrow)$:

- елемент $x \in X$ є *квазі-незвідним*, якщо для кожного $y \in X$ з умови $x \rightarrow^* y$ випливає, що $y \rightarrow^* x$;
- елемент $x' \in X$ є *квазі-нормальною формою* x (або, скорочено, $x' \in \text{КВНФ } x$), якщо $x \rightarrow^* x'$ і x' є квазі-незвідним елементом;
- елементи $x, x' \in X$ є *КВНФ-еквівалентними*, якщо

$$\{ y \in X \mid y \in \text{КВНФ } x \} = \{ y \in X \mid y \in \text{КВНФ } x' \} .$$

АПС $(X, \rightarrow)$ називається

¹⁹ <https://doi.org/10.5281/zenodo.17014305>

²⁰ Raoult J.-C. Proving open properties by induction. Information processing letters. 1988. Vol. 29. P. 19-23 [Theorem 3.3]

- *квазі-нормалізуючою*, якщо для кожного елементу $x \in X$ існує елемент $x' \in X$, такий, що x' є квазі-нормальною формою x ;
- *відкрито квазі-нормалізуючою*, якщо $(X, \rightarrow)$ є квазі-нормалізуючою і для кожних $x, x' \in X$, таких, що x' є квазі-нормальною формою x , множина $\{ y \in X \mid x \rightarrow^* y \text{ та } y, x' \in \text{КВНФ-еквівалентними} \}$ відносно відкрита у множині $\{ y \in X \mid x \rightarrow^* y \}$ відносно відношення передпорядку $\rightarrow^*$;
- *квазі-локально конфлюентною*, якщо для кожного елементу $a \in X$ існує підмножина $S \subseteq \{ x \in X \mid a \rightarrow^+ x \}$ (де $\rightarrow^+$ позначає транзитивне замикання $\rightarrow$), така, що наведені нижче умови 1-2 виконуються:

1. *умова 2-консистентності*: $\forall b, c \in S \exists d \in X (b \rightarrow^* d \wedge c \rightarrow^* d)$;

2. *умова коініціальності*:

$$\forall x \in X (a \rightarrow^+ x \Rightarrow ((x \rightarrow^* a) \vee (\exists b \in S b \rightarrow^* x \wedge \neg (b \rightarrow^* a))) .$$

У підрозділі 2.2 наведено формулювання такої теореми, що узагальнює лему Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем:

Теорема 2.2.1. Нехай $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною АПС. Тоді $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною тоді і тільки тоді, коли $(X, \rightarrow)$ є відкрито квазі-нормалізуючою і квазі-локально конфлюентною.

У підрозділі 2.2 також наведена формальна версія²¹ теореми 2.2.1, для системи Isabelle та логіки HOL та надано опис структури формального доказу²¹ формальної версії теореми 2.2.1, перевіреного за допомогою системи Isabelle.

У підрозділі також вказано, що:

1) теорема 2.2.1 може розглядатись як узагальнення леми Ньюмана для строго індуктивних АПС; лема Ньюмана може бути отримана як наслідок теореми 2.2.1 та таких фактів, наведених у підрозділі 2.2:

- кожна термінальна АПС є строго індуктивною та ациклічною;
- кожна термінальна АПС є відкрито квазі-нормалізуючою;
- кожна локально конфлюентна ациклічна АПС є квазі-локально конфлюентною;

2) жодна з умов *строгої* індуктивності, *відкритої* квазі-нормалізації та *квазі-локальної* конфлюентності *не* може бути сама по собі вилучена з формулювання теореми 2.2.1:

- з контрприкладу Ньюмана²² випливає, що твердження “якщо $(X, \rightarrow)$ є індуктивною АПС, то $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною тоді і тільки тоді, коли $(X, \rightarrow)$ є відкрито квазі-нормалізуючою та квазі-локально конфлюентною” є **хибним**;
- з контрприкладу Хіндлі²² випливає, що твердження “якщо $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною АПС, то $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною тоді і тільки тоді, коли $(X, \rightarrow)$ є відкрито квазі-нормалізуючою та локально конфлюентною” є **хибним**;

²¹ <https://doi.org/10.5281/zenodo.7855691>

²² Huet G. Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems. Journal of the ACM. 1980. Vol. 27, no. 4. P. 797-821

- твердження “якщо $(X, \rightarrow)$ є строго індуктивною АПС, то $(X, \rightarrow)$ є конфлюентною тоді і тільки тоді, коли $(X, \rightarrow)$ є квазі-нормалізуючою та квазі-локально конфлюентною” також є **хибним**, що може бути встановлено за допомогою такого (некласичного) контрприкладу: АПС $(X, \rightarrow)$, де у якості X використовується множина $[0,1] \times [0,1]$ (де $[0,1]$ позначає дійсний проміжок), а відношення редукції $\rightarrow$ визначається таким чином: $(x, t) \rightarrow (x', t') \Leftrightarrow (x \leq x' \wedge t < t' \wedge x' - x \leq t' - t)$. Одна з можливих інтерпретацій $\rightarrow$ – це кон’юнкція умови $x \leq x'$ та умови виконання відношення строгого причинного²³ порядку на $(1+1)$ -вимірному просторі-часі Мінковського, що обмежені на X .
У **підрозділі 2.3** наведено висновки з розділу 2.

Розділ 3 присвячено побудові спеціальних принципів індукції для доведення властивостей елементів переписувальних систем і частково впорядкованих множин, що не задовольняють припущенням про термінальність та зліченність.

З класичної теорії переписувальних систем відомо, що АПС є термінальною тоді і тільки тоді, коли для неї виконується принцип нетерової індукції²⁴. Даний факт є корисним для доведення універсальних властивостей елементів термінальних АПС. Однак АПС, породжені недискретними моделями часто не задовольняють умові термінальності. Тому для них принцип нетерової індукції не може бути застосовним і є актуальним пошук альтернативних принципів доведення універсальних властивостей елементів АПС, що не обов'язково є термінальними. У розділі 3 запропоновано такі принципи. У тому числі, у розділі запропоновано принцип індукції для вільних від алмазів повних частково впорядкованих множин (або ациклічних АПС, що породжують такі частково впорядковані множини) і запропоноване спільне узагальнення принципів фундової і дійсної індукції. Також, у розділі запропоновано загальний підхід до формулювання принципів індукції для різних структур.

У **підрозділі 3.1** запропонована така теорема, що може розглядатись як *обернена* теорема до теореми Рауля²⁰ про відкриту індукцію (де $<$ позначає строгий порядок, що відповідає $\leq$).

Теорема 3.1.1. Нехай $(X, \leq)$ є частково впорядкованою множиною. Припустимо, що єдиною відкритою множиною $S \subseteq X$ (в сенсі підрозділу 2.2), що задовольняє умову

(1) для кожного $x \in X$, якщо $\forall y \in X (x < y \Rightarrow y \in S)$, то $x \in S$,
є сама множина X (тобто з того, що $S \subseteq X$, S відкрита і (1) випливає $S = X$).

Тоді $(X, \leq)$ є повною частково впорядкованою множиною.

²³ Panangaden P. Causality in physics and computation. Theoretical computer science. 2014. Vol. 546. P. 10-16.

²⁴ Huet G. Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems. Journal of the ACM. 1980. Vol. 27, no. 4. P. 797-821.

Передвпорядкована (в т.ч. частково впорядкована) множина $(X, \leq)$ є вільною від алмазів (англ. diamond-free), якщо²⁵ для всіх $a, b, c, d \in X$ виконується імплікація

$$(a \leq b \leq d \wedge a \leq c \leq d) \Rightarrow (b \leq c \vee c \leq b).$$

У підрозділі 3.1 запропоноване таке означення.

Підмножина $S \subseteq X$ у частково впорядкованій множині $(X, \leq)$ називається *df-індуктивною*, якщо

- (1) для кожного $x \in X$ якщо $\forall y \in X (x < y \Rightarrow y \in S)$, то $x \in S$;
- (2) для кожних елементів $x \in X$ і $z \in S$, таких, що $x < z$ і $\sup_{\leq}[x, z) = z$ існує елемент $y \in [x, z)$, такий, що $[y, z) \subseteq S$.

У підрозділі 3.1 запропоновано принцип індукції для вільних від алмазів повних частково впорядкованих множин, що надається такою теоремою.

Теорема 3.1.2. Нехай $(X, \leq)$ є вільною від алмазів частково впорядкованою множиною. Тоді $(X, \leq)$ є повною частково впорядкованою множиною тоді і тільки тоді, коли єдиною df-індуктивною підмножиною множини X є сама множина X .

У підрозділі 3.1 також зазначено, що теорема 3.1.2 може бути переформульована для ациклічних АПС $(X, \rightarrow)$, вважаючи, що $\leq \in \rightarrow^*$.

Також розглянуто питання визначення узагальнення цього принципу індукції для доведення універсальних властивостей елементів АПС, що не задовольняють умовам термінальності, зліченності, строгої індуктивності.

Запропоновані такі визначення.

Нехай $(X, \leq)$ є непорожньою частково-впорядкованою множиною, а $C(X, \leq)$ позначає множину усіх насичених ланцюгів у $(X, \leq)$, що включають усі свої нижні межі.

Підмножина $S \subseteq X$ у частково впорядкованій множині $(X, \leq)$ називається *загально індуктивною* відносно підмножини $S' \subseteq C(X, \leq)$, якщо виконуються такі умови:

1. якщо $c \in S'$ і x є найбільшим елементом c , то $x \in S$;
2. якщо $a \in C(X, \leq)$ і $\forall b \in C(X, \leq) (a \subset b \Rightarrow b \in S')$, то $a \in S'$;
3. якщо $c \in S'$ не має найбільшого елементу, то існує елемент $a \in C(X, \leq)$, такий, що $a \subset c$ і $\forall b \in C(X, \leq) (a \subseteq b \subseteq c \Rightarrow b \in S')$.

У частково-впорядкованій множині $(X, \leq)$ виконується *загальний принцип індукції*, якщо для будь-яких $S \subseteq X$ та $S' \subseteq C(X, \leq)$, якщо S є загально індуктивною відносно S' , то $S=X$.

У АПС $(X, \rightarrow)$ виконується *загальний принцип індукції*, якщо $(X, \rightarrow^*)$ є частково-впорядкованою множиною та у $(X, \rightarrow^*)$ виконується загальний принцип індукції.

Теорема 3.1.3. У будь-якій частково-впорядкованій множині виконується загальний принцип індукції.

²⁵ стандартне визначення

Наслідок 3.1.1. У будь-якій ациклічній АПС виконується загальний принцип індукції.

У підрозділі 3.1 зазначено, що з теореми 3.1.3 можуть бути отримані спеціальні принципи індукції для доведення універсальних властивостей елементів конкретних впорядкованих структур або АПС.

Наприклад, якщо $(X, \leq)$ є множиною цілих чисел зі звичайним лінійним порядком на них, а S' є фіксованою множиною

$$\{\{y \in X \mid y \leq x\} \mid x \in S\} \cup \{X\},$$

то умова загальної індуктивності множини $S \subseteq X$ відносно S' зводиться до таких:

- $((\forall b > a \ b \in S) \Rightarrow a \in S)$, що відповідає припущенню принципу нетерової індукції;

- $\exists a \in X \ \forall x \geq a \ x \in S$ – додаткова умова (база індукції), необхідна, оскільки у $(X, \leq)$ не виконується принцип нетерової індукції.

Таким чином, для доведення того, що предикат $P(x)$, такий, що $P(x) \Leftrightarrow (x \in S)$, є істинним на всіх елементах X , достатньо довести

$$((\forall b > a \ b \in S) \Rightarrow a \in S) \wedge (\exists a \in X \ \forall x \geq a \ x \in S).$$

Якщо $(X, \leq)$ є проміжком дійсних чисел $[0, 1]$ зі звичайним порядком, а S' є фіксованою множиною

$$\{[0, x] \mid x \in S\} \cup \{[0, x) \mid x \in S \wedge x > 0\},$$

то умова загальної індуктивності множини S відносно S' зводиться до таких:

- $\forall x \in [0, 1] \ ((x, 1] \subseteq S \Rightarrow x \in S)$;

- $\forall x \in (0, 1] \ (x \in S \Rightarrow \exists y < x \ [y, x] \subseteq S)$.

Дані умови відповідають припущенням принципу дійсної індукції²⁶, застосованому до $([0, 1], \leq^{-1})$, тобто до $[0, 1]$ з порядком, оберненим до звичайного.

У підрозділі 3.2 запропоновано загальний підхід до формулювання принципів індукції для різних структур, цей підхід застосовано до частково впорядкованих множин. Зокрема, отримано наведене нижче спільне узагальнення принципів фундової і дійсної індукції, що може бути застосоване до локально вільних від алмазів вгору повних вниз частково впорядкованих множин (або ациклічних АПС, що породжують такі частково впорядковані множини).

Частково впорядкована множина $(X, \leq)$ є *локально вільною від алмазів вгору*, якщо для кожного $x \in X$ існує підмножина $O \subseteq X$, така, що

1) $x \in O$;

2) $C \cap O \neq \emptyset$ для кожного непорожнього $\leq$ -ланцюга C , такого, що $\inf_{\leq} C = x$;

3) $(x, a] \cap O \neq \emptyset$ для кожного елементу $a \in X$, такого, що $x < a$;

4) O є вільною від алмазів (де O розглядається як породжена частково впорядкована підмножина).

Твердження 3.2.3.

²⁶ Clark P. The instructor's guide to real induction. Mathematics magazine. 2019. Vol. 92. P. 136-150.

(1) Кожна фундована (зокрема скінченна) частково впорядкована множина є локально вільною від алмазів вгору і повною вниз.

(2) Кожна лінійно впорядкована множина, що є повною ґраткою (зокрема дійсний проміжок $[0, 1]$ зі звичайним порядком) є локально вільною від алмазів вгору і повною вниз.

У підрозділі зазначено (**твердження 3.2.4** та **теорема 3.2.2**), що при така формула, що позначається як $I_{\text{hyb}} [H \rightarrow P]$, може бути використана як засновок принципу індукції для доведення $\forall x P(x)$, де P є унарним предикатним символом, що інтерпретується як предикат на локально вільній від алмазів вгору частково впорядкованій множині:

$$\begin{aligned} & (\forall x_1 (\forall x_2 (x_2 < x_1 \rightarrow P(x_2))) \rightarrow P(x_1)) \wedge (\forall x_1 \forall x_2 \\ & (P(x_1) \wedge x_1 < x_2 \wedge (\forall x_3 ((\forall x_4 (x_1 < x_4 \wedge x_4 \leq x_2 \rightarrow x_3 \leq x_4)) \rightarrow x_3 \leq x_1))) \rightarrow \\ & \rightarrow (\exists x_4 (x_1 < x_4 \wedge x_4 \leq x_2 \wedge \forall x_5 (x_1 < x_5 \wedge x_5 \leq x_4 \rightarrow P(x_5))))). \end{aligned}$$

Даний результат було формалізовано²⁷ за допомогою системи Isabelle.

У підрозділі 3.3 наведено висновки з розділу 3.

Розділ 4 присвячено дослідженню формальних теорій для аналізу властивостей абстрактних недискретних динамічних моделей.

У підрозділі 4.1 запропоновано підхід до узагальнення абстрактних та розмічених переписувальних систем, що дозволяє формалізувати неперервні у часі процеси перетворення елементів системи (переписування), що базується на застосуванні моделі недетермінованих повних марківських систем²⁸ (НПМС). У підрозділі запропоновано розв'язну формальну теорію, що може бути використана для формулювання та перевірки властивостей траєкторій НПМС.

Нехай $\mathbf{N}$ позначає множину натуральних чисел, а $\mathbf{T} = \{ t_i \mid i = 0, 1, 2, \dots \}$, $\mathbf{C} = \{ C_i \mid i = 0, 1, 2, \dots \}$, $\mathbf{F} = \{ F_i \mid i = 0, 1, 2, \dots \}$ є зліченими множинами (різних) імен змінних, що попарно не перетинаються. Нехай $\mathbf{A}$ є множиною усіх атомарних формул таких виглядів: $D_i(t_k)$, $E_{i,j}^-(t_k)$, $E_{i,j}^+(t_k)$, $L_{i,j}(t_k)$, $R_{i,j}(t_k)$, $t_i < t_j$, $t_i = t_j$, $t_i \in C_j$, $t_i \in F_j$ ($i, j, k \in \mathbf{N}$), де D_i для всіх $i \in \mathbf{N}$ і $E_{i,j}^-$, $E_{i,j}^+$, $L_{i,j}$, $R_{i,j}$ для $i, j \in \mathbf{N}$ є різними унарними предикатними символами, а $<$, $=$, $\in$ є символами бінарних предикатів.

Нехай $\mathbf{L}$ є множиною всіх (правильно побудованих) формул, утворених з атомарних формул з $\mathbf{A}$, символів логічних сполучників ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) і імен змінних з $\mathbf{T}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{F}$, зв'язаних $\exists$ та $\forall$ (наприклад, $\forall t_1 \exists t_2 L_{1,2}(t_1) \wedge t_1 < t_2$).

Нехай $\mathbf{L}^c$ є множиною всіх речень (замкнених формул) в $\mathbf{L}$.

²⁷ <https://doi.org/10.5281/zenodo.17014351>

²⁸ Поняття, запропоноване автором у кандидатській дисертації на основі поняття системи розв'язків О. Гаєка: Іванов Є.В. Investigation of abstract systems with inputs and outputs as partial functions of time. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2013.

Нехай $Cl(X)$ та $F_\sigma(X)$, де $X \subseteq \mathbf{R}$ є непорожньою множиною, позначають множини всіх замкнених підмножин і F_σ -підмножин множини X відповідно у сенсі індукованої топології на X .

Нехай $\mathbf{S}$ є множиною всіх алгебраїчних структур вигляду

$$(T, <, (D_i)_{i \in \mathbf{N}}, (E^-_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}, (E^+_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}, (L_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}, (R_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}})$$

де носій $T = [0, +\infty)$ – множина усіх невід’ємних дійсних чисел, $<$ є відношенням звичайного строгого порядку на T , а $D_i, E^-_{ij}, E^+_{ij}, L_{ij}, R_{ij}$ для $i, j \in \mathbf{N}$ є унарними предикатами на T .

Нехай $|\models \subseteq \mathbf{S} \times \mathbf{L}$ є відношенням, що визначене таким чином: для кожної формули $\Phi \in \mathbf{L}$ і алгебраїчної структури

$$S = (T, <, (D_i)_{i \in \mathbf{N}}, (E^-_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}, (E^+_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}, (L_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}, (R_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}) \in \mathbf{S},$$

відношення $S \models \Phi$ виконується тоді і тільки тоді, коли універсальне замикання Φ виконується у структурі S в сенсі інтерпретації, для якої змінні $t_1, t_2, \dots$ приймають значення в множині T , змінні $C_1, C_2, \dots$ приймають значення в $Cl(T)$, змінні $F_1, F_2, \dots$ приймають значення в $F_\sigma(T)$, символ $<$ інтерпретується як відношення $<$ на T , символ $=$ інтерпретується рівність на T , символ $\in$ інтерпретується як належність елемента множині, а символи $D_i, E^-_{ij}, E^+_{ij}, L_{ij}, R_{ij}$ для $i, j \in \mathbf{N}$ інтерпретуються як предикати $D_i, E^-_{ij}, E^+_{ij}, L_{ij}, R_{ij}$ на T відповідно.

Нехай $\mathbf{M}$ є класом всіх пар індексованих сімей $((s_i)_{i \in \mathbf{N}}, (\Sigma_i)_{i \in \mathbf{N}})$, таких, що існує множина Q (множина *станів*), така, що:

1. для кожного індексу $i \in \mathbf{N}$, s_i (*i-та виділена траєкторія*) є частковою функцією з T в Q , такою, що область визначення s_i є (можливо необмеженим, можливо порожнім) проміжком в T та *не* є одноелементною множиною;
2. для кожного $i \in \mathbf{N}$, $\Sigma_i \in$ НПМС з множиною станів Q (*i-та виділена НПМС*).

Елементи $\mathbf{M}$ будуть називатись *моделями*.

Структура, асоційована з $M = ((s_i)_{i \in \mathbf{N}}, (\Sigma_i)_{i \in \mathbf{N}}) \in \mathbf{M}$ є єдиною структурою

$$(T, <, (D_i)_{i \in \mathbf{N}}, (E^-_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}, (E^+_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}, (L_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}, (R_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}) \in \mathbf{S}$$

такою, що для $i, j \in \mathbf{N}$ і $t \in T$

1. $D_i(t) \Leftrightarrow t \in \text{dom}(s_i)$;
2. значення $E^-_{ij}(t)$ є істинним тоді і тільки тоді, коли для деякого $t' \in [0, t)$, обмеження s_i та s_j на $(t', t]$ визначені на $(t', t]$ і співпадають;
3. значення $E^+_{ij}(t)$ є істинним тоді і тільки тоді, коли для деякого $t' \in (t, +\infty)$, обмеження s_i та s_j на $[t, t')$ визначені на $(t', t]$ і співпадають;
4. $L_{ij}(t) \Leftrightarrow l_i^*(s_j, t)$ і $R_{ij}(t) \Leftrightarrow r_i^*(s_j, t)$, якщо $t \in \text{dom}(s_j)$, де l_i^*, r_i^* є компонентами найменшого LR подання НПМС Σ_i ;
5. $\neg L_{ij}(t)$ і $\neg R_{ij}(t)$, якщо $t \notin \text{dom}(s_j)$.

Структура, асоційована з M буде позначатись як $St(M)$.

Нехай $|\models^m \subseteq \mathbf{M} \times \mathbf{L}$ є відношенням, таким що для кожної формули $\Phi \in \mathbf{L}$ і моделі $M \in \mathbf{M}$, $M \models^m \Phi$ (Φ чинна в моделі M) тоді і тільки тоді, коли $St(M) \models \Phi$.

Позначимо $Th = \{ \Phi \in L^c \mid \forall M \in \mathbf{M} \ M \models^m \Phi \}$. Слід зауважити, що Th складається з речень, що виражають відношення між траєкторіями НПМС, що мають місце в усіх моделях (елементах M).

У підрозділі 4.1 отримано такий результат на основі теореми²⁹ М.О. Рабіна про розв'язність одномісної теорії другого порядку дійсного сегмента $[0, 1]$ з квантифікацією за F_σ -підмножинами.

Теорема 4.1.3. Формальна теорія Th є розв'язною.

У підрозділі 4.2 досліджено відношення глобальної часової бісимуляції на станах розмічених недетермінованих повних марківських систем та отримано необхідну і достатню умову локального характеру для того, щоб дане відношення було відношенням глобальної часової бісимуляції.

Для кожної часткової функції f будемо позначати як $\text{dom}(f)$ множину, на якій вона визначена. У підрозділі 4.2 запропоновано такі визначення.

Нехай (T, Q, Tr) є НПМС. Функція λ на Tr (множині траєкторій) називається *трасою* на Tr , якщо

1. для кожного $s \in Tr$, $\lambda(s)$ є функцією, визначеною на $\text{dom}(s)$ (умова збереження області визначення);
2. якщо $s_1, s_2 \in Tr$ і графік функції s_1 є підмножиною графіку функції s_2 , то графік функції $\lambda(s_1)$ є підмножиною графіку функції $\lambda(s_2)$ (умова монотонності).

Розмічена НПМС є парою (Σ, λ) , де $\Sigma = (T, Q, Tr)$ є НПМС, а λ є трасою на Tr . Нехай (Σ, λ) є розміченою НПМС, де $\Sigma = (T, Q, Tr)$.

Відношення $R \subseteq Q \times Q$ є *глобальною часовою симуляцією* на розміченій НПМС (Σ, λ) , якщо для кожних $(q_1, q_2) \in R$ і $s_1 \in Tr$, таких, що $\text{dom}(s_1)$ має найменший елемент і q_1 є значенням функції s_1 на найменшому елементі $\text{dom}(s_1)$, існує траєкторія $s_2 \in Tr$, така, що q_2 є значенням функції s_2 на найменшому елементі $\text{dom}(s_2)$, $\lambda(s_1) = \lambda(s_2)$ і $(s_1(t), s_2(t)) \in R$ для всіх $t \in \text{dom}(s_1)$.

Відношення $R \subseteq Q \times Q$ є *локальною часовою симуляцією* на розміченій НПМС (Σ, λ) , якщо для кожних $(q_1, q_2) \in R$, $s_1 \in Tr$ і $t_0 \in T$, таких, що t_0 є найменшим елементом $\text{dom}(s_1)$ і $s_1(t_0) = q_1$, існує $s_2 \in Tr$, така, що t_0 є найменшим елементом $\text{dom}(s_2)$, $s_2(t_0) = q_2$ і

1. існує $t' > t_0$, такий, що обмеження $\lambda(s_1)$ і $\lambda(s_2)$ на $[t_0, t')$ визначені на $[t_0, t')$ і співпадають;
2. існує $t' > t_0$, такий, що для кожного $t'' \in [t_0, t')$, значення $s_1(t'')$ та $s_2(t'')$ визначені і $(s_1(t''), s_2(t'')) \in R$.

Нехай f^+ є фіксованою нормальною правою мірою продовжуваності³⁰. Відношення $R \subseteq Q \times Q$ є f^+ -*часовою симуляцією* на розміченій НПМС (Σ, λ) ,

²⁹ Rabin M. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. Trans. AMS. 1969. Vol. 141. P. 1-35.

³⁰ Поняття, запропоноване автором у кандидатській дисертації: Іванов Є.В. Investigation of abstract systems with inputs and outputs as partial functions of time. Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2013.

якщо R є локальною часовою симуляцією на (Σ, λ) і для кожних $s_1, s_2 \in Tr$ і $t_0 \in dom(s_1)$, що задовольняють таким умовам

- $t_0 > 0$ і існує $t' \in [0, t_0)$, такий, що для кожного $t'' \in (t', t_0)$ значення $s_1(t'')$ та $s_2(t'')$ визначені і $(s_1(t''), s_2(t'')) \in R$,
- існує $t_0' \in [0, t_0)$, такий, що обмеження $\lambda(s_1)$ і $\lambda(s_2)$ на $[t_0', t_0)$ визначені на $[t_0', t_0)$ і співпадають,

існують $s_2' \in Tr$, $t_1 \in dom(s_2) \cap dom(s_2')$ і $t_2 \in T$, такі, що:

1. $t_1 < t_0$ і $s_2(t_1) = s_2'(t_1)$;
2. $t_2 \geq f^+(t_1, t_0)$ або t_2 є максимальним елементом $dom(s_1)$;
3. обмеження $\lambda(s_1)$ і $\lambda(s_2')$ на $[t_1, t_2]$ визначені на $[t_1, t_2]$ і співпадають;
4. для кожного $t \in [t_1, t_2]$ значення $s_1(t)$, $s_2'(t)$ визначені і $(s_1(t), s_2'(t)) \in R$.

Відношення $R \subseteq Q \times Q$ є

- локальною часовою бісимуляцією на розміченій НПМС (Σ, λ) , якщо R і R^{-1} є локальними часовими симуляціями на (Σ, λ) ;
- глобальною часовою бісимуляцією на розміченій НПМС (Σ, λ) , якщо R і R^{-1} є глобальними часовими симуляціями на (Σ, λ) ;
- f^+ -часовою бісимуляцією на розміченій НПМС (Σ, λ) , якщо R і R^{-1} є f^+ -часовими симуляціями на (Σ, λ) .

Теорема 4.2.1. (1) Якщо R є глобальною часовою бісимуляцією на розміченій НПМС (Σ, λ) , то R є локальною часовою бісимуляцією на (Σ, λ) .

(2) Існує розмічена НПМС (Σ', λ') і локальна часова бісимуляція R_0 на (Σ', λ') , така, що R_0 не є глобальною часовою бісимуляцією на (Σ', λ') .

Теорема 4.3.2. Нехай (Σ, λ) є розміченою НПМС. Відношення $R \subseteq Q \times Q$ є глобальною часовою бісимуляцією на (Σ, λ) тоді і тільки тоді, коли R є f^+ -часовою бісимуляцією на (Σ, λ) .

У **підрозділі 4.2** зазначено можливості застосування часткових предикатів (замість тотальних) при частковій специфікації поведінки у абстрактних динамічних моделях. Отримано критерії виразимості часткових предикатів у алгебрі Кліні унарних часткових предикатів на довільній множині (з операціями диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення на унарних предикатах, що визначені у відповідності з принципами сильної тризначної логіки Кліні), розширеною операцією доповнення часткового предикату та скінченною множиною констант (фіксованих часткових предикатів).

У наступних підрозділах розділу 4 наведено ряд додаткових результатів, що можуть бути корисними для побудови деяких прикладів переписувальних систем, що не задовольняють припущенням про термінальність та зліченність та для встановлення їх властивостей.

У **підрозділі 4.3** розглянуто задачу доведення того, що кожний елемент у даній множині станів досягається деякою траєкторією заданої НПМС з деякого початкового стану і запропоновано критерій для визначення, чи є множина нижньою апроксимацією множини досяжності НПМС, що спирається на локальну продовжуваність траєкторій, подібно до результату підрозділу 4.2.

У **підрозділі 4.4** запропоновано узагальнення поняття EDS визначної функції на структурі М. Г. Фрідмана до поняття EDS визначної функції, що перетворює складноіменні дані.

У **підрозділі 4.5** запропоновано критерії виразності часткових предикатів в алгебрі часткових предикатів з композиціями диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення, визначеними відповідно до принципів сильної тризначної логіки Кліні, розширеній композицією предикатного доповнення.

У **підрозділі 4.6** наведено висновки з **розділу 4**.

ВИСНОВКИ

У дисертації побудовано теорію, що розширює та узагальнює класичні результати теорії абстрактних переписувальних систем на випадки, що становлять інтерес з точки зору аналізу недискретних математичних моделей систем і процесів. У дисертації отримано такі нові наукові результати:

- вперше доведено повноту методу спадних діаграм ван Оострома – де Брейна для доведення конфлюентності абстрактних переписувальних систем мінімальної незліченної потужності (попередні відомі результати: V. van Oostrom, 1994 – метод є повним для доведення конфлюентності систем, що мають властивість кофінальності; J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek, 2018 – метод з двома мітками є повним для доведення конфлюентності систем, що мають властивість кофінальності; також, загальновідомо, що властивість кофінальності може не виконуватись для конфлюентних абстрактних переписувальних систем будь-якої незліченної потужності); за припущення континуум-гіпотези, з отриманого у дисертації результату випливає, що метод спадних діаграм є повним для доведення конфлюентності довільних бінарних відношень на множині дійсних чисел, множині послідовностей дійсних чисел, індексованих натуральними числами, множині неперервних дійсних функцій, множині орієнтованих графів із фіксованою зліченною множиною вузлів і на різноманітних інших структурах, що становлять інтерес з точки зору інформатики та прикладної математики; доведення повноти було повністю формалізовано та автоматично перевірено за допомогою відомої системи інтерактивного доведення теорем Isabelle; обсяг формального доказу перевищує 300 сторінок у форматі Archive of Formal Proofs;
- вперше отримано розв'язки проблем неповноти методу спадних діаграм з двома мітками та відсутності колапсу на рівні 2 ієрархії систем, що мають спадну властивість Черча–Россера (ці проблеми були сформульовані J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek у 2018 році як відкриті проблеми);
- вперше запропоновано узагальнення леми Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем;
- вперше запропоновано спеціальні принципи індукції для доведення властивостей елементів переписувальних систем, що не задовольняють припущенням про термінальність та зліченність;

- дістали подальшого розвитку формальні теорії для аналізу властивостей абстрактних недискретних динамічних моделей; запропоновано розв'язну формальну теорію для перевірки властивостей траєкторій НПМС; отримано необхідну і достатню умову локального характеру для перевірки, чи є дане відношення глобальною часовою бісимуляцією на розміченій НПМС, запропоновано критерій для визначення, чи є множина нижньою апроксимацією множини досяжності НПМС, що спирається на локальну продовжуваність траєкторій, запропоновано узагальнення поняття EDS визначної функції Г. Фрідмана до поняття EDS визначної функції, що перетворює складноіменні дані, отримано критерії виразності часткових предикатів в алгебрі часткових предикатів з композицією предикатного доповнення.

Отримані результати суттєво удосконалюють розуміння меж застосовності класичних методів теорії абстрактних переписувальних систем та випадків, коли є необхідність застосування нових методів аналізу абстрактних переписувальних систем, породжених недискретними математичними моделями.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Ivanov I. Completeness of the decreasing diagrams method for proving confluence of rewriting systems of the least uncountable cardinality. Leibniz international proceedings in informatics. ISSN 1868-8969. 2025. Vol. 337. P. 25:1-25:20. [**Scopus**]
2. Ivanov I. On the cofinality property in the context of the hierarchy of decreasing Church-Rosser abstract rewriting systems. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2024. Vol. 3909. P. 466-479. [**Scopus**]
3. Ivanov I. On Newman's lemma and non-termination. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2023. Vol. 3624. P. 14-24. [**Scopus**]
4. Ivanov I. Generalized Newman's lemma for discrete and continuous systems. Leibniz international proceedings in informatics. ISSN 1868-8969. 2023. Vol. 260. P. 9:1-9:17. [**Scopus**]
5. Ivanov I. On induction principles for partial orders. Logica Universalis. ISSN 1661-8297. 2022. Vol. 16. P. 105-147. [**Scopus**]
6. Ivanov I. On Induction Principles for Diamond-Free Partial Orders. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2021. Vol. 1308. P. 166–190. [**Scopus**]
7. Ivanov I. On induction for diamond-free directed complete partial orders. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2020. Vol. 2732. P. 70-73. [**Scopus**]

8. Ivanov I., Nikitchenko M. Expressibility in the Kleene algebra of partial predicates with the complement composition. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2020. Vol. 1175. P. 50-67. [**Scopus**]
9. Ivanov I., Nikitchenko M. Inference rules for the partial Floyd-Hoare logic based on composition of predicate complement. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2019. Vol. 1007. P. 71-88. [**Scopus**]
10. Ivanov I., Nikitchenko M. On the Kleene algebra of partial predicates with predicate complement. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2019. Vol. 2393. P. 542-551. [**Scopus**]
11. Ivanov I., Kornilowicz A., Nikitchenko M. An inference system of an extension of Floyd-Hoare logic for partial predicates. Formalized mathematics. ISSN 1426-2630. 2018. Vol. 26, no. 2. P. 159-164. [**Web of Science**]
12. Kornilowicz A., Ivanov I., Nikitchenko M. Kleene algebra of partial predicates. Formalized mathematics. ISSN 1426-2630. 2018. Vol. 26, no. 1. P. 11-20. [**Web of Science**]
13. Ivanov I., Kornilowicz A., Nikitchenko M. Implementation of the composition-nominative approach to program formalization in Mizar. Computer science journal of Moldova. ISSN 1561-4042. 2018. Vol. 26, no.1 (76). P. 59-76. [**Web of Science**]
14. Nikitchenko M., Ivanov I., Kornilowicz A., Kryvolap A. Extended Floyd-Hoare logic over relational nominative data. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2018. Vol. 826. P. 41-64. [**Scopus**]
15. Ivanov I., Nikitchenko M. On the sequence rule for the Floyd-Hoare logic with partial pre- and post-conditions. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2018. Vol. 2104. P.716-724. [**Scopus**]
16. Ivanov I. On the underapproximation of reach sets of abstract continuous-time systems. Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. ISSN 2075-2180. 2017. Vol. 247. P. 46-51. [**Scopus**]
17. Ivanov I., Nikitchenko M., Kryvolap A., Kornilowicz A. Simple-named complex-valued nominative data – definition and basic operations. Formalized Mathematics. ISSN 1426-2630. 2017. Vol. 25, no. 3. P. 205-216. [**Web of Science**]
18. Kornilowicz A., Kryvolap A., Nikitchenko M., Ivanov I. An approach to formalization of an extension of Floyd-Hoare logic. CEUR workshop proceedings. ISSN 1613-0073. 2017. Vol. 1844. P. 504-523. [**Scopus**]
19. Ivanov I., Nikitchenko M., Skobelev V.G. Proving properties of programs on hierarchical nominative data. Computer science journal of Moldova. ISSN 1561-4042. 2016. Vol. 24, no. 3 (72). P. 371-398. [**Web of Science**]
20. Ivanov I. On local characterization of global timed bisimulation for abstract continuous-time systems. Lecture notes in computer science. ISSN 0302-9743. 2016. Vol. 9608. P. 216-234. [**Scopus**]
21. Ivanov I., Nikitchenko M., Abraham U. On a decidable formal theory for abstract continuous-time dynamical systems. Communications in computer and information science. ISSN 1865-0929. 2014. Vol. 469. P. 78-99. [**Scopus**]

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

22. Ivanov I. On non-triviality of the hierarchy of decreasing Church-Rosser abstract rewriting systems. Proceedings of the 13th International Workshop on Confluence. July 9, 2024, Tallinn, Estonia. P. 30-35.
23. Ivanov I. On confluence criteria for non-terminating abstract rewriting systems. Proceedings of the 12th International Workshop on Confluence. August 23-24, 2023, Obergurgl, Austria. P. 9-13.
24. Ivanov I. On generalizations of real induction. Conference on Mathematical Foundations of Informatics. Proceedings MFOI-2020. 12-16 January 2021, Kyiv, Ukraine. P. 162-167.
25. Ivanov I. On generalized well-founded induction. Logic and its Applications. 2nd World Logic Day – January 14, 2020. Logic and its Applications, The workshop. Book of Abstracts. January 14, 2020, Kyiv. P. 7-8.
26. Ivanov I. On the partial Floyd-Hoare logic based on predicate complement. 1st World Logic Day – January 14, 2019. Logic and its Applications, The workshop. Book of Abstracts. January 14, 2019, Kyiv. P. 4-5.
27. Ivanov E.V. On inductive definitions on non-well-ordered domains and their potential applications to verification of cyber-physical systems. Прикладні системи та технології в інформаційному суспільстві : зб. тез доповідей і наук. повідомл. учасників II Міжнародної науково-практичної конференції. Київ, 1 жовтня 2018. С. 67-68.
28. Kornilowicz A., Kryvolap A., Nikitchenko M., Ivanov I. Formalization of the algebra of nominative data in Mizar. Proceedings of the 2017 Federated Conference on Computer Science and Information Systems. September 3-6, 2017, Prague, Czech Republic. P. 237-244.
29. Ivanov I., Nikitchenko M., Skobelev V.G. Properties of nominative programs specified by effective definitional schemes. Conference on Mathematical Foundations of Informatics. Proceedings MFOI-2016. Institute of Mathematics and Computer Science, July 25-30, 2016, Chisinau, Moldova. P. 222-240.
30. Ivanov I., Kornilowicz A., Nikitchenko M.S. Formalization of nominative data in Mizar. Праці Міжнародної науково-практичної конференції “Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем” ТАAPSD’2015, 23-26 листопада 2015 р., м. Київ. С. 82-85.
31. Ivanov Ie.V., Nikitchenko M.S. On nominative Glushkov algebras. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції "В.М. Глушков – піонер кібернетики". 11 грудня 2014, м. Київ. С. 48-49.

Праці, які додатково відображають наукові результати дисертації

32. Ivanov I. Completeness of decreasing diagrams for the least uncountable cardinality. Archive of Formal Proofs. ISSN 2150-914X. 2025. April. 319 pages.

АНОТАЦІЯ

Іванов Є.В. Узагальнена теорія абстрактних переписувальних систем.

– Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.01 «Теоретичні основи інформатики та кібернетики». – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2025.

Робота присвячена побудові теорії, що розширює та узагальнює класичні результати теорії абстрактних переписувальних систем на випадки, що становлять інтерес з точки зору аналізу недискретних математичних моделей систем і процесів. Отримані результати включають доказ повноти методу спадних діаграм ван Оострома – де Брейна для доведення конфлюентності абстрактних переписувальних систем мінімальної незліченної потужності, розв’язки проблем неповноти методу спадних діаграм з двома мітками та відсутності колапсу на рівні 2 ієрархії систем, що мають спадну властивість Черча-Россера, узагальнення леми Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем, спеціальні принципи індукції для доведення властивостей елементів переписувальних систем, що не задовольняють припущенням про термінальність та зліченність, формальні теорії для аналізу властивостей абстрактних недискретних динамічних моделей.

Ключові слова: переписувальні системи, редукція, формальні методи, формальні доведення, формальна верифікація, недискретні моделі, недетерміновані моделі.

ABSTRACT

Ivanov Ie.V. Generalized abstract rewriting theory. – Qualification scientific work in the form of a manuscript.

Dissertation for obtaining the scientific degree of doctor of physical and mathematical sciences in the specialty 01.05.01 «Theoretical foundations of informatics and cybernetics». – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2025.

The work concerns development of a theory that extends and generalizes classical results of the abstract rewriting theory (ARS theory) to cases that are of interest from the perspective of analysis of non-discrete mathematical models of systems and processes. The main results include the following.

1. For the first time completeness of Van Oostrom-De Bruijn decreasing diagrams method for proving confluence of abstract rewriting systems of the least uncountable cardinality has been proved (previously known results: V. van Oostrom, 1994 – the method is complete for proving confluence of systems that have the cofinality property; J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek, 2018 – the method with two labels is complete for proving confluence of systems that have the cofinality property); the proof of completeness has been checked using Isabelle proof assistant,

the size of the formal proof exceeds 300 pages in the Archive of Formal Proofs format.

2. For the first time solutions to the problems of incompleteness of the decreasing diagrams method with two labels and the absence of collapse of the hierarchy of decreasing Church-Rosser systems at the level 2 have been obtained (these problems were posed by J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek in 2018 as open problems).

3. For the first time a generalization of Newman's lemma for strictly inductive rewriting systems has been proposed.

4. For the first time special induction principles for proving properties of elements of rewriting systems that do not satisfy termination and countability assumptions have been proposed.

5. Formal theories for analyzing properties of abstract non-discrete dynamical models have been further developed.

The dissertation consists of the abstracts, the list of notations, introduction, four sections divided into subsections, conclusions, the list of references, three appendices.

Section 1 concerns the first two main results of the dissertation – proof of completeness of Van Oostrom-De Bruijn decreasing diagrams method for proving confluence of ARS of the least uncountable cardinality and solution of the problem of incompleteness of the decreasing diagrams method with two labels and the absence of collapse of the hierarchy of decreasing Church-Rosser systems at the level 2.

Section 2 concerns a generalization of Newman's Lemma for strictly inductive rewriting systems. In Section 2 it is proved that the equivalence between the local confluence condition and the confluence condition for acyclic strictly inductive ARS holds, if the set of irreducible elements of the ARS is at most countable. However, there exists an acyclic, strictly inductive, locally confluent ARS that is not confluent. Also, in the section an extension of these results to a theorem that generalizes Newman's lemma to all strictly inductive ARS is proposed.

Section 3 concerns development of special induction principles for proving properties of elements of rewriting systems that do not satisfy termination and countability assumptions. In particular, in the section an induction principle for diamond-free complete partially ordered sets is proposed (it can also be used for acyclic ARS that induce such partially ordered sets) and a common generalization of the well-founded induction principle and the real induction principle is proposed. Also, in the section a general approach to formulation of induction principles for different structures is proposed.

Section 4 concerns development of formal theories for analysis of properties of abstract non-discrete dynamical models. In the section an approach to generalization of abstract and labelled rewriting systems is proposed; this approach allows one to formalize continuous time rewriting processes; it is based on application of the model of nondeterministic complete Markovian systems (NCMS). In the section a decidable formal theory that can be used to state and check properties of trajectories of NCMS is proposed. Also, a local necessary and sufficient condition for a relation to be a global timed bisimulation on states of a labelled NCMS is obtained, a criterion for checking that a set is an underapproximation of a reach set of an NCMS based on

local trajectory extension is proposed, a generalization of H. Friedman's notion of an EDS definable function to the notion of an EDS definable function that transforms complex-named data is proposed, a criterion of expressibility of partial predicates in the algebra of partial predicates with the predicate complement composition is obtained.

The obtained results significantly improve understanding of limits of applicability of classical methods of the abstract rewriting theory and cases when new methods of analysis of ARS are required.

Keywords: rewriting systems, reduction, formal methods, formal proofs, formal verification, non-discrete models, nondeterministic models.