

ВІДГУК ОФІЦІЙНОГО ОПОНЕНТА

доктора технічних наук, професора, професора кафедри інформаційних систем факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка Жолткевича Григорія Миколайовича на дисертаційну роботу Іванова Євгена В'ячеславовича на тему: «Узагальнена теорія абстрактних переписувальних систем», подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.01 – теоретичні основи інформатики та кібернетики

1. Актуальність теми дослідження.

Дисертаційне дослідження Іванова Є.В. «Узагальнена теорія абстрактних переписувальних систем» вирішує важливу та фундаментальну наукову проблему, яка полягає у побудові узагальненої теорії абстрактних переписувальних систем (АПС), що розширює та узагальнює класичні результати на випадки, необхідні для аналізу недискретних математичних моделей систем і процесів.

Основні аспекти цієї проблеми та способи їх вирішення в роботі включають:

- *Подолання обмежень класичної теорії.* Методи перевірки властивості конфлюентності (Черча-Россера) та інші базові результати АПС (наприклад, принцип нетерової індукції) добре вивчені лише для систем із властивостями, характерними для дискретних моделей — термінальністю або зліченністю. Визначення застосовності цих методів до незліченних нетермінальних систем вважається провідними дослідниками фундаментальною відкритою проблемою.
- *Аналіз моделей із недискретністю та недетермінізмом.* Класичні припущення про зліченність не виконуються для моделей, актуальних у сучасних міждисциплінарних напрямках, зокрема для кіберфізичних систем. Дисертація пропонує інструментарій для аналізу таких систем, де обчислювальні та фізичні процеси поєднуються.
- *Доведення повноти методів для незліченних систем.* Вперше доведено повноту методу спадних діаграм ван Оострома – де Брейна для доведення

конфлюентності АПС мінімальної незліченної потужності. Це дозволяє застосовувати метод до структур потужності континууму, таких як множини дійсних чисел, неперервних функцій або орієнтованих графів.

- *Вирішення раніше відкритих проблем.* Робота надає розв'язки проблем повноти методу спадних діаграм із двома мітками та відсутності колапсу на рівні 2 ієрархії систем зі спадною властивістю Черча–Россера.
- *Розробка нових теоретичних принципів, зокрема*
 - узагальнено лему Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем;
 - запропоновано спеціальні принципи індукції для систем, що не є термінальними або зліченими;
 - розвинуто формальні теорії для аналізу властивостей недетермінованих повних марківських систем (НПМС) та їх траєкторій, зокрема критерії глобальної часової бісимуляції та апроксимації множин досяжності.

Таким чином, дослідження усуває значну теоретичну прогалину, створюючи базу для формальної верифікації та специфікації складного програмного й апаратного забезпечення в умовах недискретності.

2. Зміст дисертаційного дослідження.

Викладення результатів дисертаційного дослідження має загальноприйняту структуру, що складається з анотацій, списку публікацій здобувача за темою дисертації, вступу, чотирьох розділів, висновків, переліку використаних джерел та додатків.

У вступі надано обґрунтування вибору теми дослідження, зв'язок роботи з науковими програмами, мету і методи дослідження, наукову новизну, значення отриманих результатів, особистий внесок здобувача та надано інформацію про публікації та апробацію.

У першому розділі надано вирішення проблеми повноти методу спадних діаграм для абстрактних переписувальних систем (АПС) мінімальної незліченної потужності, для чого здійснено новий аналіз структури конфлюентних АПС, що

не мають властивості кофінальності, на яку суттєво спирались попередньо відомі результати щодо повноти даного методу для зліченних АПС. Здобувачем було формалізоване та перевірене доведення повноти методу спадних діаграм для АПС мінімальної незліченної потужності за допомогою системи інтерактивного доведення теорем Isabelle, що підтверджує достовірність отриманого результату. Також у першому розділі отримано та перевірено за допомогою Isabelle розв'язки проблем неповноти методу спадних діаграм з двома мітками та відсутності колапсу на рівні 2 ієрархії АПС, що мають спадну властивість Черча-Россера, сформульовані J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek у 2018 році.

У другому розділі досліджено спеціальні методи доведення конфлюентності строго індуктивних АПС. Зокрема, отримано узагальнення леми Ньюмана для ациклічних строго індуктивних АПС з не більш ніж зліченною множиною незвідних елементів та отримано узагальнення леми Ньюмана для всіх строго індуктивних АПС. Також, побудовано посилений контрприклад Ньюмана, що є необхідно незліченим прикладом ациклічної, строго індуктивної, локально конфлюентної АПС без властивості конфлюентності. Ці результати було формалізовано та перевірено за допомогою системи Isabelle.

У третьому розділі досліджено спеціальні принципи індукції для доведення універсальних властивостей елементів АПС та частково впорядкованих множин, до яких не можуть бути застосовані принципи нетерової та фундованої індукції. Зокрема, отримано принцип індукції для вільних від алмазів частково впорядкованих множин та для АПС, що породжують такі частково впорядковані множини, а також отримано спільне узагальнення принципів фундованої та дійсної індукції. Також, отримано зворотній результат до теореми Рауля про відкриття індукцію, що було формалізовано та перевірено за допомогою системи Isabelle.

У четвертому розділі описано підхід до моделювання процесів переписування у неперервному часі, що базується на застосуванні недетермінованих повних марківських систем (НПМС), введених у кандидатській дисертації здобувача на базі систем розв'язків О. Гаєка. Отримано розв'язну формальну теорію для

перевірки властивостей траєкторій НПМС, досліджено питання еквівалентності поведінки НПМС та апроксимації множин досяжності. Також досліджено деякі пов'язані питання виразності часткових предикатів.

3. Ступінь обґрунтованості наукових положень і висновків.

Обґрунтованість і достовірність положень дисертаційної роботи Є.В. Іванова підтверджується комплексом наукових методів, обсягом доказової бази та логічною стрункістю викладу.

1. **Методологія.** Методи дослідження обрано коректно відповідно до специфіки галузі «Теоретичні основи інформатики та кібернетики».
 - *Використання формальних методів.* Автор поєднує класичні математичні засади (математична логіка, теорія множин Цермело-Френкеля) із сучасними методами формалізації та автоматизованої перевірки доведень.
 - *Математичне моделювання.* Дослідження базується на побудові та аналізі абстрактних моделей, таких як узагальнені переписувальні системи та недетерміновані повні марківські системи (НПМС).
 - *Системи інтерактивного доведення теорем.* Для підтвердження найскладніших результатів (наприклад, повноти методу спадних діаграм) використано систему Isabelle/HOL, що завдяки малому логічному ядру та тривалій історії розвитку забезпечує найвищий рівень достовірності отриманих висновків.
 - *Апробація положень.* Методологія включає перевірку теоретичних результатів на конкретних математичних структурах (множини дійсних чисел, неперервних функцій тощо), що демонструє їхню застосовність.
2. **Джерельні бази та обсяг доведень.** Обґрунтованість результатів спирається на значний масив теоретичних виведень та зовнішніх джерел.
 - *Теоретичне виведення.* Основні положення доведені суворо математично, причому обсяг лише одного формального доказу повноти методу спадних діаграм перевищує 300 сторінок у форматі Archive of Formal Proofs.

- *Обсяг використаних даних.* У роботі використано понад 80 формальних визначень та 260 лем лише для одного з розділів (файл DCRN1.thy), що свідчить про глибоку деталізацію дослідження.
 - *Бібліографічна база.* Список використаних джерел налічує 214 найменувань, які охоплюють як фундаментальні праці (зокрема, праці Ньюмана, Клопа, ван Оострома) так і сучасні дослідження.
 - *Зовнішнє визнання.* Результати опубліковані у 21 науковій праці в міжнародних виданнях (Scopus, Web of Science) та пройшли апробацію на провідних світових конференціях (FSCD, IWC).
3. Логічна несуперечливість. Висновки роботи впливають безпосередньо з отриманих результатів і мають чітку внутрішню структуру.
- *Послідовність викладення.* Робота побудована від аналізу обмежень класичної теорії до розробки узагальнених принципів і їхньої формальної верифікації.
 - *Відповідність результатів і висновків.* Доведення повноти методів для незліченних систем логічно завершується визначенням меж їх застосовності за умови прийняття континуум-гіпотези.
 - *Використання контрприкладів.* Логічна обґрунтованість підсилюється побудовою контрприкладів (наприклад, посиленого контрприкладу Ньюмана), які чітко окреслюють умови, за яких теоретичні положення перестають виконуватися.
 - *Єдність теорії та інструментарію.* Розроблені нові принципи індукції безпосередньо інтегровані в загальну теорію АПС, що дозволяє логічно перейти до аналізу складних динамічних моделей.

Отже, робота характеризується високим рівнем наукової коректності, що підтверджується використанням систем автоматизованої перевірки знань та широким міжнародним рецензуванням.

4. Наукова новизна одержаних результатів.

Наукова новизна дисертаційного дослідження Є.В. Іванова полягає у суттєвому розширенні теоретичної бази абстрактних переписувальних систем (АПС) для аналізу недискретних та незліченних моделей.

1. Автором висуваються на захист наступні основні результати та наукові положення:
 - 1.1. Доведення повноти методу спадних діаграм для переписувальних систем мінімальної незліченної потужності ($\aleph_1$).
 - 1.2. Розв'язання фундаментальних відкритих проблем теорії АПС щодо неповноти методу з двома мітками та відсутності колапсу в ієрархії спадних систем на рівні 2.
 - 1.3. Теорема про узагальнену лему Ньюмана, яка встановлює критерії конфлюентності для строго індуктивних систем.
 - 1.4. Система нових принципів індукції для доведення властивостей елементів систем, що не є термінальними або зліченими.
 - 1.5. Комплекс формальних теорій для аналізу недискретних динамічних моделей, зокрема критерії глобальної часової бісимуляції та апроксимації множин досяжності для недетермінованих повних марківських систем (НПМС).
2. Результати, отримані вперше. Дослідження містить низку пріоритетних наукових здобутків:
 - 2.1. Вперше доведено повноту методу спадних діаграм ван Оострома – де Брейна для АПС потужності $\aleph_1$. Раніше повнота була відома лише для систем із властивістю кофінальності (наприклад, злічених).
 - 2.2. Вперше отримано розв'язки проблем, сформульованих провідними вченими (Ендрулліс, Клоп, Овербек) як відкриті: про неповноту методу з двома мітками та відсутність колапсу DCR-ієрархії на другому рівні.

- 2.3. Вперше запропоновано узагальнення леми Ньюмана для класу строго індуктивних систем, що дозволяє аналізувати конфлюентність без допомоги сильної нормалізації.
- 2.4. Вперше розроблено спеціальні принципи індукції (зокрема для вільних від алмазів повних частково впорядкованих множин), які інтегрують підходи фундової та дійсної індукції.
- 2.5. Вперше адаптовано концепцію EDS-визначних функцій Г. Фрідмана для роботи зі складноіменними номінативними даними.
3. Підтвердження рівня новизни та значення для науки. Результати роботи є суттєвим кроком уперед для теоретичних основ інформатики та прикладної математики з таких причин:
 - 3.1. *Подолання класичних обмежень.* Робота виводить теорію переписувальних систем за межі дискретних моделей (термінальних та злічених), створюючи інструментарій для аналізу систем з неперервним часом та незліченною кількістю станів.
 - 3.2. *Широта застосування.* За умови прийняття континуум-гіпотези доведені результати стають застосовними до моделей на множині дійсних чисел, неперервних функцій та нескінченних графів.
 - 3.3. *Висока достовірність.* Побудова формального доказу повноти в системі Isabelle обсягом понад 300 сторінок гарантує безпомилковість результатів на рівні, недосяжному для традиційних "паперових" доведень.
 - 3.4. *Вирішення фундаментальних проблем.* Надання відповідей на раніше нерозв'язані питання ієрархії спадних систем закриває значні прогалини в теорії конфлюентності.

Таким чином, дисертація формує *нову узагальнену теорію*, яка дозволяє формально верифікувати складні обчислювальні та кіберфізичні системи в умовах недетермінованості та недискретності.

5. Теоретичне та практичне значення одержаних результатів.

Результати дисертаційного дослідження Є.В. Іванова, розширюючи межі застосування формальних методів аналізу систем, є суттєвим внеском у розвиток теоретичних засад інформатики.

1. Теоретичний внесок: зміна та доповнення наукових парадигм. Результати роботи значно доповнюють існуючу парадигму теорії абстрактних перепи-сувальних систем (АПС), яка традиційно фокусувалася на дискретних, злі-ченних або термінальних моделях.

1.1. Розширення меж теорії: доведення повноти методу спадних діаграм для систем мінімальної незліченної потужності ($\aleph_1$) дозволяє поши-рити класичні результати на структури потужності континууму, такі як множини дійсних чисел або неперервних функцій.

1.2. Вирішення фундаментальних проблем: робота дає відповіді на відк-риті питання, сформульовані провідними дослідниками (Ендруллісом, Клопом та Овербеком у 2018 році), зокрема доводячи *неповноту ме-тоду з двома мітками* та відсутність колапсу в DCR-ієрархії на дру-гому рівні.

1.3. Узагальнення класичних лем: запропоноване узагальнення леми Нью-мана для строго індуктивних систем дозволяє аналізувати конфлюент-ність у випадках, де не виконується умова сильної нормалізації (тер-мінальності).

1.4. Нові принципи індукції: розроблені спеціальні принципи індукції (зо-крема для вільних від алмазів повних частково впорядкованих мно-жин) створюють теоретичну базу для доведення універсальних влас-тивостей у системах, що поєднують недискретність та недетермінізм.

1.5. Розвиток теорій для динамічних моделей: створення розв'язної фор-мальної теорії для аналізу траєкторій недетермінованих повних мар-ківських систем (НПМС) закладає основу для формалізації неперерв-них у часі процесів переписування.

2. Практична цінність: впровадження та сфера застосування

Хоча дисертація має переважно теоретичний характер, її результати мають чітко визначену практичну спрямованість у сфері розробки надійного програмного забезпечення.

- 2.1. Формальна верифікація: критерії конфлюентності, отримані в роботі, можуть бути використані при створенні програмних інструментів для перевірки того, що результат недетермінованої програми не залежить від шляху її виконання. Це критично важливо для багатопотокового та розподіленого ПЗ.
- 2.2. Кіберфізичні системи (КФС): методи аналізу недискретних моделей актуальні для специфікації та верифікації систем, де обчислювальні процеси тісно інтегровані з фізичними (наприклад, у робототехніці або системах керування).
- 2.3. Програмне забезпечення та архіви доведень: результати дослідження були повністю формалізовані та перевірені в системі інтерактивного доведення теорем Isabelle. Формальне доведення обсягом понад 300 сторінок включено до престижного міжнародного репозиторію Archive of Formal Proofs, що підтверджує його доступність для світової наукової спільноти.
- 2.4. Моделювання: розроблені критерії бісимуляції та апроксимації множин досяжності для НПМС можуть бути впроваджені в інструменти моделювання складних динамічних систем.

6. Повнота викладу положень дисертації в наукових публікаціях, зарахованих за темою дисертації, та у рефераті.

Наукові результати дисертації висвітлені у 32 публікаціях здобувача, зокрема у 21 статті у закордонних виданнях, проіндексованих у наукометричних базах Web of Science та/або Scopus, у 10 публікаціях апробаційного характеру та 1 статті, що додатково відображає наукові результати дисертації.

Наукові положення і висновки дисертації мають достатню повноту викладу у статтях здобувача, зарахованих за темою дисертації.

Публікації апробаційного характеру підтверджують достатній рівень апробації отриманих результатів.

Автореферат дисертаційної роботи відображає її зміст та не містить положень, які не висвітлюються в самій дисертації.

7. Відсутність порушення академічної доброчесності.

Дисертація повністю відповідає вимогам щодо академічної доброчесності. Академічного плагіату, фабрикації, фальсифікації у дисертації не виявлено.

8. Зауваження та дискусійні питання.

Дисертаційна робота Є.В. Іванова є фундаментальним дослідженням, що розширює межі класичної теорії переписувальних систем на недискретні моделі. З огляду на рівень докторської дисертації, можна виокремити такі дискусійні положення та зауваження:

1. Залежність прикладних результатів від теоретико-множинних аксіом.

Автор зазначає, що за умови прийняття континуум-гіпотези доведені результати щодо повноти методу спадних можуть застосовуватися до структур потужності континууму, таких як множини дійсних чисел або неперервних функцій.

Дискусійний момент. Оскільки континуум-гіпотеза є незалежною від системи аксіом ZFC, виникає питання про «чутливість» практичних висновків роботи до обраної аксіоматики. Було б доцільно обговорити, чи зберігається повнота методу для моделей вищої потужності (наприклад, $\aleph_2$), якщо припустити заперечення континуум-гіпотези.

2. Обмеження потужністю $\aleph_1$.

Головний результат розділу 1 встановлює повноту методу спадних діаграм для систем, потужність відношення редукції яких не перевищує перший незліченний кардинал ($\aleph_1$).

Зауваження. Хоча це охоплює більшість моделей, актуальних для інформатики (за умови континуум-гіпотези), з суто математичної точки зору залиша-

ється відкритою проблема застосовності цих методів до систем ще більших потужностей. Автор доводить, що індекс 3 у класі DCR3 є оптимальним для $\aleph_1$, проте поведінка ієрархії для кардиналів вищого порядку потребує додаткового висвітлення.

3. Співвідношення формалізації та «паперових» доведень.

Робота містить колосальний обсяг формалізованих доведень у системі Isabelle/HOL (понад 300 сторінок у форматі Archive of Formal Proofs).

Дискусійний момент. Використання систем інтерактивного доведення теорем гарантує найвищу достовірність, проте створює певний розрив між формальним кодом та математичною інтуїцією, доступною широкому колу фахівців. У тексті дисертації автор наводить структуру формальних доказів природною мовою, проте питання про те, наскільки такі складні формальні конструкції можуть бути адаптовані для повсякденної верифікації реального програмного забезпечення (поза межами суто наукових архівів), залишається відкритим.

4. Умова «строгої індуктивності» в узагальненні леми Ньюмана.

У розділі 2 автор пропонує узагальнення леми Ньюмана для класу строго індуктивних систем.

Зауваження. Було б доцільно детальніше проаналізувати, наскільки жорсткою є умова строгої індуктивності (існування точної верхньої межі для кожного ланцюга) для практичних кіберфізичних моделей. Чи існують класи систем, де ця умова не виконується, але локальна конфлюентність все одно гарантує глобальну? Побудований автором «посилений контрприклад Ньюмана» чітко окреслює межі, але питання про мінімально необхідні властивості залишається предметом дискусії.

5. Інтерпретація недетермінованих повних марківських систем (НПМС).

Автор використовує модель НПМС для формалізації неперервних у часі процесів переписування.

Пропозиція щодо уточнення. Хоча термін НПМС є змістовним, його назва може викликати асоціації з імовірнісними (стохастичними) марківськими процесами. Автор підкреслює, що мова йде про недетерміновану версію марківської

властивості (залежність майбутнього тільки від теперішнього), проте уточнення термінології для уникнення плутанини з теорією ймовірностей могло б бути корисним.

Зазначені зауваження та дискусійні моменти лише підкреслюють глибину та складність розв'язаної автором проблеми, вказуючи на нові вектори для подальших досліджень у галузі теоретичних основ інформатики.

9. Загальний висновок.

Дисертаційна робота Іванова Євгена В'ячеславовича «Узагальнена теорія абстрактних переписувальних систем» виконана на високому рівні. За актуальністю, ступенем наукової новизни, теоретичним і практичним значенням отриманих результатів, публікаціями, дотриманням принципів академічної доброчесності дисертаційна робота Іванова Євгена В'ячеславовича «Узагальнена теорія абстрактних переписувальних систем» відповідає вимогам п. 7, 8, 9 «Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 17.11.2021 року №1197, які висуваються до докторських дисертацій, а її автор заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.01 – теоретичні основи інформатики та кібернетики.

Офіційний опонент,
професор кафедри інформаційних систем
факультету прикладної математики та інформатики
Львівського національного університету
імені Івана Франка,
доктор технічних наук, професор

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ



Підпис *Жолткевича Г*
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

КІЇВСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Вх. № 243, шп.ч.
«11» 05 2026 р.