Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Приходько Ольга Дмитрівна

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

Оцінювання параметрів в афінних дифузійних моделях з довгостроковою залежністю

112 — статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
О. Д. Приходько

Науковий керівник
Ральченко Костянтин Володимирович,
доктор фізико-математичних наук,
доцент

Київ — 2026

Анотація

Приходько О. Д. Оцінювання параметрів в афінних дифузійних моделях з довгостроковою залежністю.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю «112 — статистика» — Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2026.

Афінні дифузійні моделі поєднують відносно просту аналітичну структуру з високою прикладною релевантністю, що зумовлює їх широке застосування у фінансовій математиці та математичній економіці. Зокрема, моделі Васічека та Кокса – Інгерсолла – Росса використовуються для опису динаміки відсоткових ставок, волатильності та інших фінансових індикаторів, а задачі статистичного оцінювання їх параметрів є фундаментально важливими як з теоретичної, так і з прикладної точки зору.

Класична теорія оцінювання параметрів дифузійних моделей переважно ґрунтується на припущенні про неперервні спостереження та броунівську природу керуючого шуму. Водночас у реальних застосуваннях дані зазвичай доступні лише у дискретні моменти часу, часто з фіксованим кроком спостережень. Крім того, емпіричні дослідження вказують на наявність довгострокової залежності, яка не може бути адекватно описана стандартним броунівським рухом. Це зумовлює необхідність розвитку методів оцінювання параметрів афінних моделей за дискретними даними та розширення класу керуючих шумів.

У цьому контексті зростає інтерес до дробових і темперованих броунівських процесів, особливо до темперованого дробового броунівського руху та темперованого дробового броунівського руху другого роду, які поєднують локальні властивості дробового броунівського руху з пригніченням довгострокових кореляцій. Це робить актуальним дослідження дифузійних моделей, у яких такі процеси виступають керуючим шумом.

Дисертаційну роботу присвячено задачам оцінювання параметрів у низці афінних дифузійних моделей, а саме в моделях Васічека, Кокса – Інгерсолла – Росса та Орнштейна – Уленбека, у тому числі за наявності довгострокової залежності. Поряд із побудовою та аналізом статистичних оцінок у роботі також

досліджено низку допоміжних властивостей розглянутих процесів, необхідних для обґрунтування асимптотичних результатів. Зважаючи на широку застосовність зазначених моделей у фінансовій математиці та суміжних галузях, подальший теоретичний аналіз та розвиток методів оцінювання параметрів є важливими для підвищення якості статистичного аналізу та прогнозування.

Для моделі Васічека в роботі досліджено задачу оцінювання всіх параметрів за дискретними спостереженнями. Розглянуто статистики, побудовані на основі суми, суми квадратів та суми добутків послідовних спостережень. Встановлено їх граничну поведінку, а також знайдено асимптотичні дисперсії та коваріації. Виходячи з отриманих границь побудовано оцінки всіх параметрів моделі Васічека та доведено їх строгу конзистентність і асимптотичну нормальність.

Для моделі Кокса–Інгерсолла–Росса проаналізовано випадки як неперервних, так і дискретних спостережень. Досліджено оцінювання параметрів зсуву за допомогою узагальненого методу моментів. Отримана оцінка, на відміну від відомих у літературі підходів, не потребує додаткових обмежень на значення параметрів моделі. Для неперервних спостережень доведено асимптотичну нормальність оцінок та встановлено корисні властивості інтегралів від розв'язку стохастичного диференційного рівняння. Для переходу до дискретного випадку запропоновано доцільну схему відбору спостережень, отримано оцінки різниць між відповідними сумами та інтегралами, а також доведено строгу конзистентність і асимптотичну нормальність дискретних оцінок.

У межах дослідження моделі Орнштейна–Уленбека як керуючий шум розглянуто темперований дробовий броунівський рух та темперований дробовий броунівський рух другого роду. Для цих процесів отримано майже напевні оцінки зверху для їхніх приростів, що є ключовим інструментом подальшого статистичного аналізу. На цій основі досліджено задачу оцінювання параметра зсуву моделі Орнштейна – Уленбека за допомогою методу найменших квадратів та доведено строгу конзистентність відповідної оцінки у випадку неперервних спостережень. Основну увагу приділено випадку дискретних спостережень: у відповідному асимптотичному режимі, коли крок спостережень прямує до нуля, а довжина інтервалу спостережень зростає до нескінченності, доведено строгу конзистентність дискретизованої оцінки.

Для всіх розглянутих моделей проведено чисельні експерименти, у межах

яких змодельовано дискретні траєкторії процесів і обчислено відповідні оцінки параметрів. Отримані результати моделювання узгоджуються з теоретичними висновками. Додатково розроблено алгоритм моделювання траєкторій темперованого дробового броунівського руху та темперованого дробового броунівського руху другого роду.

Результати дисертаційної роботи мають як теоретичне, так і практичне значення. Отримані асимптотичні властивості оцінок і встановлені властивості процесів можуть бути використані в подальших теоретичних дослідженнях, а запропоновані алгоритми та методи оцінювання — у прикладних задачах статистичного аналізу даних. Наприклад, алгоритм моделювання темперованих дробових процесів є актуальним інструментом для подальшого розвитку відповідної теорії та її застосувань.

Ключові слова: модель Васічека, модель Кокса – Інгерсолла – Росса, рівняння Ланжевена, процес Орнштейна – Уленбека, оцінювання параметрів, строга конзистентність, асимптотична нормальність, темперований дробовий броунівський рух, темперований дробовий броунівський рух другого роду.

Abstract

Prykhodko O. D. Parameter estimation in affine diffusion models with long-range dependence.

Doctor of Philosophy thesis in specialty 112 —Statistics — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2026.

Affine diffusion models combine an analytically tractable structure with high practical relevance, which has led to their widespread application in financial mathematics and mathematical economics. In particular, the Vasicek and the Cox – Ingersoll – Ross models are used to describe the dynamics of interest rates, volatility, and other financial indicators, and the problem of statistical estimation of their parameters is of fundamental importance from both a theoretical and practical perspective.

The classical theory of parameter estimation in diffusion models is essentially based on assumptions of continuous observations and on the Brownian nature of the driving noise. In real applications, however, data are typically observed only at discrete time points, often with a fixed step. Moreover, empirical studies indicate

the presence of long-range dependence, which cannot be adequately described by standard Brownian motion. This necessitates a development of methods for parameter estimation in affine models based on discrete observations and the expansion of the class of driving noises.

Within this context, there is a growing interest in fractional and tempered fractional Brownian motions, especially in the tempered fractional Brownian motion and the tempered fractional Brownian motion of the second kind. These processes combine the local properties of fractional Brownian motion with attenuated long-term correlations. This highlights the relevance of the investigation of affine models, in which such noises serve as the driving forces.

The thesis is devoted to problems of parameter estimation in a number of affine diffusion models. In particular, the Vasicek, Cox – Ingersoll – Ross, and Ornstein – Uhlenbeck models were investigated, including models with long-term dependence. In this work, in addition to the construction and analysis of statistical estimators, many necessary auxiliary properties of the considered processes were examined. Taking into account a wide usage of the aforementioned models in financial mathematics and the related fields, further theoretical analysis and the development of methods of parameter estimation are important for improving the quality of statistical analysis and forecasting.

In this study, the estimation of all parameters for the Vasicek model based on discrete observations was performed. The statistics based on the sum, the sum of squares, and the sum of products of consecutive observations were analyzed. The asymptotic behavior of the statistics was established, and the asymptotic variances and covariances were derived. Based on the obtained limits, the estimators for all parameters of the Vasicek model were constructed, and their strong consistency and asymptotic normality were established.

Both continuous and discrete observation schemes were analyzed for the Cox – Ingersoll – Ross model. Parameter estimation was performed using the generalized method of moments. The obtained estimator, in contrast to known approaches in the literature, does not require additional restrictions on the values of the parameters. For the continuous observations, the asymptotic normality of the estimator was proved, and useful properties of the integrals of the solution to the stochastic differential equation were derived. For the transition to the discrete case, an appropriate observation

scheme was proposed, bounds for the differences between the corresponding sums and integrals were established, and the strong consistency and asymptotic normality of the discretized estimators were proved.

Within the framework of the investigation of the Ornstein – Uhlenbeck model, the tempered fractional Brownian motion and its second kind were considered. For these processes, almost sure upper bounds for their increments were derived. These bounds serve as a key tool for further statistical analysis. On this basis, the problem of drift parameter estimation was investigated by means of the least squares method. The strong consistency of the derived estimator was proved for the case of continuous observations. The main focus was on the case of discrete observations: the strong consistency was established in the asymptotic regime where the observation step tends to zero while the observation horizon tends to infinity.

For all the considered models numerical experiments were conducted, in which discrete trajectories were simulated and the corresponding estimators were calculated. The obtained results are consistent with the theoretical conclusions. Additionally, an algorithm for modeling trajectories of the tempered fractional Brownian motion and its second kind was developed.

The results of the thesis are of both theoretical and practical significance. The derived asymptotic properties of the estimators and the established properties of the processes can be applied in further theoretical investigations, and the proposed algorithms and methods can be used in practical problems of statistical data analysis. In particular, the algorithm for modeling trajectories of the tempered fractional Brownian motions is a relevant tool for further development of the suitable theory and its applications.

Keywords: Vasicek model, Cox – Ingersoll – Ross model, Ornstein – Uhlenbeck process, parameter estimation, strong consistency, asymptotic normality, the tempered fractional Brownian motion, the tempered fractional Brownian motion of the second kind.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1) Prykhodko O., Ralchenko K. Strongly consistent estimation of all parameters

in the Vasicek model by discrete observations // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. 2022. no. 4. P. 26–30.

2) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic normality of estimators for all parameters in the Vasicek model by discrete observations // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2024. Vol. 111. P. 123 – 135.
3) Prykhodko O., Ralchenko K. Discretization and Asymptotic Normality of Drift Parameters Estimator in the Cox-Ingersoll-Ross Model // Austrian Journal of Statistics. 2025. Vol. 54, no. 1. P. 82 – 99.
4) Prykhodko O., Ralchenko K. Drift parameter estimation for tempered fractional Ornstein–Uhlenbeck processes based on discrete observations // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2026. Vol. 13, no. 2. P. 169 – 194.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1) Prykhodko O., Ralchenko K. Estimation of all parameters in the Vasicek model by low-frequency data // Математика та математичне моделювання у сучасному технічному університеті. [Електронний ресурс]: Збірник тез доповідей І Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих вчених. Луцьк, Україна : Луцьк: ДонНТУ. 2022. С. 62–63.
2) Приходько О. Д., Ральченко К. В. Асимптотичні властивості оцінок параметрів моделі Васічека за дискретними спостереженнями // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2023». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2023. С. 47.
3) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic behavior of the parameter estimators in the Vasicek model based on discrete observations // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. 2023. Access mode: https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Prykhodko-Ralchenko.pdf.
4) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic normality of estimators for all parameters in the Vasicek model by discrete observations // XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського : Тези доповідей. Київ, Україна : КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2023. С. 144–145.

5) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic behavior of estimators for all parameters in the Vasicek model by discrete observations // Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2023» : Book of abstracts. Kyiv, Ukraine : Taras Shevchenko National University of Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. 2023. P. 47.
6) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic behavior of discrete estimators for drift parameters in the Cox-Ingersoll-Ross model // Матеріали XXII Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2024». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2024. С. 45–46.
7) Prykhodko O., Ralchenko K. Strong consistency of discrete estimators for drift parameters in the Cox-Ingersoll-Ross model // XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, Київ, 9-11 травня 2024 р. : [збірник тез /оргком.: Глибовець А. М. та ін.]. Київ, Україна : "Національний університет Києво-Могилянська академія"[та ін.]. - [Київ : б. в.]. 2024. С. 41–42.
8) Prykhodko O., Ralchenko K. Drift parameters estimation in the Cox–Ingersoll–Ross model // Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2024» : Book of abstracts. Kyiv, Ukraine : Taras Shevchenko National University of Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. 2024. P. 80.
9) Prykhodko O., Ralchenko K. Strong consistency of drift parameter estimator in the Langevin equation driven by tempered fractional Brownian motion // Матеріали XXIII Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2025». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2025. С. 43–44.
10) Prykhodko O., Ralchenko K. Strongly consistent estimation of drift parameter in tempered fractional Ornstein-Uhlenbeck process // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. 2025. Access mode: https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2025/abstracts/Prykhodko-Ralchenko.pdf.
11) Prykhodko O., Ralchenko K. Almost sure bounds for increments of tempered fractional Brownian motion with statistical applications // XX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука: Тези доповідей. Київ, Україна : КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2025. С. 138–139.

Зміст

Вступ **10**

1 Огляд літератури за темою дисертації **21**

2 Оцінювання всіх параметрів моделі Васічека за дискретними спостереженнями **31**

2.1 Постановка задачі 31
2.2 Збіжність статистик 32
2.3 Побудова оцінок 35
2.4 Асимптотична нормальність оцінок 36
2.5 Моделювання 45
2.6 Висновки 48

3 Оцінювання параметрів зсуву в моделі Кокса–Інгерсолла–Росса **49**

3.1 Постановка задачі 49
3.2 Неперервна оцінка 51
3.2.1 Асимптотична поведінка інтегралів 51
3.2.2 Асимптотична нормальність оцінки за неперервними спостереженнями 57
3.3 Дискретна оцінка 61
3.3.1 Наближення інтегралів сумами. Асимптотична поведінка сум 62
3.3.2 Строга конзистентність та асимптотична нормальність оцінки за дискретними спостереженнями 65
3.4 Моделювання 68
3.5 Висновки 71

4 Оцінювання параметру зсуву в темперованій моделі Орнштейна-Уленбека 73

4.1 Означення та деякі відомі властивості ТДБР та ТДБРІІ 73

4.2 Оцінки для ТДБР та ТДБРІІ та їх приростів 76

4.2.1 Оцінки для дисперсій темперованих ДБР та їх приростів 76

4.2.2 Асимптотичний ріст майже напевно приростів ТДБР та ТДБРІІ 78

4.3 Строго конзистентна оцінка для параметра зсуву у моделі Орнштейна-Уленбека 86

4.3.1 Опис статистичної моделі 86

4.3.2 Неперервна оцінка 87

4.3.3 Дискретна оцінка 88

4.3.3.1 Доведення теореми 4.3 у випадку ТДБР 89

4.3.3.2 Схема доведення теореми 4.3 у випадку ТДБРІІ . 93

4.4 Моделювання 94

4.5 Висновки 95

Висновки 100

Список використаних джерел 102

Додатки 113

А Список публікацій здобувача за темою дисертації 114

Б Допоміжні теореми 118

Вступ

Актуальність теми. Дисертаційну роботу присвячено задачам оцінювання параметрів у низці афінних дифузійних моделей, зокрема в моделях Васічека, Кокса – Інгерсолла – Росса та Орнштейна – Уленбека, у тому числі за наявності довгострокової залежності. Поряд із побудовою та аналізом статистичних оцінок у роботі також досліджено низку допоміжних властивостей розглянутих процесів, необхідних для обґрунтування асимптотичних результатів. Зважаючи на широку застосовність зазначених моделей у фінансовій математиці та суміжних галузях, подальший теоретичний аналіз і розвиток методів оцінювання параметрів є важливими для підвищення якості статистичного аналізу та прогнозування.

До афінних дифузійних моделей належать стохастичні диференціальні рівняння, у яких коефіцієнт зсуву та квадрат коефіцієнта дифузії є афінними функціями стану процесу, що забезпечує афінну структуру умовних характеристичних функцій. Привабливість таких моделей зумовлена поєднанням відносно простої аналітичної структури з високою прикладною значущістю: для афінних моделей відомі явні формули для умовних розподілів, характеристичних функцій та моментів, які забезпечують зручний опис умовної динаміки і водночас дозволяють адекватно відтворювати характерні риси реальних фінансових і економічних часових рядів. Зокрема, моделі Васічека та Кокса – Інгерсолла – Росса широко застосовуються для опису динаміки відсоткових ставок, волатильності та інших макроекономічних і фінансових індикаторів, що робить задачі статистичного оцінювання їх параметрів фундаментально важливими як з теоретичної, так і з прикладної точки зору.

Класична теорія статистичного оцінювання параметрів дифузійних моделей значною мірою ґрунтується на припущенні про неперервні спостереження траєкторії процесу та броунівську природу керуючого шуму. Водночас у ре-

альних застосуваннях дані, як правило, доступні лише у дискретні моменти часу, часто з фіксованим, неасимптотично малим кроком спостережень. Крім того, численні емпіричні дослідження вказують на наявність довгострокової залежності та складніших кореляційних структур, які не можуть бути адекватно описані стандартним броунівським рухом. Це зумовлює потребу як у розвитку методів оцінювання параметрів афінних моделей за дискретними даними, так і в розширенні класу керуючих шумів за рахунок процесів з довгостроковою пам'яттю.

Паралельно з розвитком теорії стохастичних диференціальних рівнянь активно розвивається теорія дробових та інших узагальнених вінерівських процесів. Окрім класичного дробового броунівського руху, останніми роками запропоновано темперовані дробові броунівські процеси, зокрема темперований дробовий броунівський рух та темперований дробовий броунівський рух другого роду. Ці процеси поєднують локальні властивості дробового броунівського руху з експоненційним пригніченням довгострокових кореляцій, що робить їх більш гнучкими та придатними для моделювання реальних даних.

Таким чином, актуальність дослідження зумовлена поєднанням кількох чинників: широкою прикладною значущістю афінних дифузійних моделей, обмеженістю класичних методів оцінювання у випадку дискретних спостережень і стандартного броунівського шуму, а також необхідністю врахування довгострокової залежності в сучасних стохастичних моделях. Розробка та обґрунтування статистичних методів оцінювання параметрів у таких умовах є важливим кроком як для подальшого розвитку теорії та статистики випадкових процесів, так і для розв'язання актуальних прикладних задач фінансової та економічної статистики.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дане дослідження виконано на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка у рамках державної бюджетної дослідницької наукової теми №22БФ038-01 «Стохастичні динамічні системи, неоднорідні у часі або з випадковим часом: асимптотика та статистичний аналіз» (номер державної реєстрації 0122U001843), що входить до комплексного тематичного плану

науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

Мета та завдання дослідження. Мета дослідження полягає у розробці та теоретичному обґрунтуванні статистичних методів оцінювання параметрів афінних дифузійних моделей, що задаються стохастичними диференціальними рівняннями, зокрема моделей Васічека, Кокса – Інгерсолла – Росса та Орнштейна – Уленбека, за умов неперервних і дискретних спостережень, а також у встановленні асимптотичних властивостей побудованих оцінок, зокрема строгої конзистентності та асимптотичної нормальності.

Для досянення заданої мети було сформульовано наступні завдання:

- дослідити статистичні задачі оцінювання параметрів у моделі Васічека за дискретними спостереженнями, побудувати оцінки всіх параметрів моделі та встановити їх строгу конзистентність і асимптотичну нормальність;
- розробити методи оцінювання параметрів зсуву моделі Кокса–Інгерсолла–Росса на основі неперервних і дискретних спостережень, дослідити асимптотичні властивості відповідних оцінок – строгу конзистентність та асимптотичну нормальність;
- дослідити задачу оцінювання параметрів неергодичної моделі Орнштейна–Уленбека, керованої темперованими дробовими броунівськими процесами, отримати оцінки зверху для приростів керуючих процесів, побудувати оцінки параметра зсуву в неперервному і дискретному випадках та обґрунтувати їх строгу конзистентність;
- розробити методи моделювання темперованого дробового броунівського руху та темперованого дробового броунівського руху другого роду, необхідні для чисельної реалізації та статистичного дослідження відповідних моделей;
- провести чисельну перевірку отриманих теоретичних результатів за допомогою моделювання відповідних випадкових процесів та статистичних оцінок.

Об’єктом дослідження є афінні дифузійні моделі, що задаються стохастичними диференціальними рівняннями, зокрема моделі Васічека, Кокса –

Інгерсолла – Росса та Орнштейна – Уленбека, керовані вінерівським процесом або темперованими дробовими броунівськими процесами.

Предметом дослідження є статистичні методи оцінювання параметрів афінних дифузійних моделей за неперервними та дискретними спостереженнями, а також асимптотичні властивості відповідних оцінок.

Методи дослідження. Для отримання теоретичних результатів використано методи математичного аналізу, теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових процесів, зокрема методи асимптотичного аналізу стохастичних інтегралів і мартингальні метод. Моделювання даних виконано засобами мови програмування R.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано нові теоретичні результати у задачах статистичного оцінювання параметрів афінних дифузійних моделей. Зокрема, побудовано нові статистичні оцінки параметрів для низки моделей, досліджено їх асимптотичні властивості та встановлено умови строгої конзистентності й асимптотичної нормальності. Крім того, отримано нові властивості розглянутих стохастичних процесів, необхідні для обґрунтування відповідних статистичних результатів. У роботі одержано такі нові результати:

1) у моделі Васічека за дискретними спостереженнями доведено збіжність майже напевно нормованих сум спостережень, їх квадратів та добутків сусідніх пар спостережень до невипадкових границь; встановлено результати щодо асимптотичної поведінки дисперсій та коваріацій відповідних статистик;
2) побудовано оцінки одночасно для трьох параметрів моделі Васічека на основі дискретних спостережень та доведено їх строгу конзистентність і асимптотичну нормальність;
3) отримано явний вигляд асимптотичної коваріаційної матриці для оцінок параметрів моделі Васічека, що дозволяє визначити теоретичні стандартні відхилення відповідних оцінок;
4) у моделі Кокса–Інгерсолла–Росса досліджено оцінку параметрів зсуву, побудовану за узагальненим методом моментів на основі неперервних

спостережень, яка, на відміну від більшості відомих у літературі підходів, визначена для всіх додатних значень параметрів, та доведено її асимптотичну нормальність;

5) на основі неперервної оцінки параметрів зсуву моделі Кокса–Інгерсолла–Росса побудовано оцінку за дискретними спостереженнями та доведено її строгу конзистентність і асимптотичну нормальність; отримана дискретна оцінка також є визначеною для всіх додатних значень параметрів;
6) отримано явні вирази для асимптотичних коваріаційних матриць неперервної та дискретної оцінок параметрів зсуву моделі Кокса–Інгерсолла–Росса, що дозволяє визначити їх теоретичні стандартні відхилення;
7) отримано оцінки дисперсій та приростів темперованого дробового броунівського руху (ТДБР) і темперованого дробового броунівського руху другого роду (ТДБРII), а також встановлено асимптотичні межі для приростів цих процесів;
8) у моделях Орнштейна–Уленбека, керованих ТДБР та ТДБРII, досліджено оцінку параметра зсуву, побудовану методом найменших квадратів за неперервними спостереженнями, та доведено її строгу конзистентність;
9) на основі неперервної оцінки параметра зсуву в моделях Орнштейна–Уленбека, керованих ТДБР та ТДБРII, побудовано дискретну оцінку та доведено її строгу конзистентність;
10) розроблено та реалізовано алгоритм моделювання темперованого дробового броунівського руху та темперованого дробового броунівського руху другого роду, що може бути використаний для чисельного дослідження статистичних методів у моделях із довгостроковою залежністю.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має переважно теоретичний характер і присвячена дослідженню статистичних властивостей оцінок параметрів афінних дифузійних моделей. Одержані результати спрямовані насамперед на розвиток теорії статистичного оцінювання параметрів стохастичних диференціальних рівнянь.

Разом з тим отримані результати можуть бути використані у задачах статистичного аналізу та моделювання випадкових процесів, зокрема при калібруванні афінних дифузійних моделей за експериментальними або фінансовими

даними та статистичному оцінюванні параметрів моделей Васічека, Кокса–Інгерсолла–Росса та Орнштейна–Уленбека за неперервними і дискретними спостереженнями. Отримані результати також можуть застосовуватися при розв'язанні прикладних задач фінансової та економічної статистики, зокрема під час моделювання та прогнозування динаміки відсоткових ставок і пов'язаних фінансових індикаторів. Розроблений алгоритм моделювання темперованого дробового броунівського руху та темперованого дробового броунівського руху другого роду може бути використаний для чисельних експериментів і статистичного дослідження моделей із довгостроковою залежністю.

Особистий внесок здобувача. Усі основні наукові результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У статтях [89, 94, 98, 101], опублікованих у співавторстві з науковим керівником, здобувачу належать проведення досліджень, отримання та доведення основних результатів. Науковому керівнику належать наукове консультування, постановка задач, участь в обговоренні результатів та перевірка отриманих висновків.

Апробація результатів дисертації. Результати, які опубліковано в дисертації, були представлені та обговорені на таких міжнародних конференціях:

1) I Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих вчених «Математика та математичне моделювання у сучасному технічному університеті», 30 листопада, 2022, Луцьк, Україна;
2) XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023», 14 квітня, 2023, Київ, Україна;
3) International Conference of Young Mathematicians, June 1–3, 2023, Kyiv, Ukraine;
4) XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського, 11–12 жовтня 2023, Київ, Україна;
5) Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2023», December 26-27, 2023, Kyiv, Ukraine;
6) XXII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2024», 11 квітня, 2024, Київ, Україна;
7) XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, 9-11 травня, 2024, Київ, Україна;

8) Ukraine Mathematics Conference At the End of the Year 2024, December 16-18, 2024, Kyiv, Ukraine;
9) XXIII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2025», 10 квітня, 2025, Київ, Україна;
10) International Conference of Young Mathematicians, June 4–6, 2025, Kyiv, Ukraine;
11) XX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 17–20 листопада, 2025, Київ, Україна.

А також результати дисертації були представлені на таких семінарах:

1) Аспірантський воркшоп з теорії ймовірностей, 4 лютого 2026 року, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету та кафедра дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
2) Науковий семінар, 12 березня 2026 року, кафедра теорії ймовірностей статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет,Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
3) Семінар "Асимптотичні методи в статистиці 18 березня 2026 року.

Публікації. За матеріалами дисертаційного дослідження опубліковано 15 наукових праць, зокрема:

- 4 статті ([89, 94, 98, 101]) у періодичних фахових виданнях, що індексуються в наукометричній базі Scopus, серед яких видання, у якому опубліковано роботу [101], належить до квартиля Q2, [98] — до квартиля Q3, а видання, у яких опубліковано роботи [89] та [94], — до квартиля Q4 відповідно до класифікації SCImago Journal Rank;
- 11 тез доповідей на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях: [2, 88, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 99, 100].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, огляду літератури за темою дослідження, трьох розділів з власними результатами, висновків, списку використаних джерел та двох додатків (додаток А містить список наукових публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про

апробацію результатів, а додаток Б — деякі додаткові факти, використані у доведеннях). Загальний обсяг роботи становить 121 сторінку, з яких основний текст викладено на 92 сторінках. Список використаних джерел містить 119 найменувань.

Зміст роботи. **Перший розділ** присвячено аналізу наукових джерел, результати яких є дотичними до тематики дисертаційного дослідження. У розділі наведено огляд основних результатів, що стосуються властивостей розглянутих стохастичних диференціальних рівнянь і відповідних випадкових процесів, існуючих підходів до оцінювання їх параметрів, а також прикладів застосування таких моделей для опису та прогнозування реальних даних.

Зокрема, розглянуто результати, пов'язані з моделями Васічека та Кокса–Інгерсолла–Росса, а також з процесами з довгостроковою залежністю, включаючи темперований дробовий броунівський рух (ТДБР) і темперований дробовий броунівський рух другого роду (ТДБРII). Значна частина досліджень у цій галузі сформувалася відносно недавно: модель Васічека була запропонована у 1977 році, рівняння Кокса–Інгерсолла–Росса — у 1985 році, а темперовані дробові броунівські процеси — у 2013 та 2018 роках відповідно. Нині відповідний напрям досліджень активно розвивається, що зумовлює значну кількість сучасних результатів, присвячених теоретичним властивостям моделей і статистичним методам оцінювання їх параметрів.

У **другому, третьому та четвертому розділах** викладено власні результати дисертаційного дослідження. Основну увагу приділено задачам статистичного оцінювання параметрів афінних дифузійних моделей на основі дискретних спостережень. Разом з тим при дослідженні дискретних моделей отримано низку допоміжних результатів, зокрема встановлено окремі властивості відповідних процесів та розглянуто неперервні випадки. У четвертому розділі також досліджено деякі властивості темперованого дробового броунівського руху (ТДБР) та темперованого дробового броунівського руху другого роду (ТДБРII).

У кожному з розділів розглянуто окрему модель: Васічека (другий розділ), Кокса–Інгерсолла–Росса (третій розділ) та Орнштейна–Уленбека (четвертий розділ). Для кожної моделі проведено чисельні експерименти у середовищі програмування R (див. підрозділи 2.5, 3.4, 4.4). Наприкінці другого, третього

та четвертого розділів наведено підсумки отриманих результатів, оформлені у підпунктах під назвою «Висновки».

У **другому розділі** досліджено задачу оцінювання параметрів моделі Васічека, що задається стохастичним диференціальним рівнянням

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)\,dt + \gamma\,dW_t, \qquad X_0 = x_0 \in \mathbb{R},$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, а W — вінерівський процес. Параметри α, β та γ вважаються невідомими та підлягають статистичному оцінюванню.

На основі дискретних спостережень вигляду

$$X_0, X_h, X_{2h}, \ldots, X_{nh},$$

де $h > 0$ — фіксований крок спостережень, побудовано оцінки всіх трьох параметрів моделі та доведено їх строгу конзистентність і асимптотичну нормальність.

Другий розділ складається з шести підрозділів. У підрозділі 2.1 наведено постановку задачі та основні теоретичні властивості моделі. У підрозділі 2.2 встановлено збіжність майже напевно статистик, побудованих на основі дискретних спостережень, до невипадкових граничних значень. У підрозділі 2.3 на основі отриманих збіжностей побудовано оцінки параметрів і доведено їх строгу конзистентність.

Підрозділ 2.4 присвячено дослідженню асимптотичної поведінки відповідних статистик: отримано границі їх дисперсій і коваріацій, доведено їх спільну асимптотичну нормальність. На основі цього, встановлено асимптотичну нормальність побудованих оцінок параметрів із явним виглядом коваріаційної матриці.

У підрозділі 2.5 наведено результати чисельного моделювання, які підтверджують отримані теоретичні висновки. Другий розділ завершується підрозділом 2.6, у якому стисло сформульовано основні результати розділу.

У **третьому розділі** досліджено задачу оцінювання параметрів зсуву a та b у моделі Кокса–Інгерсолла–Росса, що задається стохастичним диференціальним рівнянням

$$r_t = r_0 + \int_0^t (a - b r_s)\,ds + \sigma \int_0^t \sqrt{r_s}\,dW_s, \qquad t \geq 0,$$

де W — вінерівський процес, а a, b, σ та r_0 є додатними константами.

У розділі розглянуто оцінювання параметрів на основі неперервних та дискретних спостережень. Для неперервного випадку досліджено оцінку, запропоновану в роботі [30], для якої раніше було встановлено строгу конзистентність, та доведено її асимптотичну нормальність. Для цього отримано необхідні асимптотичні властивості інтегралів від розв'язку рівняння та встановлено асимптотичну нормальність відповідних мартингалів Ітo.

На основі неперервної оцінки побудовано її дискретний аналог, отриманий шляхом заміни інтегралів відповідними сумами. У третьому розділі доведено строгу конзистентність і асимптотичну нормальність побудованої дискретної оцінки, причому асимптотична коваріаційна матриця збігається з відповідною матрицею для неперервного випадку.

Третій розділ складається з п'яти підрозділів. У підрозділі 3.1 наведено постановку задачі та основні властивості моделі. У підрозділі 3.2 досліджено оцінювання параметрів за неперервними спостереженнями та встановлено асимптотичні властивості відповідної оцінки. У підрозділі 3.3 розглянуто дискретний випадок, описано схему дискретних спостережень та доведено властивості дискретної оцінки. У підрозділі 3.4 наведено результати чисельного моделювання, які підтверджують отримані теоретичні висновки. Підрозділ 3.5 містить стислий виклад основних результатів розділу.

Четвертий розділ присвячено дослідженню темперованого дробового броунівського руху (ТДБР) та темперованого дробового броунівського руху другого роду (ТДБРІІ), а також задачі оцінювання параметра зсуву в моделі Орнштейна–Уленбека, керованій зазначеними процесами. Модель задається стохастичним рівнянням

$$Y_t = y_0 + \theta \int_0^t Y_s\, ds + \sigma X_t, \qquad t \geq 0,$$

де X — ТДБР або ТДБРІІ, $\sigma > 0$ та $y_0 \in \mathbb{R}$ — відомі константи, $\theta > 0$ — невідомий параметр зсуву.

Розділ складається з п'яти підрозділів. У підрозділі 4.1 наведено означення ТДБР і ТДБРІІ та сформульовано їх основні властивості, необхідні для подальшого дослідження. У підрозділі 4.2 отримано оцінки для дисперсій і приростів цих процесів, а також встановлено асимптотичні оцінки зверху для їх приростів.

У підрозділі 4.3 розглянуто задачу оцінювання параметра зсуву θ на основі неперервних і дискретних спостережень. Досліджено оцінку параметра зсуву типу найменших квадратів, доведено її строгу конзистентність у неперервному випадку та встановлено строгу конзистентність відповідної дискретної оцінки, отриманої шляхом заміни інтеграла відповідною сумою.

У підрозділі 4.4 наведено результати чисельного моделювання, подані у вигляді таблиць, та виконано їх порівняння з теоретичними результатами. Підрозділ 4.5 містить стислий виклад основних результатів четвертого розділу.

Висновки містять стислий виклад основних результатів дисертаційного дослідження.

Наприкінці дисертації наведено **список використаних джерел**, який містить перелік наукових праць, у яких викладено результати, використані під час дослідження, а також **два додатки**: у додатку А подано список наукових публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію її результатів; у додатку Б наведено формулювання допоміжних тверджень і результатів, що використовуються у доведеннях.

Розділ 1

Огляд літератури за темою дисертації

Дисертаційну роботу присвячено статистичному оцінюванню параметрів в афінних дифузійних моделях, зокрема за наявності довгострокової залежності. До таких моделей належать процеси Орнштейна–Уленбека, Васічека та Кокса–Інгерсолла–Росса, які широко застосовуються в економетриці, зокрема для опису динаміки короткострокових відсоткових ставок, а також виникають у фізиці та інших галузях природничих наук. У цьому огляді літератури спочатку розглянуто джерела, що стосуються тематики дисертації загалом, після чого наведено детальніший огляд робіт, пов'язаних із конкретними моделями та окремими розділами дисертаційного дослідження.

Загальний опис афінних дифузійних моделей та споріднених процесів, їхніх властивостей і фінансових застосувань наведено в монографії [4], де також детально розглянуто методи моделювання таких процесів.

Статистичному оцінюванню параметрів дифузійних моделей присвячено значну кількість робіт. Перші дослідження з цієї тематики з'явилися ще у 1970-х роках [18, 56, 82]. У цих роботах, як і в багатьох наступних, розглядаються схеми неперервних спостережень, тобто припускається, що доступна вся траєкторія розв'язку відповідного стохастичного диференціального рівняння на деякому відрізку часу $[0, T]$. Така схема спостережень є природною для неперервних процесів і ґрунтовно досліджена для широкого класу дифузійних моделей.

Виклад теорії статистичного оцінювання параметрів дифузійних процесів за неперервними спостереженнями можна знайти, зокрема, в монографіях [14, 42, 47, 55, 60, 85]. У книзі [55] наведено докладний теоретичний опис методів оцінювання параметрів для різних ергодичних дифузійних моделей на основі неперервних спостережень. У монографії [47] основну увагу приділено

методам моделювання стохастичних диференціальних рівнянь та відповідним статистичним оцінкам, зокрема з використанням мови програмування R. Серед новіших робіт варто відзначити статтю [70], у якій строгу конзистентність оцінки максимальної вірогідності параметра зсуву однорідного дифузійного процесу доведено за мінімальних припущень щодо коефіцієнтів моделі.

Окрім оцінювання параметрів за неперервними спостереженнями, у літературі інтенсивно вивчаються різноманітні схеми дискретних спостережень. Інтерес до таких схем зумовлений практичними застосуваннями дифузійних моделей, оскільки реальні дані, як правило, мають дискретний характер. У багатьох прикладних задачах траєкторії процесів спостерігаються лише в дискретні моменти часу, наприклад, з денною, місячною, або квартальною періодичністю. Якщо крок між спостереженнями є малим, природно використовувати дискретизовані аналоги оцінок, побудованих для неперервних спостережень, оскільки відповідні інтеграли можуть бути добре апроксимовані інтегральними сумами.

Починаючи з середини 1980-х років з'явилася значна кількість робіт, присвячених оцінюванню параметрів дифузійних моделей за дискретними, зокрема високочастотними, спостереженнями, де крок між моментами спостережень прямує до нуля [26, 38, 86]. Доволі загальні результати для багатовимірних дифузійних процесів з невідомими параметрами як у коефіцієнті зсуву, так і в коефіцієнті дифузії, отримано в роботі [117]. Додаткові результати з цієї тематики можна знайти в монографії [47] та в оглядових статтях [3, 37, 81, 106].

Задачі оцінювання параметрів у дифузійних моделях з довгостроковою залежністю є значно менш вивченими, особливо в загальній постановці, і відповідна теорія наразі активно розвивається. Детальний виклад теорії параметричного оцінювання для дробових дифузійних процесів наведено в монографіях [53, 87] та в оглядовій статті [71]. Далі буде розглянуто літературу, присвячену конкретним моделям, які становлять основу дисертаційного дослідження.

Огляд за розділом 2. Модель Васічека, запропонована у 1977 році в статті [113], широко застосовується в різних галузях, зокрема в економіці та математичній статистиці. Вона описується стохастичним диференціальним рівнянням

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)\, dt + \gamma dW_t, \tag{1.1}$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ і $\gamma > 0$ — невідомі параметри, а W є стандартним броунівським рухом.

Відомо, що рівняння (1.1) має єдиний розв'язок, який допускає явне представлення у вигляді

$$X_t = \frac{\alpha}{\beta} + e^{-\beta t}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \gamma \int_0^t e^{-\beta(t-s)}\, dW_s, \tag{1.2}$$

див., наприклад, [76, рівняння (9.7)].

У фінансових застосуваннях рівняння (1.1) використовується для опису динаміки короткострокової відсоткової ставки. У цій інтерпретації параметр β характеризує швидкість повернення процесу до середнього рівня, величина α/β відповідає довгостроковому середньому значенню відсоткової ставки, а параметр γ визначає рівень стохастичної волатильності.

На практиці зазвичай спостерігаються лише значення процесу X, тоді як параметри α, β та γ є невідомими. Оцінювання цих параметрів є ключовим для задач статистичного аналізу та прогнозування, у зв'язку з чим дана проблема активно досліджується в літературі протягом тривалого часу. У багатьох роботах розглядається схема неперервних спостережень, коли доступна вся траєкторія $\{X_t,\ t \in [0,T]\}$. За такої схеми зазвичай припускається, що параметр дифузії γ відомий, оскільки його можна обчислити майже напевно за допомогою квадратичних варіацій. Тоді параметри зсуву α та β можуть бути оцінені за допомогою методів максимальної вірогідності або найменших квадратів. Для моделі Васічека обидва підходи приводять до однакових оцінок, які є конзистентними та асимптотично нормальними при $T \to \infty$. Детальніший виклад відповідних результатів наведено, зокрема, у прикладах 1.26 та 1.35 монографії [55].

У випадку дискретних спостережень природним підходом є використання дискретизованих аналогів оцінок, побудованих для неперервних спостережень. Якщо крок між моментами спостережень є малим, відповідні інтеграли можуть бути добре апроксимовані інтегральними сумами, що обґрунтовує застосування таких методів, див., наприклад, [3, 37, 47, 106]. Натомість у випадку низькочастотних даних, коли крок між спостереженнями є фіксованим і не прямує до нуля, методи, засновані на неперервних спостереженнях, безпосередньо не застосовні, а параметр дифузії γ вже не можна вважати відомим. Це зумовлює необхідність

побудови спеціальних дискретних оцінок, які дозволяють одночасно оцінювати всі параметри моделі, зокрема α, β та γ. Саме цій задачі й присвячено розділ 2 дисертаційної роботи.

Альтернативний підхід до оцінювання параметрів полягає в дискретизації самої моделі, а не відповідних неперервних оцінок. Для рівняння (1.1) такий підхід приводить до дискретно-часової моделі Васічека з неперервним простором станів, у якій дані інтерпретуються як часовий ряд, а залежність між послідовними спостереженнями описується авторегресійною моделлю (див., наприклад, [107]). Оцінювання параметрів у такій постановці за допомогою методу максимальної вірогідності розглянуто в статті [111]. Водночас слід зазначити, що відповідні оцінки, зокрема для параметра γ, мають доволі громіздкий аналітичний вигляд.

Узагальнення моделі Васічека на випадок наявності довгострокової або короткострокової залежності та методи оцінювання параметрів для таких моделей розглядалися в численних роботах. Зокрема, оцінки максимальної вірогідності параметрів зсуву на основі неперервних спостережень для дробової моделі Васічека, керованої дробовим броунівським рухом, побудовано та досліджено в роботах [62, 63, 64, 110]. Інші методи оцінювання, зокрема метод найменших квадратів та оцінки ергодичного типу, розглянуто в [61, 7, 8]. Оцінки найменших квадратів для неергодичної моделі Васічека з більш загальним гауссовим шумом досліджено в [36], а для темперованої дробової моделі Васічека — у [72, 74]. Різноманітні фінансові застосування дробової моделі Васічека наведено, зокрема, у роботах [21, 22, 23, 40, 105].

Огляд за розділом 3. Модель Васічека виявилася успішною в прикладних задачах, однак з метою більш адекватного моделювання динаміки короткострокових відсоткових ставок у статті [25] було запропоновано та досліджено дифузійний процес $r = \{r_t, t \geq 0\}$, який описується стохастичним диференціальним рівнянням

$$dr_t = (a - br_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t, \quad t \geq 0. \tag{1.3}$$

Цей процес згодом отримав назву процесу Кокса – Інгерсолла – Росса. Тут $W = \{W_t, t \geq 0\}$ є вінерівським процесом, який моделює випадковий ринковий фактор ризику, а a, b та σ — додатні константи. Параметр b характеризує

швидкість збіжності процесу до середнього рівня a/b, тоді як σ відповідає за рівень волатильності. Відомо, що модель (1.3) має низку емпірично значущих властивостей; зокрема, відсоткова ставка r_t у цій моделі майже напевно не набуває від'ємних значень. Наразі модель Кокса – Інгерсолла – Росса широко використовується у фінансовій математиці, передусім для оцінювання вартості похідних фінансових інструментів, пов'язаних із відсотковими ставками, а також у моделюванні стохастичної волатильності, зокрема в моделі Хестона [41]. Основні властивості цього процесу, його фінансові застосування та алгоритми чисельного моделювання наведено, наприклад, у монографії [4].

Теорія оцінювання параметрів для процесу Кокса – Інгерсолла – Росса активно розвивається. Як зазначалося вище, статистичне оцінювання параметрів стохастичних диференціальних рівнянь, керованих вінерівським процесом, є добре розробленим. Водночас стандартні підходи зазвичай ґрунтуються на припущенні ліпшицевості коефіцієнта дифузії. Для коефіцієнта $\sigma\sqrt{x}$ у моделі Кокса – Інгерсолла – Росса ця умова не виконується, крім того, відповідний коефіцієнт не є відокремленим від нуля. У зв'язку з цим задача статистичного оцінювання параметрів цієї моделі потребує окремого та більш детального аналізу.

Випадок оцінювання параметрів за неперервними спостереженнями, коли спостерігається вся траєкторія $\{r_t,\ t \in [0,T]\}$, для моделі Кокса – Інгерсолла – Росса розглянуто, зокрема, у статтях [11, 12]. У цих роботах запропоновано конзистентну та асимптотично нормальну оцінку максимальної вірогідності параметрів зсуву, яка має вигляд

$$\hat{a}_T^{\mathrm{mle}} = \frac{\int_0^T r_t\,dt \int_0^T \frac{dr_t}{r_t} - T(r_T - r_0)}{\int_0^T r_t\,dt \cdot \int_0^T \frac{dt}{r_t} - T^2}, \qquad \hat{b}_T^{\mathrm{mle}} = \frac{(r_0 - r_T)\int_0^T \frac{dt}{r_t} + T\int_0^T \frac{dr_t}{r_t}}{\int_0^T r_t\,dt \cdot \int_0^T \frac{dt}{r_t} - T^2}. \tag{1.4}$$

Зауважимо, що оцінка (1.4) є коректно визначеною лише за умови $2a \geq \sigma^2$, оскільки вона містить інтеграл $\int_0^T \frac{1}{r_t}\,dt$, який існує з імовірністю 1 тоді й лише тоді, коли $2a \geq \sigma^2$ (див. [11, твердження 4]).

З метою усунення цього обмеження в статті [30] запропоновано альтернативну оцінку, яка не вимагає виконання умови $2a \geq \sigma^2$. Вона ґрунтується на

ергодичних властивостях процесу Кокса – Інгерсолла – Росса і має вигляд

$$\tilde{a}_T = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\left(\int_0^T r_t\,dt\right)^2}{T\int_0^T r_t^2\,dt - \left(\int_0^T r_t\,dt\right)^2}, \qquad \tilde{b}_T = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{T\int_0^T r_t\,dt}{T\int_0^T r_t^2\,dt - \left(\int_0^T r_t\,dt\right)^2}. \tag{1.5}$$

У роботі [30] доведено строгу конзистентність цих оцінок. У межах даного дисертаційного дослідження цей підхід було розвинено: встановлено спільну асимптотичну нормальність оцінок (1.5), а також запропоновано та досліджено їх дискретні аналоги, для яких доведено строгу конзистентність і асимптотичну нормальність.

Задачі оцінювання параметрів зсуву моделі Кокса – Інгерсолла – Росса за різних схем дискретних спостережень розглядалися також у статтях [28, 50, 83], де було запропоновано різні методи. У роботі [102] досліджено дискретний аналог неперервної оцінки максимальної вірогідності (1.4) та встановлено умови слабкої і сильної конзистентності, асимптотичної нормальності й швидкості збіжності відповідних оцінок. Подібний підхід розглянуто також у [12], де неперервні оцінки максимальної вірогідності спочатку трансформуються за формулою Ітo, а потім дискретизуються. Обидва підходи потребують виконання додаткової умови $a > \sigma^2$, що виникає під час апроксимації інтеграла $\int_0^T \frac{1}{r_t}\,dt$ інтегральними сумами. Альтернативний метод, заснований на дискретизації самої моделі Кокса – Інгерсолла – Росса, запропоновано у статті [111], однак і в цьому випадку також необхідне припущення $a > \sigma^2$. Нещодавно оцінювання параметрів за умов високочастотних спостережень на основі квазівірогідності було розглянуто в роботі [19], де потрібна ще жорсткіша умова $2a > 5\sigma^2$.

Головною перевагою підходу, запропонованого в цій дисертації та заснованого на дискретизації оцінок (1.5), є те, що, на відміну від більшості відомих методів, він приводить до коректно визначених і конзистентних оцінок для будь-яких додатних значень параметрів a та b.

Окрім класичної постановки, у літературі існує кілька підходів до узагальнення процесу Кокса – Інгерсолла – Росса на випадок наявності довгострокової залежності, коли керуючим шумом є дробовий броунівський рух. Потраєкторний підхід до означення відповідного процесу вперше було розглянуто в [69] для випадку $a = 0$ та $H > 2/3$, а більш загальне потраєкторне означення процесу для $a > 0$ та $H \in (0, 1)$ запропоновано й досліджено в [77, 78]. Так званий

«шорсткий» (rough-path) підхід запропоновано в роботі [66]. Ще один підхід до означення дробового аналога процесу Кокса – Інгерсолла – Росса ґрунтується на заміні часу за допомогою оберненого стійкого субординатора та розглядається в [57, 58].

Огляд за розділом 4. Розділ 4 присвячено задачі оцінювання параметра зсуву процесу Орнштейна – Уленбека з довгостроковою залежністю, яка моделюється за допомогою темперованих версій дробового броунівського руху. Протягом останніх десятиліть дробовий броунівський рух (ДБР) залишається одним із базових процесів для моделювання явищ із пам'яттю, зокрема короткота довгострокової залежності. Первинно запропонований як модель турбулентності, ДБР згодом знайшов широке застосування в різних галузях, зокрема у фінансовій математиці (для моделювання волатильності та інших економічних показників), гідрології та фізиці (зокрема в задачах аномальної дифузії). Детальний виклад математичних основ і стохастичного аналізу ДБР та споріднених процесів наведено в монографії [80].

З метою розширення моделювальних можливостей ДБР та його кращої адаптації до прикладних задач запропоновано чимало узагальнень і споріднених процесів. Серед них: мультидробовий броунівський рух [84], змішаний дробовий броунівський рух [118], бідробовий броунівський рух [43], субдробовий броунівський рух [16], змішаний субдробовий броунівський рух [118], субзмішаний дробовий броунівський рух [34] та узагальнений дробовий броунівський рух [119]. Детальний огляд різних типів змішаних дробових гауссових процесів наведено в монографії [79].

Окремий напрям досліджень пов'язаний із темперованими версіями дробового броунівського руху. Зокрема, темперований дробовий броунівський рух (ТДБР) та темперований дробовий броунівський рух другого роду (ТДБРІІ) було запропоновано у статтях [67] та [103] відповідно. Обидва процеси будуються на основі представлення Мандельброта – ван Несса для ДБР, модифікованого шляхом введення експоненційного темперування.

Запровадження експоненційного темперування зумовлене, зокрема, прагненням подолати обмеження класичного ДБР, який демонструє довгострокову залежність для $H > 1/2$. У багатьох прикладних задачах стійкі кореляції на

всіх часових шкалах є надто жорстким припущенням: часто спостерігається сильна залежність на малих масштабах, однак істотно швидше спадання кореляцій на великих горизонтах. Темперовані версії ДБР забезпечують природний компроміс: експоненційний множник пригнічує далекі кореляції, зберігаючи водночас локальні властивості, притаманні ДБР. У зв'язку з цим у літературі інколи використовується термін *напівдовгострокова залежність*. Темперований дробовий броунівський рух другого роду додатково розширює клас моделей, задаючи альтернативні коваріаційні структури, корисні для узгодження моделей з емпіричними даними.

Окрім ТДБР і ТДБРІІ, запропоновано й інші споріднені процеси, зокрема темперований дробовий броунівський рух третього роду [65], узагальнений темперований дробовий броунівський рух [68], а також темперований мультидробовий броунівський рух, змішаний темперований дробовий броунівський рух та темперований дробовий броунівський рух з двома індексами [59].

Завдяки темперуванню ТДБР і ТДБРІІ мають низку властивостей, відмінних від класичного ДБР. Зокрема, вони визначені для всіх додатних значень індекса Хюрста H, тоді як для ДБР цей параметр належить інтервалу $(0, 1)$. Темперування змінює глобальні властивості процесу, зберігаючи при цьому локальну регулярність траєкторій. Зокрема, асимптотична поведінка дисперсії істотно змінюється: для ТДБР дисперсія збігається до скінченної границі при $t \to \infty$, тоді як для ТДБРІІ вона зростає лінійно за t; див. [9]. Прирости ТДБР і ТДБРІІ, відомі як темперовані дробові гауссові шуми, є стаціонарними, а їхні кореляції спадають значно швидше, ніж у класичному випадку, що є суттєвим для статистичного оцінювання.

Додатковою мотивацією для вивчення темперованих процесів є їх успішне використання в аналізі емпіричних даних. Наприклад, у [17] показано, що ТДБР краще описує турбулентний потік у річці Ред-Сідар, ніж ДБР; у [67] наведено аргументи на користь застосування темперованого дробового гауссового шуму для моделювання швидкості вітру. Такі застосування підкреслюють важливість задач оцінювання параметрів та перевірки статистичних гіпотез. Зокрема, у [17] запропоновано вейвлет-оцінки параметрів ТДБР і побудовано статистичний тест для вибору між ДБР та ТДБР.

У дисертаційній роботі розглянуто темперовані процеси Орнштейна – Уленбека,

керовані ТДБР або ТДБРІІ, та побудовано статистичні оцінки параметра зсуву для цих моделей.

Слід зазначити, що процес Орнштейна – Уленбека має тривалу історію вивчення (див. додаток у [20]), а як керуючий шум у відповідних моделях розглядалися різні випадкові процеси. Зокрема, у статті [20] досліджено модель, керовану ДБР, яка задає так званий дробовий процес Орнштейна – Уленбека. На сьогодні ця модель має численні застосування та добре вивчена з точки зору статистичного оцінювання; зокрема, задачі оцінювання параметра зсуву детально розглянуто в оглядовій статті [71] та монографії [53]. Оцінку максимальної вірогідності за неперервними спостереженнями вперше побудовано в [51] і надалі досліджено в [108, 109, 112]. Зазначена оцінка є технічно складною, оскільки містить стохастичні інтеграли з сингулярними ядрами, тому в літературі активно розробляються альтернативні підходи, більш зручні для практичних застосувань. Наприклад, оцінки мінімального контрасту розглянуто в [15]. В ергодичному випадку оцінки найменших квадратів та оцінки ергодичного типу запропоновано й досліджено в [44, 45], а дискретну оцінку ергодичного типу — у [46, 116].

Оцінку найменших квадратів параметра зсуву за неперервними спостереженнями, близьку до тієї, що розглядається в розділі 4 дисертації, для дробового процесу Орнштейна – Уленбека запропоновано в [10]. У цій роботі доведено строгу конзистентність відповідної оцінки у випадку $H > \frac{1}{2}$, а також встановлено її асимптотичний розподіл. Надалі цей підхід було узагальнено на процеси Орнштейна – Уленбека, керовані ширшими класами шумів, у роботах [6, 33, 75]. Дискретні аналоги оцінки найменших квадратів досліджувалися в [24, 35].

У дисертаційній роботі для доведення строгої конзистентності неперервної оцінки параметра зсуву в темперованих дробових моделях Орнштейна – Уленбека використано майже напевні оцінки швидкості зростання ТДБР і ТДБРІІ, отримані в [72]; ці результати узагальнюють відповідні оцінки для ДБР, вперше встановлені в [52]. Для оцінювання параметра зсуву за дискретними спостереженнями адаптовано підхід дискретизації оцінки найменших квадратів зі статті [24]. Для обґрунтування строгої конзистентності дискретизованої оцінки отримано майже напевні оцінки зверху для приростів ТДБР і ТДБРІІ, при доведенні яких використано методи роботи [6].

Проведений огляд літератури свідчить про значний розвиток теорії статистичного оцінювання параметрів афінних дифузійних моделей, зокрема для випадків неперервних спостережень та стандартного броунівського шуму. Водночас задачі оцінювання параметрів за дискретними даними, а також у моделях з довгостроковою залежністю, залишаються значно менш дослідженими і часто вимагають додаткових технічних припущень. Це зумовлює актуальність подальшого розвитку методів статистичного оцінювання, орієнтованих на більш реалістичні схеми спостережень і ширші класи керуючих процесів, що і становить основний предмет даної дисертаційної роботи.

Розділ 2

Оцінювання всіх параметрів моделі Васічека за дискретними спостереженнями

Матеріал даного розділу містить власні результати, опубліковані у статтях [89] (підрозділи 2.2 та 2.3), [94] (підрозділи 2.4 та 2.5).

2.1 Постановка задачі

Нехай процес $X = \{X_t, t \geq 0\}$ є розв'язком такого диференціального рівняння:

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \gamma dW_t, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

де $W = \{W_t, t \geq 0\}$ - це вінерівський процес. Припустимо, що параметри $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ і $\gamma > 0$ фіксовані, але невідомі.

Рівняння 2.1 було представлене у 1977 році О. Васічеком [113] для моделювання відсоткової ставки. Пізніше воно отримало назву модель Васічека.

Відомо, що рівняння (2.1) має єдиний розв'язок, який можна записати в явному вигляді наступним чином:

$$X_t = \frac{\alpha}{\beta} + e^{-\beta t}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \gamma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dW_s. \tag{2.2}$$

(див., наприклад, [76, рівняння (9.7)].)

Для фіксованого кроку $h > 0$ розглянемо спостереження

$$X_0, X_h, X_{2h}, \ldots, X_{nh}.$$

У даному розділі буде побудовано оцінки для всіх трьох невідомих параметрів α, β та γ, і доведено, що вони є строго конзистентними та асимптотично нормальними.

2.2 Збіжність статистик

Для оцінювання параметрів буде використано такі три статитики:

$$\xi_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_{kh}, \tag{2.3}$$

$$\eta_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_{kh}^2, \tag{2.4}$$

$$\zeta_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_{kh}X_{(k+1)h}. \tag{2.5}$$

Для зручності, використаємо два позначення:

$$Z_t = \gamma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dW_s,$$

$$Y_t = \gamma \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} dW_s.$$

Тоді (2.2) можна переписати у вигляді

$$X_t = \frac{\alpha}{\beta} + e^{-\beta t}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + Z_t, \tag{2.6}$$

$$Z_t = Y_t - e^{-\beta t} Y_0. \tag{2.7}$$

Процес $\{Y_t, t \geq 0\}$ є двостороннім процесом Орнштейна–Уленбека, обмеженим на невід'ємну напіввісь. Відомо, що він є стаціонарним та ергодичним (див., наприклад, [20]). З ергодичності випливає, що для будь-якої вимірної функції $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, такої що $\mathbb{E}|g(Y_0, Y_h)| < \infty$, виконується наступна збіжність:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(Y_{kh}, Y_{(k+1)h}\right) \to \mathbb{E}g(Y_0, Y_h) \tag{2.8}$$

м.н., $n \to \infty$.

Спершу доведемо кілька допоміжних лем.

Лема 2.1. *Наступні збіжності виконуються м.н. при* $n \to \infty$*:*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} \to 0,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh}^2 \to \frac{\gamma^2}{2\beta},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh}Y_{(k+1)h} \to \frac{\gamma^2}{2\beta}e^{-\beta h}.$$

Доведення. 1. Використаємо збіжність (2.8), де функція $g(x,y) = x$, тоді

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} \to \mathbb{E}Y_0 = \gamma\mathbb{E}\int_{-\infty}^{0} e^{\beta s}dW_s = 0,$$

м.н., $n \to \infty$.

2. Для збіжності (2.8) застосуємо функцію $g(x,y) = x^2$ та ізометрію Ito:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh}^2 \to \mathbb{E}Y_0^2 = \gamma^2\mathbb{E}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\beta s}dW_s\right)^2 = \gamma^2\int_{-\infty}^{0} e^{2\beta s}ds = \frac{\gamma^2}{2\beta}.$$

3. У (2.8) покладемо функцію $g(x,y) = xy$, а потім використаємо властивості інтеграла Ito:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh}Y_{(k+1)h} \to \mathbb{E}Y_0Y_h = \gamma^2\mathbb{E}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\beta s}dW_s \cdot \int_{-\infty}^{h} e^{\beta(s-h)}dW_s\right)$$

$$= \gamma^2 e^{-\beta h}\int_{-\infty}^{0} e^{2\beta s}ds = \frac{\gamma^2}{2\beta}e^{-\beta h}.\square$$

Тепер доведемо аналогічні збіжності для процесу Z.

Лема 2.2. *Наступні збіжності виконуються м.н. при* $n \to \infty$*:*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh} \to 0,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh}^2 \to \frac{\gamma^2}{2\beta},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh}Z_{(k+1)h} \to \frac{\gamma^2}{2\beta}e^{-\beta h}.$$

Доведення. 1. Застосуємо (2.7):

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} - \frac{1}{n}Y_0 \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh} \to 0,$$

м.н., $n \to \infty$.

Збіжність до нуля тут випливає з того, що за лемою 2.1 зменшуване прямує до нуля, а від'ємник – це сума нескінченно спадної геометричної прогресії $\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh}$, границя якої дорівнює фіксованому значенню $\frac{1}{1-e^{-\beta h}}$.

2. Спершу перепишемо суму квадратів, використавши (2.7):

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(Y_{kh} - e^{-\beta kh}Y_0\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh}^2 + \frac{1}{n}Y_0^2 \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\beta kh} - \frac{2}{n}Y_0 \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} e^{-\beta kh}.$$

За лемою 2.1 перша сума збігається до $\frac{\gamma^2}{2\beta}$. Аналогічно до ситуації у попередньому пункті, друга сума збігається до нуля, оскільки маємо суму нескінченно спадної прогресії: $\sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\beta kh} \to \frac{1}{1-e^{-2\beta h}}$ при $n \to \infty$. Третя сума також збігається до нуля. Тут застосуємо нерівність Коші–Буняковського:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} e^{-\beta kh} \le \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh}^2 \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\beta kh}}.$$

3. Для третьої збіжності, як і у попередніх двох випадках, до початкової суми застосуємо формулу (2.7):

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh}Z_{(k+1)h} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(Y_{kh} - e^{-\beta kh}Y_0\right) \times \left(Y_{(k+1)h} - e^{-\beta(k+1)h}Y_0\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh}Y_{(k+1)h} + \frac{1}{n}Y_0^2 \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\beta kh - \beta h} - \frac{1}{n}Y_0 \sum_{k=0}^{n-1} Y_{(k+1)h} e^{-\beta kh} - \frac{1}{n}Y_0 \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} e^{-\beta(k+1)h}.$$

Перша сума збігається м.н. до $\frac{\gamma^2}{2\beta}e^{-\beta h}$ за лемою 2.1. Аналогічно до доведень пункту, отримуємо, що решта сум збігається до нуля. □

Тепер з отриманих результатів можна встановити збіжності для статистик ξ_n, η_n та ζ_n, визначених у (2.3)–(2.5).

Лема 2.3. *Наступні збіжності виконуються м.н. при $n \to \infty$:*

$$\xi_n \to \frac{\alpha}{\beta}, \tag{2.9}$$

$$\eta_n \to \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{2\beta}, \tag{2.10}$$

$$\zeta_n \to \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{2\beta} e^{-\beta h}. \tag{2.11}$$

Доведення. Щоб довести збіжність (2.9), розглянемо означення ξ_n та виразимо процес X через процес Z, використовуючи рівність (2.6). Отримаємо

$$\begin{aligned}\xi_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_{kh} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha}{\beta} + e^{-\beta kh}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + Z_{kh}\right) \\ &= \frac{\alpha}{\beta} + \left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh}.\end{aligned}$$

За лемою 2.2, остання сума в цій рівності збігається до нуля м.н. Друга сума також збігається до нуля, це було доведено в попередній лемі (див. доведення у пункті 1.). Отже, $\xi_n \to \frac{\alpha}{\beta}$ м.н., $n \to \infty$.

Збіжності (2.10) та (2.11) доводяться аналогічно, спираючись на результати леми 2.2. □

2.3 Побудова оцінок

Лема 2.3 дає ідею для побудови оцінок для α, β, γ, які будуть строго конзистентними. Вона полягає у тому, що у збіжностях (2.9)–(2.11) знак "$\to$" заміняємо на "=", а значення α, β і γ заміняємо на оцінки $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$, і $\hat{\gamma}_n$, та розв'язуємо отриману систему трьох рівнянь відносно $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$, і $\hat{\gamma}_n$. Одержані розв'язки будуть строго конзистентними оцінками для невідомих параметрів.

Система рівнянь для оцінок має такий вигляд:

$$\begin{cases} \xi_n = \frac{\hat{\alpha}_n}{\hat{\beta}_n}, \\ \eta_n = \frac{\hat{\alpha}_n^2}{\hat{\beta}_n^2} + \frac{\hat{\gamma}_n^2}{2\hat{\beta}_n}, \\ \zeta_n = \frac{\hat{\alpha}_n^2}{\hat{\beta}_n^2} + \frac{\hat{\gamma}_n^2}{2\hat{\beta}_n} e^{-\hat{\beta}_n h}. \end{cases}$$

Вона може бути переписана наступним чином:

$$\begin{cases} \xi_n\hat{\beta}_n = \hat{\alpha}_n, \\ \eta_n - \xi_n^2 = \frac{\hat{\gamma}_n^2}{2\hat{\beta}_n}, \\ \zeta_n - \xi_n^2 = \frac{\hat{\gamma}_n^2}{2\hat{\beta}_n} e^{-\hat{\beta}_n h}. \end{cases}$$

Тепер, поділивши друге рівняння на третє, отримуємо вираз для знаходження $\hat{\beta}_n$. Після цього, підставивши $\hat{\beta}_n$ у перше та друге рівняння, одержимо вирази для $\hat{\alpha}_n$ та $\hat{\gamma}_n$ відповідно. У результаті, маємо такі оцінки:

$$\begin{gathered} \hat{\beta}_n = \frac{1}{h} \ln^+ \frac{\eta_n - \xi_n^2}{\zeta_n - \xi_n^2}, \\ \hat{\alpha}_n = \xi_n \hat{\beta}_n, \qquad \hat{\gamma}_n^2 = 2\hat{\beta}_n(\eta_n - \xi_n^2), \end{gathered} \tag{2.12}$$

де, щоб уникнути невизначеності, замість ln використано функцію $\ln^+$, яка задана таким чином:

$$\ln^+ x = \begin{cases} \ln x, & x > 1, \\ 0, & x \le 1. \end{cases}$$

Наступна теорема є першим основним результатом даного розділу.

Теорема 2.1. *Наступні збіжності виконуються м.н. при $n \to \infty$:*

$$\hat{\alpha}_n \to \alpha, \qquad \hat{\beta}_n \to \beta, \qquad \hat{\gamma}_n \to \gamma,$$

тобто $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$, $\hat{\gamma}_n$ є строго конзистентними оцінками параметрів α, β, γ відповідно.

Доведення. Доведення випливає з результатів (2.12) та збіжностей, доведених у лемі 2.3. □

2.4 Асимптотична нормальність оцінок

Спершу розглянемо асимптотичну поведінку дисперсій та коваріацій статистик ξ_n, η_n, ζ_n.

Лема 2.4. *Наступні збіжності виконуються при $n \to \infty$:*

$$\begin{aligned} n \operatorname{Var} \xi_n &\to \frac{\gamma^2}{2\beta} \cdot \frac{1 + e^{-\beta h}}{1 - e^{-\beta h}}, \\ n \operatorname{Var} \eta_n &\to \frac{2\alpha^2\gamma^2}{\beta^3} \cdot \frac{1 + e^{-\beta h}}{1 - e^{-\beta h}} + \frac{\gamma^4}{2\beta^2} \cdot \frac{1 + e^{-2\beta h}}{1 - e^{-2\beta h}}, \\ n \operatorname{Var} \zeta_n &\to \frac{2\alpha^2\gamma^2}{\beta^3} \cdot \frac{1 + e^{-\beta h}}{1 - e^{-\beta h}} + \frac{\gamma^4}{4\beta^2} \cdot \frac{1 + 4e^{-2\beta h} - e^{-4\beta h}}{1 - e^{-2\beta h}}, \\ n \operatorname{Cov}(\xi_n, \eta_n) &\to \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2} \cdot \frac{1 + e^{-\beta h}}{1 - e^{-\beta h}}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$n\operatorname{Cov}(\xi_n,\zeta_n)\to\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2}\cdot\frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}},\qquad(2.14)$$
$$n\operatorname{Cov}(\eta_n,\zeta_n)\to\frac{2\alpha^2\gamma^2}{\beta^3}\cdot\frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}}+\frac{\gamma^4}{\beta^2}\cdot\frac{e^{-\beta h}}{1-e^{-2\beta h}}.$$

Доведення. З властивостей інтеграла Ito маємо, що $\mathbb{E}Z_{kh}=0$ і

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{kh}Z_{jh}]&=\mathbb{E}\left(\gamma\int_0^{kh}e^{-\beta(kh-s)}dW_s\cdot\gamma\int_0^{jh}e^{-\beta(jh-s)}dW_s\right)\\&=\gamma^2\int_0^{kh}e^{-\beta((k+j)h-2s)}ds=\frac{\gamma^2}{2\beta}\left(e^{-\beta(j-k)h}-e^{-\beta(k+j)h}\right)\end{aligned}\qquad(2.15)$$

для всіх $k\le j$. До того ж, теорема Іссерліса [48] (див. також [114]) дає нам наступні результати, які виконуються для будь-яких цілих k, j, l, m:

$$\mathbb{E}[Z_{kh}Z_{jh}Z_{lh}]=0,\qquad(2.16)$$
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{kh}Z_{jh}Z_{lh}Z_{mh}]&=\mathbb{E}[Z_{kh}Z_{jh}]\mathbb{E}[Z_{lh}Z_{mh}]+\mathbb{E}[Z_{kh}Z_{lh}]\mathbb{E}[Z_{jh}Z_{mh}]\\&\quad+\mathbb{E}[Z_{kh}Z_{mh}]\mathbb{E}[Z_{jh}Z_{lh}].\end{aligned}\qquad(2.17)$$

Розглянемо детально знаходження границь для $n\operatorname{Var}\xi_n$ і $n\operatorname{Cov}(\xi_n,\zeta_n)$. Решта збіжностей виводиться аналогічно.

1. Спершу проаналізуємо $n\operatorname{Var}\xi_n$. Почнемо з перетворень для $n\operatorname{Var}\xi_n$, використавши 2.3.

$$n\operatorname{Var}\xi_n=n\operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_{kh}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Var}(X_{kh})+\frac{2}{n}\sum_{0\le k<j\le n-1}\operatorname{Cov}(X_{kh},X_{jh}).\qquad(2.18)$$

Записавши процес X у вигляді (2.6) та використавши формулу (2.15), можна переписати першу суму в правій частині рівності (2.18) у такому вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Var}(X_{kh})&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathbb{E}X_{kh}^2-(\mathbb{E}X_{kh})^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}Z_{kh}^2\\&=\frac{1}{n}\cdot\frac{\gamma^2}{2\beta}\sum_{k=0}^{n-1}(1-e^{-2\beta kh})=\frac{\gamma^2}{2\beta}-\frac{1}{n}\cdot\frac{\gamma^2}{2\beta}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-2\beta kh}.\end{aligned}$$

Зауважимо, що сума $\sum_{k=0}^{n-1}e^{-2\beta kh}$ є сумою нескінченно спадної прогресії, тому вона має скінченну границю $(1-e^{-2\beta h})^{-1}$ при $n\to\infty$. Звідси маємо

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Var}(X_{kh})\to\frac{\gamma^2}{2\beta}\quad\text{при } n\to\infty.\qquad(2.19)$$

Аналогічно знаходимо границю для другого доданку у правій частині рівності (2.18). Використавши (2.6) і (2.15), отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{0\le k<j\le n-1}\operatorname{Cov}(X_{kh},X_{jh}) &= \frac{1}{n}\sum_{0\le k<j\le n-1}\bigl(\mathbb{E}(X_{kh}X_{jh})-\mathbb{E}(X_{kh})\mathbb{E}(X_{jh})\bigr) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{0\le k<j\le n-1}\mathbb{E}[Z_{kh}Z_{jh}] = \frac{1}{n}\cdot\frac{\gamma^2}{2\beta}\sum_{0\le k<j\le n-1}\left(e^{-\beta(j-k)h}-e^{-\beta(k+j)h}\right) \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{\gamma^2}{2\beta}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{j-1}e^{-\beta(j-k)h}-\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{j-1}e^{-\beta(j+k)h}\right).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Після обчислення сум геометричних прогресій, маємо результат

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{0\le k<j\le n-1}\operatorname{Cov}(X_{kh},X_{jh}) \\ &\quad= \frac{1}{n}\cdot\frac{\gamma^2}{2\beta}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{e^{-\beta h}(1-e^{-j\beta h})}{1-e^{-\beta h}}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{e^{-j\beta h}(1-e^{-j\beta h})}{1-e^{-\beta h}}\right) \\ &\quad= \frac{1}{n}\cdot\frac{\gamma^2}{2\beta}\left(\frac{e^{-\beta h}(n-1)}{1-e^{-\beta h}}-\frac{e^{-2\beta h}(1-e^{-(n-1)\beta h})}{(1-e^{-\beta h})^2}\right) \\ &\qquad-\frac{1}{n}\cdot\frac{\gamma^2}{2\beta}\cdot\frac{1}{1-e^{-\beta h}}\left(\frac{e^{-\beta h}(1-e^{-(n-1)\beta h})}{1-e^{-\beta h}}-\frac{e^{-2\beta h}(1-e^{-2(n-1)\beta h})}{1-e^{-2\beta h}}\right).\end{aligned} \tag{2.21}$$

При $n\to\infty$ одержимо:

$$\frac{1}{n}\sum_{0\le k<j\le n-1}\operatorname{Cov}(X_{kh},X_{jh})\to\frac{\gamma^2}{2\beta}\cdot\frac{e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}}\quad\text{при } n\to\infty. \tag{2.22}$$

Поєднавши (2.18), (2.19), і (2.22), встановимо збіжність:

$$n\operatorname{Var}\xi_n\to\frac{\gamma^2}{2\beta}\cdot\frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}}\quad\text{при } n\to\infty.$$

Отже, (2.13) доведено.

Далі розглянемо асимптотичну поведінку $n\operatorname{Cov}(\xi_n,\zeta_n)$. Очевидно, що

$$\begin{aligned}n\operatorname{Cov}(\xi_n,\zeta_n) &= n\operatorname{Cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_{kh},\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_{kh}X_{(k+1)h}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\operatorname{Cov}(X_{kh},X_{jh}X_{(j+1)h}).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Тепер зробимо перетворення $\mathrm{Cov}(X_{kh}, X_{jh}X_{(j+1)h})$ аналогічно до $\mathrm{Var}(X_{kh})$. Спершу, використовуючи (2.6) і (2.16), отримаємо

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_{kh}, X_{jh}X_{(j+1)h}) &= \mathbb{E}(X_{kh}X_{jh}X_{(j+1)h}) - \mathbb{E}X_{kh}\cdot\mathbb{E}\left(X_{jh}X_{(j+1)h}\right)\\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta} + e^{-\beta jh}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\right)\mathbb{E}[Z_{kh}Z_{(j+1)h}] + \left(\frac{\alpha}{\beta} + e^{-\beta(j+1)h}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\right)\mathbb{E}[Z_{kh}Z_{jh}].\end{aligned}$$

Далі продовжимо, розбивши суму коваріацій в (2.23) на три частини: $k < j$, $k = j$ та $k > j$. Використавши (2.15) і формулу суми n членів геометричної прогресії, одержимо границі для кожної частини:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n-1}\mathrm{Cov}(X_{kh}, X_{jh}X_{(j+1)h}) \to \frac{\alpha\gamma^2}{2\beta^2}\cdot\frac{e^{-\beta h}(1+e^{-\beta h})}{1-e^{-\beta h}},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Cov}(X_{kh}, X_{kh}X_{(k+1)h}) \to \frac{\alpha\gamma^2}{2\beta^2}\cdot(1+e^{-\beta h}),$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}\mathrm{Cov}(X_{kh}, X_{jh}X_{(j+1)h}) \to \frac{\alpha\gamma^2}{2\beta^2}\cdot\frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}}$$

при $n \to \infty$. Поєднавши ці збіжності, отримаємо наступну границю:

$$n\,\mathrm{Cov}(\xi_n, \zeta_n) \to \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2}\cdot\frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}} \quad \text{при } n \to \infty.$$

Отже, результат (2.14) доведено.

Інші збіжності з даної леми можна довести аналогічно: використовуючи білінійність коварійції, виражаючи X через Z за допомогою (2.6), обчислюючи математичні сподівання за формулами (2.15)–(2.17), знаходячи суми геометричних прогресій та їх границі. □

Тепер сформулюємо та доведемо асимптотичну нормальність (ξ_n, η_n, ζ_n). Доведення буде базуватись на центральній граничній теоремі для стаціонарних гауссових векторів.

Теорема 2.2. *Наступні збіжності за розподілом виконуються при $n \to \infty$:*

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\xi_n - \mathbb{E}\xi_n\\ \eta_n - \mathbb{E}\eta_n\\ \zeta_n - \mathbb{E}\zeta_n\end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma),$$

де асимптотична коваріаційна матриця дорівнює

$$\Sigma = \frac{\gamma^2}{2\beta} \cdot \frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\alpha}{\beta} & \frac{2\alpha}{\beta} \\ \frac{2\alpha}{\beta} & \frac{4\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{\beta} \cdot \frac{1+e^{-2\beta h}}{(1+e^{-\beta h})^2} & \frac{4\alpha^2}{\beta^2} + \frac{2\gamma^2}{\beta} \cdot \frac{e^{-\beta h}}{(1+e^{-\beta h})^2} \\ \frac{2\alpha}{\beta} & \frac{4\alpha^2}{\beta^2} + \frac{2\gamma^2}{\beta} \cdot \frac{e^{-\beta h}}{(1+e^{-\beta h})^2} & \frac{4\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{2\beta} \cdot \frac{1+4e^{-2\beta h}-e^{-4\beta h}}{(1+e^{-\beta h})^2} \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Доведення. Елементи для коваріаційної матриці були обчислені в лемі 2.4. Залишається довести збіжність до гауссового вектора. Відповідно до теореми Крамера–Вольда (див. теорему Б.3 у додатку Б), достатньо довести, що для будь-яких значень a, b, c ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) випадкова величина

$$F_n = a\sqrt{n}(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n) + b\sqrt{n}(\eta_n - \mathbb{E}\eta_n) + c\sqrt{n}(\zeta_n - \mathbb{E}\zeta_n) \tag{2.25}$$

збігається до нормального розподілу з нульовим середнім при $n \to \infty$.

Підставивши (2.7) у (2.6), отримаємо рівняння:

$$X_t = \frac{\alpha}{\beta} + e^{-\beta t}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + Y_t - e^{-\beta t}Y_0, \quad t \geq 0. \tag{2.26}$$

Нагадаємо, що у лемі 2.1 у пунктах 1. та 3. відповідно було доведено:

$$\mathbb{E}Y_0 = 0, \quad \mathbb{E}[Y_0 Y_{kh}] = \frac{\gamma^2}{2\beta} e^{-\beta k h}. \tag{2.27}$$

Використавши (2.26) та властивості (2.27), одержимо:

$$\begin{aligned} \xi_n - \mathbb{E}\xi_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(X_{kh} - \mathbb{E}X_{kh}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(Y_{kh} - e^{-\beta k h}Y_0 - \mathbb{E}(Y_{kh} - e^{-\beta k h}Y_0)\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(Y_{kh} - \mathbb{E}Y_{kh}) - \frac{1}{n}Y_0\frac{1-e^{-\beta n h}}{1-e^{-\beta h}}. \end{aligned}$$

Тут зменшуване є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії $Y_0 \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta k h}$.

Для аналізу $\eta_n - \mathbb{E}\eta_n$ користуємось тими ж міркуваннями. Проте, у цьому випадку маємо справу з

$$\begin{aligned} X_{kh}^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} &+ e^{-2\beta k h}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + Y_{kh}^2 + e^{-2\beta k h}Y_0^2 \\ &+ 2\frac{\alpha}{\beta}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)e^{-\beta k h} + 2\frac{\alpha}{\beta}Y_{kh} - 2\frac{\alpha}{\beta}e^{-\beta k h}Y_0 \end{aligned}$$

$$+ 2\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right) e^{-\beta kh} Y_{kh} - 2\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right) e^{-2\beta kh} Y_0 - 2Y_0 e^{-\beta kh} Y_{kh}.$$

Тому

$$\begin{aligned}
\eta_n - \mathbb{E}\eta_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(X_{kh}^2 - \mathbb{E}(X_{kh}^2)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(Y_{kh}^2 + \frac{2\alpha}{\beta}Y_{kh}\right) - \mathbb{E}\left(Y_{kh}^2 + \frac{2\alpha}{\beta}Y_{kh}\right)\right) \\
&\quad + 2\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh} Y_{kh} - \frac{1}{n}\mathbb{E}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh} Y_{kh}\right) \\
&\quad - \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh}\left(Y_0 Y_{kh} - \frac{\gamma^2}{2\beta}e^{-\beta kh}\right) + \frac{1}{n}\left(Y_0^2 - \frac{\gamma^2}{2\beta}\right)\frac{1 - e^{-2\beta nh}}{1 - e^{-2\beta h}} \\
&\quad - \frac{1}{n}\cdot\frac{2\alpha}{\beta}\cdot Y_0\frac{1 - e^{-\beta nh}}{1 - e^{-\beta h}} - \frac{2}{n}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot Y_0\frac{1 - e^{-2\beta nh}}{1 - e^{-2\beta h}}.
\end{aligned}$$

Аналогічно проводимо перетворення виразу $\zeta_n - \mathbb{E}\zeta_n$. У результаті отримуємо, що випадкова величина F_n з (2.25) має такий вигляд:

$$F_n = F_n^{(1)} + F_n^{(2)} + F_n^{(3)}, \tag{2.28}$$

де

$$F_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(g(Y_{kh}, Y_{(k+1)h}) - \mathbb{E}g(Y_{kh}, Y_{(k+1)h})\right)$$

з

$$g(Y_{kh}, Y_{(k+1)h}) = bY_{kh}^2 + cY_{kh}Y_{(k+1)h} + \left(a + \frac{\alpha}{\beta}(2b + c)\right)Y_{kh} + \frac{\alpha}{\beta}\cdot c\cdot Y_{(k+1)h},$$

$$\begin{aligned}
F_n^{(2)} &= \frac{2}{\sqrt{n}}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta} - Y_0\right) b\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh} Y_{kh} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta} - Y_0\right) c\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-\beta kh} Y_{(k+1)h} + e^{-\beta(k+1)h} Y_{kh}),
\end{aligned} \tag{2.29}$$

і

$$\begin{aligned}
F_n^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left(b + ce^{-\beta h}\right)Y_0^2 - 2\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)bY_0 - b\frac{\gamma^2}{2\beta}\right)\frac{1 - e^{-2\beta nh}}{1 - e^{-2\beta h}} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(2b + c + ce^{-\beta h} + a\right)\frac{\alpha}{\beta}Y_0\frac{1 - e^{-\beta nh}}{1 - e^{-\beta h}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)ce^{-\beta h}Y_0\frac{1 - e^{-2\beta nh}}{1 - e^{-\beta h}}.
\end{aligned}$$

Потрібно довести, що при $n \to \infty$ $F_n^{(1)}$ збігається за розподілом до гауссової випадкової величини, $F_n^{(2)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ і $F_n^{(3)} \to 0$.

Розглянемо $F_n^{(1)}$. Як було вище зазначено, $\{Y_{kh}, k \geq 0\}$ стаціонарна гауссова послідовність з $\mathbb{E}g^2(Y_0) < \infty$. Дослідимо наступні коваріації:

$$r^{(1,1)}(k) = \mathbb{E}[Y_0 Y_{kh}] = \frac{\gamma^2}{2\beta} e^{-\beta|k|h}, \qquad r^{(1,2)}(k) = \mathbb{E}[Y_0 Y_{(k+1)h}] = \frac{\gamma^2}{2\beta} e^{-\beta|k+1|h},$$
$$r^{(2,1)}(k) = \mathbb{E}[Y_h Y_{kh}] = \frac{\gamma^2}{2\beta} e^{-\beta|k-1|h}, \quad r^{(2,2)}(k) = \mathbb{E}[Y_h Y_{(k+1)h}] = \frac{\gamma^2}{2\beta} e^{-\beta|k|h} = r^{(1,1)}(k).$$

Маємо перевірити умови центральної граничної теореми для стаціонарних векторів (див. теорему Б.2 у додатку Б). Для цього потрібно довести, що границі

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j,k=0}^{n-1} r^{(p,q)}(j-k) \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j,k=0}^{n-1} \left(r^{(p,q)}(j-k) \right)^2 \tag{2.30}$$

існують для всіх $p, q \in \{1, 2\}$. Для $p = q = 1$, перша границя в (2.30) може бути обчислена таким чином:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j,k=0}^{n-1} r^{(1,1)}(j-k) &= \frac{\gamma^2}{2\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j,k=0}^{n-1} e^{-\beta|j-k|h} \\
&= \frac{\gamma^2}{2\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(2 \sum_{0\leq k<j\leq n-1} e^{-\beta(j-k)h} + n \right) \\
&= \frac{\gamma^2}{\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0\leq k<j\leq n-1} e^{-\beta(j-k)h} + \frac{\gamma^2}{2\beta}.
\end{aligned}$$

Суму $\sum_{0\leq k<j\leq n-1} e^{-\beta(j-k)h}$ можна знайти аналогічно до обчислень, що були проведені для $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Cov}(X_{kh}, X_{jh})$ у лемі 2.4 (див. (2.20)–(2.21)). Отримаємо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j,k=0}^{n-1} r^{(1,1)}(j-k) &= \frac{\gamma^2}{\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{e^{-\beta h}(n-1)}{1-e^{-\beta h}} - \frac{e^{-2\beta h}(1-e^{-(n-1)\beta h})}{(1-e^{-\beta h})^2} \right] + \frac{\gamma^2}{2\beta} \\
&= \frac{\gamma^2}{2\beta} \cdot \frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}} < \infty.
\end{aligned}$$

Аналогічно можна довести, що інші границі в (2.30) скінченні. Зрештою, маємо, що всі умови центральної граничної теореми для стаціонарних векторів (див. теорему Б.2 у додатку Б) виконуються. Тому

$$F_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(g(Y_{kh}, Y_{(k+1)h}) - \mathbb{E}g(Y_{kh}, Y_{(k+1)h}) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

з деяким $\sigma^2 > 0$.

Доведемо, що $F_n^{(2)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ при $n \to \infty$. Для цього достатньо довести, що кожна сума у правій частині (2.29) збігається до нуля в $L^1(\Omega)$. З стаціонарності процесу Y_{kh}, маємо, що сума $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh} Y_{kh}$ може бути обмежена таким чином:

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh} Y_{kh}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh} \mathbb{E}|Y_{kh}| = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh}\right) \mathbb{E}|Y_0|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1 - e^{-\beta nh}}{1 - e^{-\beta h}} \mathbb{E}|Y_0| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Аналогічно доводимо, що суми $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta(k+1)h} Y_{kh}$ і $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh} Y_{(k+1)h}$ збігаються до нуля в $L^1(\Omega)$ при $n \to \infty$. Звідси, $F_n^{(2)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ при $n \to \infty$.

Доданок $F_n^{(3)}$ містить такі суми нескінченно спадних прогресій:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1 - e^{-2\beta nh}}{1 - e^{-2\beta h}} \quad \text{і} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1 - e^{-\beta nh}}{1 - e^{-\beta h}}.$$

Вони збігаються до нуля при $n \to \infty$. Отже, $F_n^{(3)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Щоб завершити доведення даної теореми, застосуємо теорему Слуцького (див. теорему Б.4 у додатку Б) і отримаємо збіжність (2.25) до нормального розподілу $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. □

Другий основний результат даного розділу сформульовано і доведено в наступній теоремі.

Теорема 2.3. *Оцінки $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$, $\hat{\gamma}_n$ є асимптотично нормальними, тобто*

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_n - \alpha \\ \hat{\beta}_n - \beta \\ \hat{\gamma}_n - \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Gamma), \quad n \to \infty,$$

де елементи коваріаційної матриці $\Gamma = (\Gamma_{ij})_{i,j=1,2,3}$ мають такий вигляд:

$$\Gamma_{11} = \frac{\alpha^2}{h^2\beta^2}\left(e^{2\beta h} - 1\right) + \frac{\beta\gamma^2}{2} \frac{1 + e^{-\beta h}}{1 - e^{-\beta h}}, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \frac{\alpha}{h^2\beta}\left(e^{2\beta h} - 1\right),$$
$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = \frac{\alpha\gamma}{2h^2\beta^2}\left(e^{2\beta h} - 1\right) - \frac{\alpha\gamma}{h\beta}, \qquad \Gamma_{22} = \frac{1}{h^2}\left(e^{2\beta h} - 1\right),$$
$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = \frac{\gamma}{2h^2\beta}(e^{2\beta h} - 1) - \frac{\gamma}{h}, \qquad \Gamma_{33} = \frac{\gamma^2}{4h^2\beta^2}\left(e^{2\beta h} - 1\right) - \frac{\gamma^2}{h\beta} + \frac{\gamma^2}{2} \frac{e^{2\beta h} + 1}{e^{2\beta h} - 1}.$$

Доведення. Доведення даної теореми отримаємо з теореми 2.2, застосувавши дельта-метод (див. теорему Б.1 у додатку Б).

Розглянемо вектор (ξ_n, η_n, ζ_n). У лемі 2.3 доведено, що

$$(\xi_n, \eta_n, \zeta_n) \to \boldsymbol{\theta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{2\beta}, \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{2\beta} e^{-\beta h}\right) \text{ м.н. при } n \to \infty.$$

Зауважимо, що

$$(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n, \hat{\gamma}_n) = g(\xi_n, \eta_n, \zeta_n),$$

де функція $g(x, y, z)$ визначена так:

$$g(x, y, z) = \frac{1}{h}\left(x \ln^+ \frac{y - x^2}{z - x^2}, \ln^+ \frac{y - x^2}{z - x^2}, \sqrt{2(y - x^2) \ln^+ \frac{y - x^2}{z - x^2}}\right).$$

Матриця Якобі даної вектор-функції має такий вигляд:

$$g'(x, y, z) = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} \ln^+ \frac{y-x^2}{z-x^2} + \frac{2x^2(y-z)}{(y-x^2)(z-x^2)} & \frac{x}{y-x^2} & -\frac{x}{z-x^2} \\ \frac{2x(y-z)}{(y-x^2)(z-x^2)} & \frac{1}{y-x^2} & -\frac{1}{z-x^2} \\ \frac{2x(\frac{y-z}{z-x^2} - \ln^+ \frac{y-x^2}{z-x^2})}{\sqrt{2(y-x^2)\ln^+ \frac{y-x^2}{z-x^2}}} & \frac{\ln^+ \frac{y-x^2}{z-x^2} + 1}{\sqrt{2(y-x^2)\ln^+ \frac{y-x^2}{z-x^2}}} & \frac{x^2 - y}{(z-x^2)\sqrt{2(y-x^2)\ln^+ \frac{y-x^2}{z-x^2}}} \end{pmatrix}.$$

Підставивши значення $\boldsymbol{\theta}$ в отриманий результат, отримаємо:

$$g'(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \beta + \frac{1}{h} \cdot \frac{4\alpha^2}{\beta\gamma^2} \cdot (e^{\beta h} - 1) & \frac{1}{h} \cdot \frac{2\alpha}{\gamma^2} & -\frac{1}{h} \cdot \frac{2\alpha}{\gamma^2} \cdot e^{\beta h} \\ \frac{1}{h} \cdot \frac{4\alpha}{\gamma^2} \cdot (e^{\beta h} - 1) & \frac{1}{h} \cdot \frac{2\beta}{\gamma^2} & -\frac{1}{h} \cdot \frac{2\beta}{\gamma^2} \cdot e^{\beta h} \\ -\frac{2\alpha}{\gamma} + \frac{2}{h} \cdot \frac{\alpha}{\beta\gamma} \cdot (e^{\beta h} - 1) & \frac{1}{h\gamma}(\beta h + 1) & -\frac{1}{h\gamma} \cdot e^{\beta h} \end{pmatrix}.$$

На останньому етапі виконаємо множення матриць:

$$\Gamma = g'(\boldsymbol{\theta}) \Sigma (g'(\boldsymbol{\theta}))^\top,$$

де Σ визначена у теоремі 2.2. Завершує доведення застосування дельта-методу.

□

Зауваження 2.1. Отримані результати для Γ_{11}, Γ_{22} та Γ_{33} показують, що на стандартні відхилення для оцінок $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$ та $\hat{\gamma}_n$ значення параметрів α, β та γ матимуть різний вплив.

2.5 Моделювання

Щоб продемонструвати якість отриманих оцінок, було згенеровано дані, використовуючи мову програмування R. Зафіксовано початкове значення $x_0 = 1$ та для кожного набору параметрів згенеровано 1000 траєкторій для процесу X, який є розв'язком стохастичного диференціального рівняння 2.1, використовуючи наближення Ейлера–Маруями. Для цього було використано функцію snssde1d з пакету 'Sim.DiffProc'. Для кожної траєкторії згенеровано 2 000 000 точок з кроком 0.001. З метою імітації дискретного процесу до основної траєкторії, значення якої аналізувались в подальшому, відбиралась кожна тисячна точка та кожна сота точка,так отримували кроки 1 та 0.1 відповідно.

Для дослідження впливу α, β і γ на поведінку оцінок, було розглянуто десять різних наборів значень параметрів. Для кожного набору було обчислено оцінки для кроків $h = 1$ і $h = 0.1$. Було розглянуто вибірки об'ємом для 100, 500, 1000, 1500 і 2000. Для кожного набору з 1000 отриманих оцінок було обчислено середнє значення та стандартне відхилення оцінок.

Результати для випадку $h = 1$ показані у таблицях 2.1–2.2, а для $h = 0.1$ – у таблицях 2.3–2.4. У таблицях 2.1, 2.3 подано різниці між середніми значеннями оцінок та істинними значеннями параметрів, де середні значення для $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$, $\hat{\gamma}_n$ позначено $\mu(\hat{\alpha}_n)$, $\mu(\hat{\beta}_n)$, $\mu(\hat{\gamma}_n)$ відповідно. Стандартні відхилення для $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$, $\hat{\gamma}_n$ позначено $SD(\hat{\alpha}_n)$, $SD(\hat{\beta}_n)$, $SD(\hat{\gamma}_n)$ відповідно. У таблицях 2.2, 2.4 порівняно значення $SD(\hat{\alpha}_n)$, $SD(\hat{\beta}_n)$, $SD(\hat{\gamma}_n)$ помножені на $\sqrt{n}$ з теоретичними стандартними відхиленнями, обчисленими за формулами з теореми 2.3.

Згенеровані дані підтверджують отримані теоретичні результати. Коли n зростає, спостерігається збіжність середніх значень оцінок до реального значення параметрів, а також стандартні відхилення оцінок дуже близькі до відповідних теоретичних значень.

Залежність поведінки від значень параметрів α, β і γ стандартних відхилень оцінок $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$ і $\hat{\gamma}_n$, яка спостерігається у згенерованих даних, цілком відповідає поведінці функцій $\sqrt{\Gamma_{11}}$, $\sqrt{\Gamma_{22}}$, $\sqrt{\Gamma_{33}}$ при значеннях α, β, γ і h, що були розглянуті.

Більшість зафіксованих залежностей є однаковими для обох кроків $h = 1$ та $h = 0.1$. Збільшення значень γ призводить до збільшення стандартних відхилень для $\hat{\alpha}_n$ і $\hat{\gamma}_n$. Більше того, стандартні відхилення $\hat{\gamma}_n$ пропорційні до γ, і у випадку $\alpha = 0$ стандартні відхилення $\hat{\alpha}_n$ також пропорційні до γ. У той же час, зміни у

Табл. 2.1. Різниці середніх оцінок та істинних значень параметрів для $h = 1$

	$\alpha = 2$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = -2$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = 1$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$	$\alpha = -1$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$
					$\mu(\hat{\alpha}_n) - \alpha$					
$n = 100$	−0.0345	0.4023	0.0195	0.1247	0.0422	0.0206	0.1229	−0.0436	−0.0133	0.0768
$n = 500$	0.0105	0.0837	0.0040	0.0293	0.0019	0.0047	0.0299	−0.0143	0.0705	−0.0235
$n = 1000$	0.0053	0.0396	0.0014	0.0144	−0.0007	0.0012	0.0143	−0.0092	0.0355	−0.0159
$n = 1500$	0.0049	0.0257	0.0009	0.0102	−0.0010	0.0008	0.0101	−0.0067	0.0235	−0.0111
$n = 2000$	0.0045	0.0177	0.0007	0.0082	−0.0015	0.0006	0.0081	−0.0057	0.0181	−0.0092
					$\mu(\hat{\beta}_n) - \beta$					
$n = 100$	−0.0095	−0.1806	0.1147	0.1233	−0.0086	0.1176	0.1204	0.0814	−0.0582	−0.0788
$n = 500$	0.0065	−0.0369	0.0280	0.0286	0.0052	0.0282	0.0284	0.0222	0.1340	0.0631
$n = 1000$	0.0035	−0.0176	0.0147	0.0146	0.0037	0.0147	0.0147	0.0120	0.0697	0.0377
$n = 1500$	0.0031	−0.0114	0.0103	0.0104	0.0030	0.0104	0.0104	0.0085	0.0466	0.0258
$n = 2000$	0.0027	−0.0077	0.0084	0.0083	0.0030	0.0084	0.0083	0.0070	0.0359	0.0210
					$\mu(\hat{\gamma}_n) - \gamma$					
$n = 100$	−0.0263	−0.0310	0.0333	0.0231	0.0105	0.0501	0.0452	0.0367	−0.1054	−0.0367
$n = 500$	−0.0002	−0.0038	0.0105	0.0084	0.0062	0.0176	0.0166	0.0153	0.0260	0.0182
$n = 1000$	0.0002	−0.0012	0.0058	0.0046	0.0038	0.0098	0.0092	0.0089	0.0153	0.0116
$n = 1500$	0.0003	−0.0008	0.0039	0.0031	0.0026	0.0067	0.0063	0.0060	0.0101	0.0077
$n = 2000$	0.0008	0.0002	0.0036	0.0030	0.0027	0.0064	0.0061	0.0060	0.0084	0.0067

Табл. 2.2. Стандартні відхилення $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$ і $\hat{\gamma}_n$ помножені на $\sqrt{n}$ для $h = 1$

	$\alpha = 2$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = -2$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$	$\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = -1$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$	$\alpha = 1$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$	$\alpha = -1$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$
					$\sqrt{n} \cdot SD(\hat{\alpha}_n)$					
$n = 100$	5.8228	3.9277	1.1667	3.9555	2.6991	2.3449	4.1574	3.8003	5.8683	4.5669
$n = 500$	5.1407	4.8430	1.0720	2.7714	2.7431	2.1449	3.2956	3.4091	5.1944	4.5515
$n = 1000$	5.1082	4.9850	1.0811	2.7262	2.7520	2.1625	3.2682	3.3933	4.2009	4.1434
$n = 1500$	5.1460	5.1018	1.1016	2.7397	2.7936	2.2036	3.2960	3.4413	4.0926	4.1230
$n = 2000$	5.1505	5.1112	1.0676	2.7345	2.7697	2.1354	3.2709	3.3722	3.9800	4.0037
теоретичне	5.1612	5.1612	1.0402	2.7333	2.7333	2.0804	3.2737	3.2737	3.8357	3.8357
					$\sqrt{n} \cdot SD(\hat{\beta}_n)$					
$n = 100$	2.9290	1.9775	3.2694	3.7750	2.5836	3.3643	3.5231	3.0861	11.0787	9.2134
$n = 500$	2.5437	2.3569	2.5905	2.6054	2.5019	2.5999	2.6043	2.5762	9.9961	8.8115
$n = 1000$	2.5228	2.4201	2.5418	2.5507	2.4968	2.5454	2.5484	2.5332	8.1480	7.8215
$n = 1500$	2.5449	2.4758	2.5590	2.5644	2.5288	2.5605	2.5623	2.5525	7.9498	7.7625
$n = 2000$	2.5410	2.4889	2.5518	2.5558	2.5291	2.5527	2.5539	2.5467	7.6932	7.5753
теоретичне	2.5277	2.5277	2.5277	2.5277	2.5277	2.5277	2.5277	2.5277	7.3211	7.3211
					$\sqrt{n} \cdot SD(\hat{\gamma}_n)$					
$n = 100$	1.2962	1.1134	1.2762	1.3656	1.1791	2.5811	2.6371	2.4997	3.9961	3.0867
$n = 500$	1.1265	1.1071	1.1246	1.1279	1.1170	2.2527	2.2538	2.2493	2.4841	2.2506
$n = 1000$	1.1103	1.0969	1.1076	1.1100	1.1030	2.2162	2.2176	2.2137	1.9405	1.8938
$n = 1500$	1.1145	1.1109	1.1159	1.1161	1.1141	2.2317	2.2312	2.2314	1.9213	1.8957
$n = 2000$	1.0912	1.0825	1.0891	1.0907	1.0863	2.1781	2.1792	2.1764	1.8603	1.8419
теоретичне	1.1197	1.1197	1.1197	1.1197	1.1197	2.2394	2.2394	2.2394	1.8354	1.8354

Табл. 2.3. Різниці середніх оцінок та істинних значень параметрів для $h = 0.1$

	$\alpha=2$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=-2$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=0$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=1$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=-1$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=0$ $\beta=1$ $\gamma=2$	$\alpha=1$ $\beta=1$ $\gamma=2$	$\alpha=-1$ $\beta=1$ $\gamma=2$	$\alpha=1$ $\beta=2$ $\gamma=1$	$\alpha=-1$ $\beta=2$ $\gamma=1$
					$\mu(\hat{\alpha}_n) - \alpha$					
$n=100$	−0.2917	1.2133	0.2021	0.5248	0.2584	0.2221	0.5346	0.0355	0.4338	0.1481
$n=500$	0.0106	0.3567	0.0276	0.1134	0.0377	0.0309	0.1159	−0.0270	0.0880	0.0174
$n=1000$	−0.0005	0.1862	0.0118	0.0517	0.0169	0.0123	0.0524	−0.0161	0.0410	0.0071
$n=1500$	0.0006	0.1290	0.0080	0.0343	0.0122	0.0086	0.0348	−0.0096	0.0277	0.0051
$n=2000$	0.0026	0.0943	0.0060	0.0269	0.0075	0.0066	0.0276	−0.0087	0.0219	0.0026
					$\mu(\hat{\beta}_n) - \beta$					
$n=100$	−0.0845	−0.5158	0.4988	0.5225	−0.0010	0.5071	0.5158	0.3373	0.6837	0.1027
$n=500$	0.0151	−0.1491	0.1060	0.1103	0.0098	0.1077	0.1095	0.0811	0.1463	0.0395
$n=1000$	0.0051	−0.0779	0.0510	0.0514	0.0053	0.0515	0.0516	0.0396	0.0702	0.0201
$n=1500$	0.0036	−0.0540	0.0332	0.0337	0.0028	0.0334	0.0337	0.0256	0.0470	0.0133
$n=2000$	0.0037	−0.0392	0.0262	0.0264	0.0037	0.0264	0.0265	0.0207	0.0372	0.0124
					$\mu(\hat{\gamma}_n) - \gamma$					
$n=100$	−0.2197	−0.2147	0.0433	−0.0135	−0.0196	0.0038	−0.0238	−0.0314	0.0475	0.0426
$n=500$	−0.0336	−0.0360	0.0104	0.0000	−0.0017	0.0043	−0.0005	−0.0022	0.0118	0.0109
$n=1000$	−0.0174	−0.0167	0.0053	−0.0004	−0.0002	0.0024	−0.0005	−0.0003	0.0058	0.0058
$n=1500$	−0.0113	−0.0116	0.0034	−0.0002	−0.0004	0.0013	−0.0005	−0.0007	0.0039	0.0037
$n=2000$	−0.0082	−0.0079	0.0030	0.0002	0.0003	0.0019	0.0005	0.0006	0.0034	0.0034

Табл. 2.4. Стандартні відхилення $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$ і $\hat{\gamma}_n$ помножені на $\sqrt{n}$ для $h = 0.1$

	$\alpha=2$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=-2$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=0$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=1$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=-1$ $\beta=1$ $\gamma=1$	$\alpha=0$ $\beta=1$ $\gamma=2$	$\alpha=1$ $\beta=1$ $\gamma=2$	$\alpha=-1$ $\beta=1$ $\gamma=2$	$\alpha=1$ $\beta=2$ $\gamma=1$	$\alpha=-1$ $\beta=2$ $\gamma=1$
					$\sqrt{n} \cdot SD(\hat{\alpha}_n)$					
$n=100$	10.0592	4.4663	4.8731	8.2769	3.8205	9.4541	11.3913	8.6162	6.7433	3.8821
$n=500$	10.2820	7.6736	3.6482	6.3630	5.2565	7.3088	8.9465	8.4164	5.1292	4.6376
$n=1000$	9.9656	8.7330	3.3952	6.0178	5.4642	6.7916	8.4371	8.1022	4.9788	4.6907
$n=1500$	9.7299	9.1073	3.4326	5.8580	5.5743	6.8669	8.3466	8.2065	4.8954	4.8094
$n=2000$	9.8504	9.2994	3.3134	5.7929	5.6010	6.6286	8.1361	8.0841	4.8266	4.7729
теоретичне	9.9282	9.9282	3.1636	5.6700	5.6700	6.3272	7.8850	7.8850	4.7254	4.7254
					$\sqrt{n} \cdot SD(\hat{\beta}_n)$					
$n=100$	5.4751	2.8848	6.6041	7.1163	4.5594	6.6980	6.8164	6.0409	9.3060	6.7495
$n=500$	4.9930	3.8600	5.0623	5.2408	4.5379	5.1317	5.1945	4.9682	7.4403	6.8754
$n=1000$	4.7646	4.2949	4.9172	4.9466	4.6820	4.9365	4.9373	4.8815	7.2670	7.0136
$n=1500$	4.6286	4.3985	4.7712	4.7660	4.6420	4.7743	4.7626	4.7515	7.1032	6.9843
$n=2000$	4.7016	4.4592	4.7760	4.7893	4.6617	4.7782	4.7782	4.7526	7.1405	7.0185
теоретичне	4.7053	4.7053	4.7053	4.7053	4.7053	4.7053	4.7053	4.7053	7.0130	7.0130
					$\sqrt{n} \cdot SD(\hat{\gamma}_n)$					
$n=100$	2.4182	2.4043	0.8665	1.2885	1.2578	1.8018	2.0088	2.0290	0.8969	0.8712
$n=500$	1.0845	1.0905	0.7806	0.8607	0.8659	1.5731	1.6119	1.6201	0.8093	0.8077
$n=1000$	0.8992	0.9340	0.7575	0.7889	0.8095	1.5204	1.5303	1.5532	0.7927	0.7965
$n=1500$	0.8462	0.8770	0.7483	0.7690	0.7865	1.4996	1.5051	1.5239	0.7840	0.7904
$n=2000$	0.8277	0.8440	0.7518	0.7689	0.7779	1.5064	1.5125	1.5222	0.7817	0.7852
теоретичне	0.7428	0.7428	0.7428	0.7428	0.7428	1.4856	1.4856	1.4856	0.7792	0.7792

γ майже не впливають на оцінку $\hat{\beta}_n$. Збільшення параметра β збільшує різницю між середнім значенням оцінки та істинним значенням параметра і стандартне відхилення для $\hat{\beta}_n$ і $\hat{\gamma}_n$. Причому вплив зміни параметра β на поведінку $\hat{\beta}_n$ є найбільш значним. Оцінка $\hat{\alpha}_n$ показує себе краще для менших значень $|\alpha|$; а найкращий результат отримано для $\alpha = 0$. Водночас, зміни у α не мають значного впливу на поведінку оцінок $\hat{\beta}_n$ і $\hat{\gamma}_n$.

Відмінним є те, що різниця між середнім значенням оцінки та істинним значенням параметра і стандартне відхилення для $\hat{\alpha}_n$ у випадку $h = 1$ збільшуються при збільшенні параметра β, а у випадку $h = 0.1$ зменшуються.

Спостерігається, що зменшення h з 1 на 0.1 для розглянутих наборів α, β і γ не покращує поведінку оцінок параметрів зсуву. До того ж, стандартне відхилення $\hat{\alpha}_n$ навіть стає гіршим для всіх наборів параметрів. У той же час, оцінка $\hat{\gamma}_n$ у випадку $h = 0.1$ показує себе краще, оскільки має менші різниці між середнім значенням оцінки та істинним значенням параметра та стандартні відхилення у порівнянні з випадком $h = 1$.

2.6 Висновки

У даному розділі розглядаються оцінки для значень параметрів моделі Васічека у випадку, коли спостереження є дискретними з фіксованим кроком.

Розглянуто нормовані суми спостережень, їх квадратів та добутків всіх сусідніх пар спостережень. Знайдено границі для даних статистик при $n \to \infty$. Досліджено асимптотичну поведінку дисперсій та коваріацій даних статистик. Встановлено, що статистики є асимптотично нормальними, та обчислено їх коваріаційну матрицю.

Побудовано оцінки для значень всіх трьох параметрів моделі Васічека. Доведено, що одержані оцінки є строго конзистентними та асимптотично нормальними. Отримано коваріаційну матрицю для оцінок. Проведено аналіз поведінки функцій з головної діагоналі коваріаційної матриці та встановлено їх поведінку при зміні параметрів моделі та кроку.

Для перевірки теоретичних результатів проведено моделювання для 10 наборів параметрів з кроками 1 та 0.1. Поведінка обчислених середніх значень та стандартних відхилень оцінок відповідає теоретично встановленим фактам.

Розділ 3

Оцінювання параметрів зсуву в моделі Кокса–Інгерсолла–Росса

Матеріал даного розділу містить власні результати, опубліковані у статті [98].

3.1 Постановка задачі

Нехай маємо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Будемо аналізувати наступне стохастичне диференціальне рівняння:

$$r_t = r_0 + \int_0^t (a - br_s)\, ds + \sigma \int_0^t \sqrt{r_s}\, dW_s, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

де $W = \{W_t, t \geq 0\}$ – це вінерівський процес та

$$a,\ b,\ \sigma \text{ і } r_0 \text{ додатні константи.} \tag{3.2}$$

Якщо виконуються умови (3.2), то рівняння (3.1) має єдиний невід'ємний сильний розв'язок. Цей розв'язок називають процесом Кокса–Інгерсолла–Росса.

Якщо додатково виконується умова $2a > \sigma^2$ (її часто називають умовою Феллера), то процес Кокса–Інгерсолла–Росса r залишається строго додатним. Для $0 < a < 2\sigma^2$ даний процес майже напевно досягає нуля, миттєво від нього відбиваючись.

Коли $2a > \sigma^2$, тоді процес Кокса–Інгерсолла–Росса ергодичний і його стаціонарний розподіл є гамма-розподілом, який має таку щільність:

$$p_\infty(x) = \frac{(2b/\sigma^2)^{2a/\sigma^2}}{\Gamma(2a/\sigma^2)}\, x^{2a/\sigma^2 - 1} e^{-2bx/\sigma^2} \mathbb{1}_{x>0}. \tag{3.3}$$

Зокрема, ергодичність означає, що для будь-якої функції $f \in L^1(p_\infty)$, середнє за часом $\frac{1}{T}\int_0^T f(r_t)dt$ збігається майже напевно до середнього за простором $\int_{\mathbb{R}} f(x)p_\infty(dx)$ при $T \to \infty$.

Більше деталей про властивості процеса Кокса–Інгерсолла–Росса можна знайти, наприклад, у [39] або [4]. Головне питання у цьому розділі – це оцінювання невідомих параметрів зсуву (a, b) на основі спостережень траєкторії процесу Кокса–Інгерсолла–Росса r. Буде досліджено два випадки:

1. **Неперервні спостереження**: процес r спостерігається неперервно на інтервалі $[0, T]$ (див. пункт 3.2.2).
2. **Дискретні спостереження**: процес r спостерігається у детермінованих та рівновіддалених точках з умовою високої частоти та нескінченного горизонту (див. пункт 3.3.2).

Зауваження 3.1. Для обох випадків (неперервного та дискретного) припускаємо, що коефіцієнт дифузії σ відомий. Це припущення є стандартним у контексті оцінювання параметрів у дифузійних моделях (див., наприклад, [55, 106]), тому що існують ефективні оцінки параметра σ (наприклад, на основі L^p-варіації), які збігаються значно швидше за відомі оцінки параметрів зсуву a і b.

Наприклад, параметр σ може бути оцінений незалежно від параметрів зсуву наступним чином. Для будь-яких фіксованих значень $t > 0$ нехай $\{t_k, k = 0, \dots, n\}$, $n \geq 1$ – послідовність розбиттів інтервалу $[0, t]$ з діаметром $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Відомо, що при $n \to \infty$

$$\sum_{t_k \leq t} \left(r_{t_k} - r_{t_{k-1}}\right)^2 \to \sigma^2 \int_0^t r_t \, dt \quad \text{м. н.}$$

(див., наприклад, [49, p. 52]). Тому, замінивши інтеграл відповідною інтегральною сумою, отримуємо таку строго конзистентну оцінку для σ^2:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{\sum_{t_k \leq t} \left(r_{t_k} - r_{t_{k-1}}\right)^2}{\delta_n \sum_{t_k \leq t} r_{t_k}}.$$

Додаткові методи оцінювання коефіцієнта дифузії для процесу Кокса–Інгерсолла–Росса розглянуто у [19, 73, 111].

Надалі у підрозділах 3.2 та 3.3 символ C буде позначати сталу, точне значення якої не важливе і може змінюватись залежно від ситуації. Коли потрібно

підкреслити залежність константи C від інших параметрів вказуватимемо відповідні значення у нижньому індексі.

3.2 Неперервна оцінка

Припустимо, що траєкторії $\{r_t, t \in [0,T]\}$, які спостерігаються, є неперервними. Наступна строго конзистентна оцінка для параметра (a,b) була побудована у [30, теорема 5]:

$$\tilde{a}_T = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\left(\int_0^T r_t\,dt\right)^2}{T\int_0^T r_t^2\,dt - \left(\int_0^T r_t\,dt\right)^2}, \tag{3.4}$$

$$\tilde{b}_T = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{T\int_0^T r_t\,dt}{T\int_0^T r_t^2\,dt - \left(\int_0^T r_t\,dt\right)^2}. \tag{3.5}$$

У даному підрозділі встановлено асимптотичну нормальність даної оцінки. Проведену роботу розділено на дві частини. У пункті 3.2.1 проаналізовано граничну поведінку інтегралів $\int_0^T r_t dt$, $\int_0^T r_t^2 dt$ та $\int_0^T r_t^3 dt$. А у пункті 3.2.2 встановлено основний результат – асимптотичну нормальність оцінки $(\tilde{a}, \tilde{b})$.

3.2.1 Асимптотична поведінка інтегралів

У цьому пункті буде досліджено властивості інтегралів $\int_0^T r_t dt$ і $\int_0^T r_t^2 dt$, які містяться в оцінці $(\tilde{a}, \tilde{b})$ та інтегралу $\int_0^T r_t^3 dt$, який використовується в доведеннях. Зокрема, виразимо вищезгадані інтеграли через мартингали Ito $\int_0^T r_t^{1/2} dW_t$ та $\int_0^T r_t^{3/2} dW_t$. Також встановимо спільну асимптотичну нормальність цих інтегралів.

Спершу запишемо відомі факти, які будуть потрібні для отримання нових результатів:

1. Наступні збіжності виконуються майже напевно при $T \to \infty$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T r_t dt \to \frac{a}{b}, \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T r_t^2 dt \to \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2}. \tag{3.7}$$

Збіжності (3.6) та (3.7) були доведені в [29, теорема 1] та [30, теорема 4] відповідно. Зауважимо, що за додаткової умови $2a > \sigma^2$ (коли процес r є ергодичним зі стаціонарною щільністю (3.3)) (3.6) і (3.7) випливають з ергодичної теореми, див., наприклад, [30, наслідок 2].

2. Для будь-яких значень $q \geq 1$ існує константа $C = C_q > 0$ така, що

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{T}\int_0^T r_t dt - \frac{a}{b}\right|^q \leq CT^{-q/2}. \tag{3.8}$$

Дану нерівність було доведено в [102, лема 4.3 (1)]. Варто зазначити, що твердження цієї леми включає додаткову умову, а саме $2a > \sigma^2$. Проте, детальний аналіз доведення показує, що ця умова є необхідною лише для другої частини леми, а не для нерівності (3.8).

3. Для будь-яких значень $p > -2a/\sigma^2$ виконується

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E} r_t^p < \infty. \tag{3.9}$$

Цей факт опубліковано у [12, твердження 3].

Тепер перейдемо до встановлення допоміжних результатів з властивостями інтегралів, які будуть необхідні для доведення основної теореми.

Лема 3.1. *Для будь-яких значень $p > 0$ і $q \geq 1$ існує константа $C = C_{p,q} > 0$ така, що*

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{T}\int_0^T r_s^p \, dW_s\right|^q \leq CT^{-\frac{q}{2}}. \tag{3.10}$$

Доведення. Враховуючи нерівність Ляпунова між L_q-нормами для різних q, достаньо довести цю лему для $q \geq 2$.

Використовуючи нерівності Буркхолдера–Девіса–Ґанді (див. [1, теорема 9.7.1.]) та Гельдера, отримуємо, що для будь-яких значень $q \geq 2$ виконується:

$$\mathbb{E}\left|\int_0^T r_s^p \, dW_s\right|^q \leq C\mathbb{E}\left(\int_0^T r_s^{2p} \, ds\right)^{\frac{q}{2}} \leq CT^{\frac{q}{2}-1}\int_0^T \mathbb{E} r_t^{pq} \, dt \leq CT^{\frac{q}{2}}, \tag{3.11}$$

де остання нерівність випливає з (3.9). Поділивши обидві частини (3.11) на T^q, отримуємо (3.10). □

Зауваження 3.2. Для часткового випадку $p = \frac{1}{2}$ лема 3.1 була доведена у [102, лема 4.2].

У наступній лемі виразимо інтеграли $\int_0^T r_t dt$ та $\int_0^T r_t^2 dt$ через $\int_0^T r_t^{1/2}\, dW_t$ і $\int_0^T r_t^{3/2}\, dW_t$. Позначимо через $\xrightarrow{L_q}$ збіжність у просторі $L_q = L_q(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Лема 3.2. *Нехай* $q \geq 1$.

(i) Для будь-яких значень $T > 0$

$$T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t dt = \frac{a}{b} T^{\frac{1}{2}} + \frac{\sigma}{b} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{1/2}\, dW_t + \rho_1(T), \tag{3.12}$$

де

$$\rho_1(T) \coloneqq \frac{r_0 - r_T}{b\sqrt{T}} \xrightarrow{L_q} 0, \quad \text{при } T \to \infty. \tag{3.13}$$

(ii) Для будь-яких значень $T > 0$

$$T^{-\frac{3}{2}} \left(\int_0^T r_t dt \right)^2 = \frac{a^2}{b^2} T^{\frac{1}{2}} + \frac{2a\sigma}{b^2} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{1/2}\, dW_t + \rho_2(T), \tag{3.14}$$

де

$$\rho_2(T) \coloneqq \frac{\sigma^2}{b^2} T^{-\frac{3}{2}} \left(\int_0^T r_t^{1/2}\, dW_t \right)^2 + \frac{\rho_1^2(T)}{\sqrt{T}} + \frac{2a}{b} \rho_1(T) + \frac{2\sigma}{b} T^{-1} \rho_1(T) \int_0^T r_t^{1/2}\, dW_t \xrightarrow{L_q} 0, \quad \text{при } T \to \infty. \tag{3.15}$$

(iii) Для будь-яких значень $T > 0$

$$T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^2 dt = \frac{a(a + \sigma^2/2)}{b^2}\, T^{\frac{1}{2}} + \frac{\sigma(a + \sigma^2/2)}{b^2} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{1/2}\, dW_t + \frac{\sigma}{b} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{3/2}\, dW_t + \rho_3(T), \tag{3.16}$$

де

$$\rho_3(T) \coloneqq \frac{r_0^2 - r_T^2}{2b\sqrt{T}} + \frac{(a+\sigma^2/2)}{b}\,\rho_1(T) \xrightarrow{L_q} 0, \quad \textit{при } T \to \infty. \tag{3.17}$$

Доведення. (i) Представлення (3.12) – це прямий наслідок рівняння (3.1); а збіжність (3.13) випливає безпосередньо з (3.9).

(ii) Піднесемо до квадрату (3.12), тоді отримаємо (3.14). Застосувавши обмеження (3.10) та збіжність (3.13), одержуємо збіжність (3.15).

(iii) Використаємо формулу Ito (див. [1, теорема 9.5.2.]) для функції $H(x) = x^2$, з (3.1) отримаємо, що

$$\begin{aligned} r_T^2 - r_0^2 &= \int_0^T \left((a - br_t) \cdot H'(r_t) + \frac{\sigma^2 r_t}{2} H''(r_t) \right) dt + \int_0^T \sigma\sqrt{r_s} H'(r_t) dW_t \\ &= \int_0^T \left((a - br_t) \cdot 2r_t + \sigma^2 r_t \right) dt + 2\sigma \int_0^T r_t^{\frac{3}{2}} dW_t \\ &= (2a + \sigma^2) \left(\int_0^T r_t dt - \frac{aT}{b} \right) - 2b \int_0^T r_t^2 dt + \frac{a(2a+\sigma^2)T}{b} + 2\sigma \int_0^T r_t^{\frac{3}{2}} dW_t. \end{aligned}$$

З цієї рівності виведемо інтеграл $\int_0^T r_t^2 dt$:

$$\int_0^T r_t^2 dt = \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2}\,T + \frac{r_0^2 - r_T^2}{2b} + \frac{2a+\sigma^2}{2b} \left(\int_0^T r_t dt - \frac{aT}{b} \right) + \frac{\sigma}{b} \int_0^T r_t^{\frac{3}{2}} dW_t. \tag{3.18}$$

Тепер, щоб отримати (3.16), достатньо поділити (3.18) на $T^{\frac{1}{2}}$, а потім у правій частині отриманої рівності замість $T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t\, dt$ піставити (3.12). □

У наступних двох лемах оцінимо швидкість збіжності нормованих інтегралів $\frac{1}{T}\int_0^T r_s^2\, ds$ та $\frac{1}{T}\int_0^T r_s^3\, ds$ до їхніх границь. Наступний результат є наслідком (3.16).

Лема 3.3. *Для будь-яких значень $q \geq 1$ існує константа $C = C_q > 0$ така, що*

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{T} \int_0^T r_s^2\, ds - \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2} \right|^q \leq C T^{-\frac{q}{2}}. \tag{3.19}$$

Доведення. З (3.16) отримаємо:

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{T}\int_0^T r_t^2 dt - \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2}\right|^q$$
$$\leq C\left(\frac{\sigma^q(a+\sigma^2/2)^q}{b^{2q}}\mathbb{E}\left|\frac{1}{T}\int_0^T r_t^{1/2}\,dW_t\right|^q + \frac{\sigma^q}{b^q}\cdot\mathbb{E}\left|\frac{1}{T}\int_0^T r_t^{\frac{3}{2}}dW_t\right|^q + T^{-\frac{q}{2}}\mathbb{E}\,|\rho_3(T)|^q\right).$$

Тепер доведення випливає з (3.10) та (3.17). □

У наступній лемі розглядається інтеграл $\int_0^T r_t^3 dt$. Хоча він не міститься безпосередньо у виразах для оцінок, він представляє квадратичні варіації для мартингалу $\int_0^T r_t^{3/2} dW_t$. Тому він важливий для наступних доведень, які спираються на центральну граничну теорему для мартингалів.

Лема 3.4. *(i) Для інтеграла $\int_0^T r_t^3 dt$ справедлива наступна рівність:*

$$\frac{1}{T}\int_0^T r_t^3 dt = \frac{a\left(a+\sigma^2\right)\left(a+\sigma^2/2\right)}{b^3} + \frac{r_0^3 - r_T^3}{3bT}$$
$$+ \frac{a+\sigma^2}{b}\left(\frac{1}{T}\int_0^T r_t^2 dt - \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2}\right) + \frac{\sigma}{bT}\int_0^T r_t^{\frac{5}{2}} dW_t. \tag{3.20}$$

(ii) До того ж, для будь-яких значень $q \geq 1$ існує константа $C = C_q > 0$ така, що

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{T}\int_0^T r_t^3\,dt - \frac{a\left(a+\sigma^2\right)\left(a+\sigma^2/2\right)}{b^3}\right|^q \leq CT^{-\frac{q}{2}}. \tag{3.21}$$

Доведення. (i) Аналогічно до доведення леми 3.2(iii), застосуємо формулу Ito (див. [1, теорема 9.5.2.]) для функції $H(x) = x^3$ до стохастичного диференціального рівняння (3.1). Отримаємо

$$r_T^3 - r_0^3 = \int_0^T \left((a - br_t)\cdot H'(r_t) + \frac{\sigma^2 r_t}{2}H''(r_t)\right)dt + \int_0^T \sigma\sqrt{r_s}H'(r_t)dW_t$$
$$= 3\int_0^T \left(\left(a+\sigma^2\right)r_t^2 - br_t^3\right)dt + 3\sigma\int_0^T r_t^{\frac{5}{2}}dW_t$$

$$= 3\left(a+\sigma^2\right)\left(\int_0^T r_t^2 dt - \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2}T\right) - 3b\int_0^T r_t^3 dt$$
$$+ 3\sigma\int_0^T r_t^{\frac{5}{2}} dW_t + \frac{3a(a+\sigma^2)(a+\sigma^2/2)}{b^2}T,$$

звідки

$$\int_0^T r_t^3 dt = \frac{a(a+\sigma^2)(a+\sigma^2/2)}{b^3}T + \frac{r_0^3 - r_T^3}{3b}$$
$$+ \frac{a+\sigma^2}{b}\left(\int_0^T r_t^2 dt - \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2}T\right) + \frac{\sigma}{b}\int_0^T r_t^{\frac{5}{2}} dW_t.$$

Отже, (3.20) доведено.

(*ii*) Нерівність (3.21) одержуємо з (3.20) аналогічно до того, як була доведена нерівність (3.19) в лемі 3.3. З рівності (3.20) отримуємо:

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{T}\int_0^T r_t^3\, dt - \frac{a\left(a+\sigma^2\right)\left(a+\sigma^2/2\right)}{b^3}\right|^q$$
$$\leq C\left(\frac{r_0^{3q} + \mathbb{E}r_T^{3q}}{(3bT)^q} + \left(\frac{a+\sigma^2}{b}\right)^q \mathbb{E}\left|\frac{1}{T}\int_0^T r_t^2 dt - \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2}\right|^q \right. \tag{3.22}$$
$$\left. + \left(\frac{\sigma}{b}\right)^q \mathbb{E}\left|\frac{1}{T}\int_0^T r_t^{\frac{5}{2}} dW_t\right|^q\right).$$

Перший доданок у правій частині (3.22) може бути обмежений за допомогою (3.9). Для другого доданку використаємо нерівність з леми 3.3, а для третього застосуємо лему 3.1. Звідси випливає (3.21). □

Зауваження 3.3. Можна встановити збіжність

$$\frac{1}{T}\int_0^T r_t^3\, dt \to \frac{a\left(a+\sigma^2\right)\left(a+\sigma^2/2\right)}{b^3} \quad \text{м.н., при } T\to\infty, \tag{3.23}$$

додатково до збіжності в просторі L_q, яка випливає з (3.21) (і її достатньо для наступних доведень). Доведення (3.23) отримуємо з (3.21) за допомогою леми

Бореля-Кантеллі, аналогічно до доведення збіжності (3.40) у лемі 3.10, яка розлядається трохи далі. Зазначимо, що у випадку $2a > \sigma^2$ (коли процес r має ергодичні властивості), (3.23) випливає з ергодичної теореми.

Лема 3.5. *При* $T \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \begin{pmatrix} \int_0^T r_t^{1/2} dW_t \\ -\int_0^T r_t^{3/2} dW_t \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Gamma),$$

де

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & -\frac{a}{b^2}\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ -\frac{a}{b^2}\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right) & \frac{a}{b^3}\left(a + \sigma^2\right)\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Доведення. Зауважимо, що векторний процес

$$M_T \coloneqq \begin{pmatrix} \int_0^T r_t^{1/2} dt \\ -\int_0^T r_t^{3/2} dt \end{pmatrix}, \quad T \geq 0,$$

є двовимірним мартингалом Ітo з квадратичною варіацією

$$\langle M \rangle_T = \begin{pmatrix} \int_0^T r_t dW_t & -\int_0^T r_t^2 dt \\ -\int_0^T r_t^2 dW_t & \int_0^T r_t^3 dt \end{pmatrix}.$$

Відповідно до (3.6), (3.7) та леми 3.4, маємо

$$\frac{1}{T}\langle M \rangle_T \xrightarrow{\mathbb{P}} \Gamma, \quad \text{при } T \to \infty.$$

Тоді шукана збіжність

$$\frac{1}{\sqrt{T}} M_T \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Gamma), \quad \text{при } T \to \infty,$$

випливає з центральної граничної теореми для багатовимірних мартингалів (див., наприклад, теорему Б.6 у додатку Б). □

3.2.2 Асимптотична нормальність оцінки за неперервними спостереженнями

Основний результат даного пункту – це теорема про асимптотичну нормальність оцінки $(\tilde{a}, \tilde{b})$ (див. 3.4 та 3.5).

Розглянемо знаменник 3.4 та 3.5, що поділений на T^2. Позначимо

$$D_T \coloneqq \frac{1}{T}\int_0^T r_t^2\,dt - \left(\frac{1}{T}\int_0^T r_t\,dt\right)^2. \tag{3.24}$$

З (3.6) та (3.7) випливає, що

$$D_T \to \frac{a\sigma^2}{2b^2} \quad \text{м.н. при } T\to\infty. \tag{3.25}$$

У наступних двох лемах (3.6 та 3.7) виразимо $\sqrt{T}(\tilde{a}_T - a)$ і $\sqrt{T}(\tilde{b}_T - b)$ через $\int_0^T r_t^{1/2}dW_t$ та $\int_0^T r_t^{3/2}dW_t$.

Зауважимо, що у цих двох лемах використовуються значення $\rho_2(T)$ та $\rho_3(T)$, що визначені у лемі 3.2 (див. 3.15 та 3.17 відповідно).

Лема 3.6. *Для будь-яких значень* $T > 0$

$$\sqrt{T}\,(\tilde{a}_T - a) = \frac{a\sigma}{bD_T\sqrt{T}}\left(\frac{a+\sigma^2/2}{b}\int_0^T r_t^{1/2}dW_t - \int_0^T r_t^{3/2}dW_t\right) + R_1(T), \tag{3.26}$$

де

$$R_1(T) = \frac{1}{D_T}\left[\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right)\rho_2(T) - a\rho_3(T)\right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \textit{при } T\to\infty. \tag{3.27}$$

Доведення. У виразі $\tilde{a}_T - a$ використаємо визначення оцінки $\tilde{a}_T$ та підставимо у отриманий результат значення D_T, яке задається рівністю (3.24):

$$\begin{aligned}\sqrt{T}\,(\tilde{a}_T - a) &= \sqrt{T}\left(\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\left(\int_0^T r_t\,dt\right)^2}{T\int_0^T r_t^2\,dt - \left(\int_0^T r_t\,dt\right)^2} - a\right)\\ &= \frac{\left(\frac{\sigma^2}{2}+a\right)T^{-3/2}\left(\int_0^T r_t\,dt\right)^2 - aT^{-\frac{1}{2}}\int_0^T r_t^2\,dt}{D_T}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Далі перетворимо (3.28), виразивши інтеграли в чисельнику відповідно до формул з леми 3.2 (ii)–(iii). Отримаємо

$$\begin{aligned}\sqrt{T}\,(\tilde{a}_T - a) = \frac{1}{D_T}\Bigg[&\frac{a^2\left(a+\sigma^2/2\right)}{b^2}T^{\frac{1}{2}} + \frac{2a\sigma\left(a+\sigma^2/2\right)}{b^2}T^{-\frac{1}{2}}\int_0^T r_t^{1/2}\,dW_t\\ &+\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right)\rho_2(T) - \frac{a^2(a+\sigma^2/2)}{b^2}\,T^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$- \frac{a\sigma(a+\sigma^2/2)}{b^2} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{1/2}\, dW_t - \frac{a\sigma}{b} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{3/2}\, dW_t - a\rho_3(T) \Bigg]$$

$$= \frac{1}{D_T} \Bigg[\frac{a\sigma\left(a+\sigma^2/2\right)}{b^2} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{1/2}\, dW_t - \frac{a\sigma}{b} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{3/2}\, dW_t + \left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right)\rho_2(T) - a\rho_3(T) \Bigg].$$

Отже, (3.26) виконується з залишком $R_1(T)$, для якого збіжність (3.27) справедлива відповідно до (3.15), (3.17) і (3.25). □

Лема 3.7. *Для будь-яких* $T > 0$

$$\sqrt{T}\left(\tilde{b}_T - b\right) = \frac{\sigma}{D_T\sqrt{T}} \left(\frac{a}{b} \int_0^T r_t^{1/2} dW_t - \int_0^T r_t^{3/2} dW_t \right) + R_2(T), \tag{3.29}$$

де

$$R_2(T) = \frac{1}{D_T} \left[\frac{\sigma^2}{2}\rho_1(T) - b\rho_3(T) + b\rho_2(T) \right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \textit{при } T \to \infty. \tag{3.30}$$

Доведення. З (3.5), (3.24) та леми (3.2) отримуємо такий вираз

$$\sqrt{T}\left(\tilde{b}_T - b\right) = \frac{\frac{\sigma^2}{2} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t\, dt - bT^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^2\, dt + bT^{-\frac{3}{2}} \left(\int_0^T r_t\, dt \right)^2}{\frac{1}{T}\int_0^T r_t^2\, dt - \left(\frac{1}{T} \int_0^T r_t\, dt \right)^2}$$

$$= \frac{1}{D_T} \left[\frac{a\sigma}{b} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{1/2}\, dW_t - \sigma T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T r_t^{3/2}\, dW_t + \frac{\sigma^2}{2}\rho_1(T) - b\rho_3(T) + b\rho_2(T) \right].$$

Звідси отримуємо формулу (3.29) з залишком $R_2(T)$. А збіжність (3.30) випливає з (3.25) і леми 3.2. □

Тепер сформулюємо та доведемо основний результат цього пункту.

Теорема 3.1. *Оцінка* $(\tilde{a}_T, \tilde{b}_T)$ *є асимптотично нормальною:*

$$\sqrt{T} \begin{pmatrix} \tilde{a}_T - a \\ \tilde{b}_T - b \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \textit{при } T \to \infty,$$

де

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{a}{b}\left(2a+\sigma^2\right) & 2a+\sigma^2 \\ 2a+\sigma^2 & \frac{2b}{a}\left(a+\sigma^2\right) \end{pmatrix}.$$

Доведення. З лем 3.6 і 3.7 отримуємо наступний результат:

$$\sqrt{T}\begin{pmatrix} \tilde{a}_T - a \\ \tilde{b}_T - b \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{D_T}\begin{pmatrix} \frac{a}{b^2}\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right) & \frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T r_t^{1/2} dW_t \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T r_t^{3/2} dW_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1(T) \\ R_2(T) \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Якщо взяти до уваги збіжність (3.25), лему 3.5 та теорему Слуцького (див. теорему Б.4 у додатку Б),тоді отримуємо, що права частина рівності (3.31) збігається до двовимірного нормального розподілу $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ з

$$\begin{aligned} \Sigma &= \left(\frac{2b^2}{a\sigma}\right)^2 \begin{pmatrix} \frac{a}{b^2}\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right) & \frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a}{b} & -\frac{a}{b^2}\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right) \\ -\frac{a}{b^2}\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right) & \frac{a}{b^3}\left(a+\sigma^2\right)\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a}{b^2}\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right) & \frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2a}{b}\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right) & 2\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right) \\ 2\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right) & \frac{2b}{a}\left(a+\sigma^2\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Зауваження 3.4 (Аналіз поведінки оцінок $\tilde{a}_T$ та $\tilde{b}_T$ при зміні значень параметрів a, b і σ). Отриманий теоретичний результат для Σ показує, що стандартне відхилення оцінки $\tilde{a}_T$ буде збільшуватись при збільшенні параметрів a та σ та зменшуватись при збільшенні параметра b. Стандартне відхилення оцінки $\tilde{b}_T$ буде зменшуватись при збільшенні параметра a та збільшуватись при збільшенні параметрів b та σ. Відповідно, з результатів, отриманих у даній теоремі можемо сказати, що збільшення параметра a буде покращувати оцінку $\tilde{a}_T$ та погіршувати $\tilde{b}_T$; збільшення параметра b впливає на оцінки інакше, погіршує оцінку $\tilde{a}_T$ та покращує $\tilde{b}_T$; а от збільшення параметра σ буде погіршувати обидві оцінки.

Зауваження 3.5 (Порівняння з оцінкою максимальної вірогідності). Порівняємо оцінку $(\tilde{a}_T, \tilde{b}_T)$, яку визначено у (3.4)–(3.5), з оцінкою максимальної вірогідності, дослідженою у [12]. З одного боку, оцінка максимальної вірогідності є визначеною тільки за додаткової умови $2a > \sigma^2$. Натомість оцінка $(\tilde{a}_T, \tilde{b}_T)$ застосовна для всіх $a > 0$, що є значною перевагою. З іншого боку, відповідно до [12, теорема 5]

оцінка максимальної вірогідності є асимптотично нормальною з наступною коваріаційною матрицею:

$$\Sigma_{\text{mle}} = \begin{pmatrix} \frac{a}{b}\left(2a - \sigma^2\right) & 2a - \sigma^2 \\ 2a - \sigma^2 & 2b \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Порівнюючи Σ and Σ_{mle}, бачимо, що коли оцінка максимальної вірогідності є визначеною, вона завжди більш ефективна, ніж оцінка $(\tilde{a}_T, \tilde{b}_T)$.

3.3 Дискретна оцінка

У даному підрозділі дослідимо дискретизацію оцінки $(\tilde{a}_T, \tilde{b}_T)$. Аналогічно до [102], розглянемо наступну схему спостережень, яка дозволяє побудову конзистентної оцінки. Нехай n – це натуральне число. Розглянемо рівномірне розбиття інтервалу $[0, n]$ з кроком $\delta_n = n^{-\beta}$, $\beta > 0$. Припустимо, що процес r спостерігається у моменти часу $t_k = k\delta_n = kn^{-\beta}$, де $k = 0, \ldots, m_n - 1$. Таким чином, загальна кількість спостережень становить $m_n = n^{\beta+1}$.

В оцінці $(\tilde{a}_T, \tilde{b}_T)$ замість інтегралів $\int_0^T r_t dt$ і $\int_0^T r_t^2 dt$ підставимо відповідні суми та визначимо оцінку параметрів a та b на основі дискретних спостережень $\{r_{t_k}, k = 0, \ldots, m_n - 1\}$ таким чином:

$$\hat{a}_n = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\right)^2}{m_n \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 - \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\right)^2}, \tag{3.33}$$

$$\hat{b}_n = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{m_n \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}}{m_n \sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 - \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\right)^2}. \tag{3.34}$$

Основне завдання розділу – це встановити строгу конзистентність та асимптотичну нормальність оцінки $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ Аналогічно до попереднього підрозділу, виведення даного результату поділимо на два блоки. У пункті 3.3.1 доведено допоміжні леми, які стосуються властивостей сум $\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}$ і $\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2$ з оцінок 3.33 та 3.34. Пункт 3.3.2 містить основний результат підрозділу: у ньому сформульовано та доведено строгу конзистентність та асимптотичну нормальність дискретної оцінки $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$.

3.3.1 Наближення інтегралів сумами. Асимптотична поведінка сум

У цьому пункті буде розглянуто суми $\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n$ і $\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2\delta_n$, які з'являються коли чисельник та знаменник дискретних оцінок (3.33), (3.34) помножити на δ_n. Будуть встановлені необхідні для виведення основного результату властивості цих сум, зокрема їх збіжності до відповідних інтегралів.

Спершу нагадаємо наступні факти з [12, 102]:

1. Нехай $0 \le s < t$ такі, що $0 < t - s < 1$. Тоді для всіх значень $q \ge 1$ існує константа $C = C_q > 0$ така, що

$$\mathbb{E}\,|r_t - r_s|^q \le C(t-s)^{\frac{q}{2}}, \tag{3.35}$$

   див. [12, твердження 4].
2. Відповідно до [102, формула (4.17)] для всіх значень $q \ge 1$,

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\int_0^T r_t dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n\right|^q \le Cn^{-\frac{\beta q}{2}} \tag{3.36}$$

   для деякої константи $C > 0$.
3. З [102, лема 4.6],

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n \to \frac{a}{b} \text{ м.н., при } n \to \infty. \tag{3.37}$$

Щоб довести основну теорему цього підрозділу на додачу до процитованих вище властивостей процесу r, потрібні будуть аналогічні результати для процесу r^2. Ці аналоги сформульовано і доведено в наступних трьох лемах.

Лема 3.8. *Припустимо, що* $0 \le s < t$ *такі, що* $0 < t - s < 1$. *Тоді для будь-якого значення* $q \ge 1$ *існує константа* $C = C_q > 0$ *така, що*

$$\mathbb{E}\left|r_t^2 - r_s^2\right|^q \le C(t-s)^{q/2}. \tag{3.38}$$

Доведення. Застосувавши нерівність Коші–Шварца, отримаємо

$$\mathbb{E}\left|r_t^2 - r_s^2\right|^q = \mathbb{E}\left[(r_t + r_s)^q\,|r_t - r_s|^q\right] \le \sqrt{\mathbb{E}(r_t + r_s)^{2q} \cdot \mathbb{E}\,|r_t - r_s|^{2q}}.$$

Перший множник під коренем обмежений відповідно до (3.9), а другий множник, відповідно до (3.35), має таку оцінку: $\mathbb{E}\,|r_t - r_s|^{2q} \le C(t-s)^q$. З вказаних нерівностей отримуємо необхідну нерівність. □

Лема 3.9. *Для будь-яких значень $q \ge 1$ існує константа $C = C_q > 0$ така, що*

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\int_0^T r_t^2\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2\delta_n\right|^q \le Cn^{-\frac{\beta q}{2}}. \tag{3.39}$$

Доведення. Для випадку $q = 1$, використавши (3.38), отримаємо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\int_0^n r_t^2\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2\delta_n\right| &= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left|\int_0^n \sum_{k=0}^{m_n-1}(r_t^2 - r_{t_k}^2)\mathbb{1}_{t\in(t_k,t_{k+1})}dt\right| \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbb{E}\left|r_t^2 - r_{t_k}^2\right|dt \le n^{-1}\cdot C\cdot n^{\beta/2}\cdot n = Cn^{-\beta/2}.\end{aligned}$$

Для випадку $q > 1$застосуємо нерівність Гельдера, тоді одержимо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\int_0^n r_t^2\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2\delta_n\right|^q &= \frac{1}{n^q}\mathbb{E}\left|\int_0^n \sum_{k=0}^{m_n-1}(r_t^2 - r_{t_k}^2)\mathbb{1}_{t\in(t_k,t_{k+1})}dt\right|^q \\ &\le \frac{1}{n^q}\mathbb{E}\int_0^n\left|\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(r_t^2 - r_{t_k}^2\right)\mathbb{1}_{t\in(t_k,t_{k+1})}\right|^q dt\left(\int_0^n dt\right)^{q-1} \\ &\le \frac{1}{n^q}n^{q-1}\sum_{k=0}^{m_n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbb{E}\left|r_t^2 - r_{t_k}^2\right|^q \le n^{-1}\cdot C\cdot n^{-\beta q/2}\cdot n = Cn^{-\beta q/2}.\end{aligned}$$

Отже, (3.39) доведено. □

Лема 3.10. *Має місце наступна збіжність:*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2\delta_n \to \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2} \quad \text{м.н., при } n\to\infty. \tag{3.40}$$

До того ж, для будь-яких значень $q \ge 1$ існує константа $C = C_q > 0$

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2\delta_n - \frac{a(a+\sigma^2/2)}{b^2}\right|^q \le Cn^{-\frac{(\beta\wedge 1)q}{2}}. \tag{3.41}$$

Доведення. Об'єднавши результати леми 3.3 та леми 3.9, отримаємо нерівність (3.41). Крім того, з леми 3.9 та неірвності Маркова встановимо, що для будь-яких значень $\varepsilon > 0$ та будь-яких значень $q \geq 1$ виконується наступна нерівність:

$$\mathbb{P}(A_n) := \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\int_0^n r_t^2 dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 \delta_n\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{C}{\varepsilon^q} n^{-\frac{\beta q}{2}}.$$

Обиравши достатньо велике q, можна гарантувати, що виконується умова $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(A_n) < \infty$. Тоді з леми Бореля–Кантеллі випливає збіжність

$$\frac{1}{n}\int_0^n r_t^2 dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2 \delta_n \to 0, \quad \text{м.н., при } n \to \infty.$$

Об'єднавши цю збіжність з (3.7), отримаємо (3.40). □

Лема 3.11. *Нехай $\beta > 1$. Тоді*

$$n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n = n^{-\frac{1}{2}}\int_0^n r_t dt + \tau_1(n), \tag{3.42}$$

$$n^{-\frac{3}{2}}\left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n\right)^2 = n^{-\frac{3}{2}}\left(\int_0^n r_t dt\right)^2 + \tau_2(n), \tag{3.43}$$

$$n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2\delta_n = n^{-\frac{1}{2}}\int_0^n r_t^2 dt + \tau_3(n), \tag{3.44}$$

де

$$\tau_i(n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \textit{при } n \to \infty, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.45}$$

Доведення. Асимптотичні співвідношення (3.42) і (3.44) випливають з нерівностей (3.36) та (3.39) відповідно.

Формула (3.43) отримана з (3.42) таким чином:

$$n^{-\frac{3}{2}}\left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n\right)^2 = n^{-\frac{1}{2}}\left(n^{-\frac{1}{2}}\int_0^n r_t dt + \tau_1(n)\right)^2 = n^{-\frac{3}{2}}\left(\int_0^n r_t dt\right)^2 + \tau_2(n),$$

де

$$\tau_2(n) = 2\tau_1(n)\frac{1}{n}\int_0^n r_t dt + n^{-\frac{1}{2}}\tau_1^2(n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

тому що $\tau_1(n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ і $\frac{1}{n}\int_0^n r_t dt \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{a}{b}$ відповідно до (3.6). □

3.3.2 Строга конзистентність та асимптотична нормальність оцінки за дискретними спостереженнями

У даному пункті доведемо основний результат підрозділу про строгу конзистентність та асимптотичну нормальність оцінки $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ (див. 3.33 та 3.34), використовуючи асимптотичні властивості інтегралів та неперервних оцінок, що були встановлені вище.

Теорема 3.2. *1. Для будь-яких значень $\beta > 0$,*

$$\hat{a}_n \to a, \quad \hat{b}_n \to b, \quad \text{м.н. при } n \to \infty,$$

тобто $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ є строго конзистентною оцінкою для параметра (a, b).

2. Нехай $\beta > 1$. Тоді оцінка $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ є асимптотично нормальною:

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{a}_n - a\\ \hat{b}_n - b\end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \text{при } n \to \infty, \tag{3.46}$$

де Σ визначено у теоремі 3.1.

Доведення. 1. Строга конзистентність. Щоб довести строгу конзистентність $\hat{a}_n$, помножимо чисельник та знаменник дробу у правій частині (3.33) на $\left(\frac{\delta_n}{n}\right)^2$ та використаємо (3.37) і (3.40):

$$\hat{a}_n = \frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2\delta_n - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n\right)^2} \to \frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a\sigma^2}{2b^2} - \left(\frac{a}{b}\right)^2} = a \quad \text{м.н. при } n \to \infty.$$

Строга конзистентність $\hat{b}_n$ виводиться з (3.34), (3.37) та (3.40) аналогічно:

$$\hat{b}_n = \frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n}{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2\delta_n - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n\right)^2} \to \frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a\sigma^2}{2b^2} - \left(\frac{a}{b}\right)^2} = b \quad \text{м.н. при } n \to \infty.$$

2. Асимптотична нормальність. Позначимо

$$\widehat{D}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2\delta_n - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n\right)^2.$$

Тоді (див. доведення строгої конзистентності):

$$\widehat{D}_n \to \frac{a\sigma^2}{2b^2} \quad \text{м.н. при } n \to \infty, \tag{3.47}$$

і $\sqrt{n}\,(\hat{a}_n - a)$ може бути записаний таким чином:

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\,(\hat{a}_n - a) &= \sqrt{n}\left(\frac{\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2\delta_n - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n\right)^2} - a\right)\\ &= \frac{1}{\widehat{D}_n}\left[\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right)n^{-3/2}\left(\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}\delta_n\right)^2 - an^{-1/2}\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2\delta_n\right].\end{aligned}$$

Потім, використовуючи лему 3.11 та зображення (3.28), отримуємо

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\,(\hat{a}_n - a) &= \frac{1}{\widehat{D}_n}\left[\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right)n^{-\frac{3}{2}}\left(\int_0^n r_t dt\right)^2 - an^{-1/2}\int_0^n r_t^2 dt\right.\\ &\qquad\left. + \left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau_2(n) - a\tau_3(n)\right]\\ &= \frac{D_n}{\widehat{D}_n}\sqrt{n}\,(\tilde{a}_n - a) + Q_1(n),\end{aligned} \tag{3.48}$$

де

$$Q_1(n) \coloneqq \frac{\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau_2(n) - a\tau_3(n)}{\widehat{D}_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

відповідно до (3.45) і (3.47). Аналогічно ми можемо довести що

$$\sqrt{n}\left(\hat{b}_n - b\right) = \frac{D_n}{\widehat{D}_n}\sqrt{n}\left(\tilde{b}_n - b\right) + Q_2(n) \tag{3.49}$$

з

$$Q_2(n) \coloneqq \frac{\frac{\sigma^2}{2}\tau_1(n) - b\tau_3(n) + b\tau_2(n)}{\widehat{D}_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Зауважимо, що $D_n/\widehat{D}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ при $n \to \infty$ отримуємо з (3.25) і (3.47). Отже, тепер збіжність (3.46) випливає з рівностей (3.48)–(3.49) та теореми 3.1 за теоремою Слуцького (див. теорему Б.4 у додатку Б). □

Зауваження 3.6 (Аналіз поведінки оцінок $\hat{a}_n$ та $\hat{b}_n$ при зміні значень параметрів a, b і σ). Оскільки асимптотичні коваріаційні матриці Σ для дискретних оцінок

$\hat{a}_n$ та $\hat{b}_n$ і для неперервних оцінок $\tilde{a}_T$ та $\tilde{b}_T$ рівні, тоді поведінка стандарних відхилень для дискретних оцінок $\hat{a}_n$ та $\hat{b}_n$ буде такою ж, як і для неперервних оцінок $\tilde{a}_T$ та $\tilde{b}_T$. Тому залежності, які сформульовано у зауваженні 3.4, будуть справедливі і для неперерних оцінок, і для дискретних оцінок.

Зауваження 3.7 (Порівняння з дискретним ОМВ). Нещодавно у статті [102] досліджувалась дискретна версія ОМВ та було встановлено умови її (строгої) конзистентності та асимптотичної нормальності. Варто зазначити, що порівняно з оцінкою $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ з даного підрозділу, дискретна ОМВ вимагає додаткової умови $a > \sigma^2$, яка є навіть більш обмежувальною, ніж умова $2a > \sigma^2$, яка є необхідною для непервної ОМВ (див. [102, Thm. 2.2]).

До того ж, дискретна ОМВ є строго конзистентною для $\beta \geq 2$, у той час як оцінка $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ з даного підрозділу є строго конзистентною для всіх $\beta > 0$. Проте, якщо виконується умова $a > \sigma^2$, то дискретна ОМВ є асимптотично нормальною з асимптотичною коваріаціною матрицею Σ_{mle}, див. (3.32). З цього випливає що, коли виконуються дані умови, дискретна ОМВ є більш ефективною, ніж $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$.

Зауваження 3.8 (Порівняння з псевдо-ОМВ). У статті [111] було запропоновано альтернативний метод для оцінювання параметрів у моделі Кокса–Інгерсолла–Росса за дискретними спостереженнями. Підхід авторів базувався на дискретному наближенні моделі Кокса–Інгерсолла–Росса, після чого максимізувалась дискретна функція вірогідності. Вони використовують іншу параметризацію для параметра зсуву, а саме $\kappa(\alpha - r_t)$ замість $a - br_t$. Вони також досліджують оцінювання параметрів, використовуючи схему спостережень, де горизонт спостережень зростає поки інтервал між спостереженнями прямує до нуля.

Зокрема, їх оцінка для параметрів зсуву (κ, α) є асимптотично нормальною з такою асимптотичною коваріаційною матрицею:

$$\begin{pmatrix} 2\kappa & 2 \\ 2 & \frac{\alpha\sigma^2}{\kappa^2} \end{pmatrix},$$

як показано у [111, теорема 3.2.4].

Поклавши $a = \kappa\alpha$ та $b = \kappa$, визначимо оцінку для (a, b) відповідно та, застосувавши дельта-метод, можна показати, що їх оцінка для (a, b) є асимптотично нормальною з асимптотичною коваріаційною матрицею:

$$\Sigma_{\text{pseudo}} = \begin{pmatrix} \frac{a}{b}(2a + \sigma^2 + 4b) & 2(a + b) \\ 2(a + b) & 2b \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи Σ_{pseudo} з Σ, бачимо, що оцінка $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ з даного підрозділу для параметра a є більш ефективною, ніж та, яку запропонували у [111]. І навпаки, оцінка з [111] для b має таку саму асимптотичну дисперсію як і дискретний ОМВ і є більш ефективною, ніж оцінка $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ з даного підрозділу.

Також варто зазначити, що у [111] припускають, що умова $a \geq \sigma^2$ виконується. Це обмеження аналогічне до того, що є у дистретної ОМВ із зауваження 3.7. Уже було зазначено, що підхід, запропонований у даному розділі, не вимагає даного обмеження.

Зауваження 3.9 (Порівняння з гауссовим квазі-ОМВ). У статті [19] запропоновано альтернативний підхід для оцінювання параметрів моделі Кокса–Інгерсолла–Росса, що базується на гауссовій квазі ОМВ. Подібно до підходу, що запропонований у даному пункті 3.3.2, у статті розглянуто випадок високочастотних спостережень, де горизонт спостережень прямує до нескінченності, у той час як час між спостереженнями прямує до нуля. В результаті у даній статті побудовано асимптотично ефективну оцінку параметрів зсуву, які характеризується асимптотичною коваріаційною матрицею Σ_{mle} (див. (3.32)). Проте, у цьому підході з'являється ще більш жорстке обмеження, а саме $2a > 5\sigma^2$ (див. умову (1.2) в [19]).

3.4 Моделювання

Додатково для аналізу якості дискретних оцінок $\hat{a}_n$ та $\hat{b}_n$ було змодельовано дані у мові програмування R. Було зафіксовано початкове значення $r_0 = 1$ та для заданих значень параметрів згенеровано 1000 траєкторій для процесу r як розв'язку стохастичного диференціального рівняння (3.1) методом Ейлера-Маруями.

Щоб дослідити вплив a, b, та σ на поведінку оцінки $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$, було розглянуто 12 різних наборів параметрів, а саме: $(a, b, \sigma) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$. Параметр β зафіксовано рівним 1.5. Для кожної множини було обчислено оцінки для різних горизонтів спостережень, власне $n = 2^4, 2^6, 2^8$ (див. таблицю 3.1).

Щоб отримати траєкторію з найбільшим горизонтом було згенеровано 2^{20} точок з кроком 2^{-12}. Відбираючи з цієї траєкторії кожну восьму точку, було отримано траєкторію з горизонтом 2^6 (загалом було відібрано 2^{15} точок). А

Табл. 3.1. Параметри моделювання

Інтервал $[0, n]$	Крок $\delta_n = n^{-\beta}$	Кількість точок $m_n = n^{\beta+1}$
$[0, 2^8]$	2^{-12}	2^{20}
$[0, 2^6]$	2^{-9}	2^{15}
$[0, 2^4]$	2^{-6}	2^{10}

відбираючи з траєкторії з горизонтом 2^6 теж кожну восьму точку, було отримано траєкторію з горизонтом 2^4 (загалом було відібрано 2^{10} точок).Таким чином, для кожного випадку обчислено 1000 оцінок, для яких було знайдено їх середнє арифметичне та стандартне відхилення.

Різниці середніх арифметичних оцінок та істинних значень параметрів продемонстровано у таблиці 3.2. Теоретичне та емпіричне стандартні відхилення $\hat{a}_n$ та $\hat{b}_n$ показано у таблицях 3.3 і 3.4, відповідно.

З таблиць бачимо, що числові результати для згенерованих даних підтверджують теоретичні висновки. Різниці середніх арифметичних оцінок та істинних значень параметрів та стандартні відхилення прямують до нуля коли n зростає. Загалом, емпіричні стандартні відхилення є досить близькими до відповідних теоретичних значень. Цей факт є підтвердженням асимптотичної нормальності сформульованої у теоремі 3.2.

До того ж, отримані числові значення різниць середніх арифметичних оцінок та істинних значень параметрів та стандартних відхилень показують, що серед розглянутих наборів параметрів оцінка $\hat{a}_n$ є кращою, коли $a = 1$ і $b = 2$, у той час як оцінка $\hat{b}_n$ є кращою, коли $a = 2$ і $b = 1$. Більш загально, спостерігаємо такий патерн: збільшення параметра a та зменшення параметра b призводить до покращення оцінки $\hat{a}_n$. У той же час, оцінка $\hat{b}_n$ показує протилежну поведінку. Збільшення параметра σ негативно впливає на поведінку обох оцінок. Отже, отримані результати підтверджують висновки із зауваження 3.6.

Також варто зазначити, що оцінки $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$, досліджені в пункті 3.3.2, дійсно працюють незалежно від того, виконується чи ні умова Феллера $2a > \sigma^2$. У випадку, коли значення параметрів задовольняють цю умову, можна порівняти отримані в роботі результати з відповідними результатами для дискретної ОМВ зі статті [102]. Дискретна ОМВ трохи краща, ніж оцінки $\hat{a}_n$ і $\hat{b}_n$. Не зважаючи на це, досліджені оцінки $\hat{a}_n$ і $\hat{b}_n$ також є цілком прийнятними.

Табл. 3.2. Різниці середніх оцінок $\hat{a}_n$ і $\hat{b}_n$ та істинних значень параметрів

	$\mu(\hat{a}_n) - a$				$\mu(\hat{b}_n) - b$			
	$a = 1$ $b = 1$	$a = 1$ $b = 2$	$a = 2$ $b = 1$	$a = 2$ $b = 2$	$a = 1$ $b = 1$	$a = 1$ $b = 2$	$a = 2$ $b = 1$	$a = 2$ $b = 2$
$\sigma = 1$								
$n = 2^4$	0.3679	0.1924	0.5203	0.3644	0.4219	0.3593	0.3298	0.3908
$n = 2^6$	0.1087	0.0569	0.1596	0.1005	0.1286	0.1175	0.0990	0.1116
$n = 2^8$	0.0254	0.0121	0.0365	0.0211	0.0301	0.0249	0.0226	0.0235
$\sigma = 2$								
$n = 2^4$	0.4927	0.3115	0.7356	0.4717	0.7497	0.7945	0.5377	0.5981
$n = 2^6$	0.1670	0.1008	0.2412	0.1442	0.2438	0.2635	0.1686	0.1843
$n = 2^8$	0.0450	0.0247	0.0596	0.0320	0.0623	0.0627	0.0407	0.0409
$\sigma = 3$								
$n = 2^4$	0.6350	0.4189	0.9386	0.6109	1.2819	1.3760	0.8269	0.9225
$n = 2^6$	0.2322	0.1424	0.3320	0.2014	0.4110	0.4447	0.2632	0.2928
$n = 2^8$	0.0709	0.0415	0.0912	0.0503	0.1107	0.1161	0.0673	0.0697

Табл. 3.3. Емпіричні та теоретичні стандартні відхилення оцінки $\hat{a}_n$

	$a = 1$ $b = 1$		$a = 1$ $b = 2$		$a = 2$ $b = 1$		$a = 2$ $b = 2$	
	емп	теор	емп	теор	емп	теор	емп	теор
$\sigma = 1$								
$n = 2^4$	0.4427	0.4330	0.2916	0.3062	0.7988	0.7906	0.5696	0.5590
$n = 2^6$	0.2039	0.2165	0.1461	0.1531	0.3819	0.3953	0.2740	0.2795
$n = 2^8$	0.1047	0.1083	0.0763	0.0765	0.1937	0.1976	0.1410	0.1398
$\sigma = 2$								
$n = 2^4$	0.4965	0.6124	0.3445	0.4330	0.8797	1.0000	0.6232	0.7071
$n = 2^6$	0.2481	0.3062	0.1856	0.2165	0.4375	0.5000	0.3239	0.3536
$n = 2^8$	0.1384	0.1531	0.1028	0.1083	0.2358	0.2500	0.1732	0.1768
$\sigma = 3$								
$n = 2^4$	0.5780	0.8292	0.3947	0.5863	0.9795	1.2748	0.6907	0.9014
$n = 2^6$	0.2909	0.4146	0.2244	0.2932	0.5047	0.6374	0.3801	0.4507
$n = 2^8$	0.1728	0.2073	0.1317	0.1466	0.2846	0.3187	0.2124	0.2253

Табл. 3.4. Емпіричні та теоретичні стандартні відхилення оцінки $\hat{b}_n$

	$a=1$ $b=1$		$a=1$ $b=2$		$a=2$ $b=1$		$a=2$ $b=2$	
	емп	теор	емп	теор	емп	теор	емп	теор
				$\sigma=1$				
$n=2^4$	0.5152	0.5000	0.6408	0.7071	0.4608	0.4330	0.6230	0.6124
$n=2^6$	0.2455	0.2500	0.3422	0.3536	0.2173	0.2165	0.3057	0.3062
$n=2^8$	0.1245	0.1250	0.1807	0.1768	0.1084	0.1083	0.1573	0.1531
				$\sigma=2$				
$n=2^4$	0.8386	0.7906	1.0524	1.1180	0.6360	0.6124	0.8448	0.8660
$n=2^6$	0.3827	0.3953	0.5312	0.5590	0.2968	0.3062	0.4213	0.4330
$n=2^8$	0.1923	0.1976	0.2832	0.2795	0.1513	0.1531	0.2213	0.2165
				$\sigma=3$				
$n=2^4$	1.3543	1.1180	1.6015	1.5811	0.9300	0.8292	1.1789	1.1726
$n=2^6$	0.5647	0.5590	0.7581	0.7906	0.4064	0.4146	0.5631	0.5863
$n=2^8$	0.2680	0.2795	0.3944	0.3953	0.2016	0.2073	0.2969	0.2932

3.5 Висновки

У даному розділі розглядається процес Кокса–Інгерсолла–Росса r_t (див. 3.1). Дослідження проведено для таких двох ситуацій: процес спостерігається неперервно на інтервалі $[0,T]$ та процес спостерігається у дискретних точках, які знаходяться на однаковій відстані одна від одної та мають високу частоту і нескінченний горизонт.

Для неперервного випадку проаналізовано асимптотичну поведінку таких трьох інтегралів: $\int_0^T r_t dt$, $\int_0^T r_t^2 dt$ і $\int_0^T r_t^3 dt$. Встановлено оцінки моментів та швидкість збіжності нормованих інтегралів. Разом з цим ці інтеграли виражено через мартингали Ito $\int_0^T r_t^{1/2} dW_t$, $\int_0^T r_t^{3/2} dW_t$ і $\int_0^T r_t^{5/2} dW_t$. Також доведено спільну асимптотичну нормальність $\int_0^T r_t^{1/2} dW_t$ та $\int_0^T r_t^{3/2} dW_t$.

Для дискретного випадку розглянуто наближення інтегралів $\int_0^T r_t dt$ і $\int_0^T r_t^2 dt$ сумами $\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}$ і $\sum_{k=0}^{m_n-1} r_{t_k}^2$ відповідно. Для цього було досліджено різниці відповідних інтегралів та сум. Встановлено оцінки швидкості збіжності сум до відповідних границь.

Для обох процесів (неперервного та дискретного) були розлянуті оцінки параметрів зсуву a та b. Для неперевного варіанту доведено асимптотичну

нормальність строго конзистентних оцінок $\tilde{a}_T$ і $\tilde{b}_T$ (див.3.4 та 3.5 відповідно). Для дискретного варіанту проведено аналіз дисктреного аналогу оцінок $\tilde{a}_T$ і $\tilde{b}_T$ - оцінки $\hat{a}_n$ та $\hat{b}_n$ (див. 3.33 та 3.34 відповідно). Доведено строгу конзистентність та асимптотичну нормальність цих дискретних оцінок.

На основі змодельованих даних для 12 різних наборів параметрів обчислено значення оцінок $\hat{a}_n$ та $\hat{b}_n$ для 3 різних горизонтів спостережень. Обчислені значення узгоджуються з отриманими теоретичними результатами.

Розділ 4

Оцінювання параметру зсуву в темперованій моделі Орнштейна-Уленбека

Матеріал даного розділу містить власні результати, опубліковані у статті [101].

4.1 Означення та деякі відомі властивості ТДБР та ТДБРII

У цьому підрозділі буде наведено означення та необхідні для доведень властивості темперованого дробового броунівського руху (*англ. tempered fractional Brownian*) та темперованого дробового броунівського руху другого роду (*(англ. tempered fractional Brownian of second kind).*

Нехай $W = \{W_t, t \in \mathbb{R}\}$ – це двосторонній вінерівський процес, а H та λ додатні константи.

Означення 4.1 ([67]). *Темперований дробовий броунівський рух* (ТДБР) це стохастичний процес $B^I_{H,\lambda} = \{B^I_{H,\lambda}(t), t \geq 0\}$, визначений вінерівським інтегралом

$$B^I_{H,\lambda}(t) := \int_{-\infty}^{t} g^I_{H,\lambda,t}(s)\, dW_s, \tag{4.1}$$

де

$$g^I_{H,\lambda,t}(s) := e^{-\lambda(t-s)_+}(t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - e^{-\lambda(-s)_+}(-s)_+^{H-\frac{1}{2}}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Означення 4.2 ([103]). *Темперований дробовий броунівський рух другого роду* (ТДБРІІ) це стохастичний процес $B^{II}_{H,\lambda} = \{B^{II}_{H,\lambda}(t), t \geq 0\}$, визначений вінерівським інтегралом

$$B^{II}_{H,\lambda}(t) := \int_{-\infty}^{t} g^{II}_{H,\lambda,t}(s)\, dW_s, \tag{4.2}$$

де

$$g^{II}_{H,\lambda,t}(s) := e^{-\lambda(t-s)_+}(t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - e^{-\lambda(-s)_+}(-s)_+^{H-\frac{1}{2}} + \lambda \int_0^t (u-s)_+^{H-\frac{1}{2}} e^{-\lambda(u-s)_+}\, du, \quad s \in \mathbb{R}.$$

На відміну від дробового броунівського руху (ДБР) $B_H = \{B_H(t), t \geq 0\}$, його темперовані послідовники ТДБР $B^I_{H,\lambda} = \{B^I_{H,\lambda}(t), t \geq 0\}$ та ТДБРІІ $B^{II}_{H,\lambda} = \{B^{II}_{H,\lambda}(t), t \geq 0\}$ визначені для всіх додатних значень індексу Хюрста H. ТДБР та ТДБРІІ також залежать від темперуючого параметра $\lambda > 0$, а при $H \in (0,1)$ вони стають (з точністю до нормування) ДБР, якщо $\lambda = 0$, зокрема

$$B^I_{H,0} \stackrel{\triangle}{=} B^{II}_{H,0} \stackrel{\triangle}{=} C_H B_H, \quad \text{де} \quad C_H = \frac{\Gamma(H+\frac{1}{2})}{\sqrt{2H\sin(\pi H)\Gamma(2H)}},$$

див., наприклад, [72, зауваження 1].

Оскільки дані процеси мають чимало спільних властивостей, то надалі в розділі 4 використовуватиметься позначення $X = X_{H,\lambda}$, яке буде означати будь-який з двох процесів: $B^I_{H,\lambda}$ або $B^{II}_{H,\lambda}$.

ТДБР та ТДБРІІ є центрованими гауссовими процесами зі стаціонарними приростами. Також обидва процеси мають таку властивість: для будь-якого коефіцієнта масштабування $c > 0$

$$\{X_{H,\lambda}(ct), t \geq 0\} \stackrel{\triangle}{=} \{c^H X_{H,c\lambda}(t), t \geq 0\}, \tag{4.3}$$

де $\stackrel{\triangle}{=}$ позначає рівність у сенсі скінченновимірних розподілів.

Відомі коваріаційні функції даних темперованих процесів.

- Для ТДБР (4.1) з параметрами $H > 0$ і $\lambda > 0$, коваріаційна функція має наступний вигляд:

$$\operatorname{Cov}\left[B^I_{H,\lambda}(t), B^I_{H,\lambda}(s)\right] = \frac{1}{2}\left[(C^I_t)^2|t|^{2H} + (C^I_s)^2|s|^{2H} - (C^I_{t-s})^2|t-s|^{2H}\right], \tag{4.4}$$

де

$$(C_t^I)^2 \coloneqq \frac{2\Gamma(2H)}{(2\lambda|t|)^{2H}} - \frac{2\Gamma(H+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2\lambda|t|)^H} K_H(\lambda|t|), \quad t > 0,$$

і $K_\nu(z)$ позначає модифіковану функцію Бесселя другого роду.

- Для ТДБРІІ (4.2) з параметрами $H > 0$ і $\lambda > 0$, коваріаційна функція має такий вигляд:

$$\operatorname{Cov}\left[B^{II}_{H,\lambda}(t), B^{II}_{H,\lambda}(s)\right] = \frac{1}{2}\left[(C_t^{II})^2|t|^{2H} + (C_s^{II})^2|s|^{2H} - (C_{t-s}^{II})^2|t-s|^{2H}\right], \tag{4.5}$$

де

$$\begin{aligned}(C_t^{II})^2 \coloneqq{}& \frac{(1-2H)\Gamma(H+\frac{1}{2})\Gamma(H)}{\sqrt{\pi}(\lambda t)^{2H}} \\ &\times \left[1 - {}_2F_3\left(\left\{1, -\tfrac{1}{2}\right\}, \left\{1-H, \tfrac{1}{2}, 1\right\}, \frac{\lambda^2 t^2}{4}\right)\right] \\ &+ \frac{\Gamma(1-H)\Gamma(H+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}H2^{2H}}\, {}_2F_3\left(\left\{1, H-\tfrac{1}{2}\right\}, \left\{1, H+1, H+\tfrac{1}{2}\right\}, \frac{\lambda^2 t^2}{4}\right),\end{aligned}$$

а ${}_2F_3$ позначає узагальнену гіпергеометричну функцію.

Поведінка коваріаційних функцій (4.4) і (4.5) була досліджена в [9], де показано, що на відміну від ДБР, ТДБР та ТДБРІІ показують короткострокову залежність для всіх $H > 0$.

Стосовно властивостей траєкторій, з [72] відомо, що траєкторії обох процесів (ТДБР та ТДБРІІ) є γ-гельдерово неперервними для будь-яких значень $\gamma \in (0, H)$ якщо $H \in (0, 1]$, і є неперервно диференційовними тоді і лише тоді, коли $H > 1$. До того ж, у [72] встановлено оцінки зверху майже напевно для асимптотичного росту процесів:

- Для ТДБР, у [72, теорема 3] показано, що для будь-якого значення $\delta > 0$, існує невід'ємна випадкова величина $\xi = \xi(\delta)$ така, що для всіх $t > 0$

$$\sup_{s\in[0,t]} |B^I_{H,\lambda}(s)| \le (t^\delta \vee 1)\,\xi \quad \text{м.н.} \tag{4.6}$$

та існують константи $C_1 = C_1(\delta) > 0$, $C_2 = C_2(\delta) > 0$ такі, що для всіх $u > 0$

$$\mathbb{P}(\xi > u) \le C_1 e^{-C_2 u^2}. \tag{4.7}$$

- Для ТДБРІІ, у [72, теорема 5] показано, що для будь-якого значення $p > 1$, існує невід'ємна випадкова величина $\xi = \xi(p)$ така, що для всіх $t > 0$

$$\sup_{s\in[0,t]} |B^{II}_{H,\lambda}(s)| \le \left(t^{\frac{1}{2}}(\ln^+ t)^p \vee 1\right)\xi \quad \text{м.н.} \tag{4.8}$$

  і нерівність (4.7) виконується для деяких констант $C_1, C_2 > 0$, які залежать від p.

Як і в розділі 2 тут використовується позначення:

$$\ln^+ x = \begin{cases} \ln x, & x > 1, \\ 0, & x \le 1. \end{cases}$$

Обмеження росту (4.6) і (4.8) використовувались у [72, 74] для вирішення статистичних задач, пов'язаних з оцінюванням параметра зсуву в темперованій моделі Васічека для неперервних спостережень.

Для оцінювання параметра зсуву в темперованій моделі Орнштейна-Уленбека для дискретних спостережень, окрім меж темперованих дробових процесів, будуть потрібні оцінки майже напевно для їх приростів. Цей результат буде доведено в наступному підрозділі.

4.2 Оцінки для ТДБР та ТДБРІІ та їх приростів

4.2.1 Оцінки для дисперсій темперованих ДБР та їх приростів

Лема 4.1. *Для всіх значень $H > 0$, $\lambda > 0$, і $t \in [0, 1]$*

$$\mathbb{E}\left[\left(X_{H,\lambda}(t)\right)^2\right] \ge Ct^{2H},$$

де $C = e^{-2\lambda}/(2H)$.

Доведення. За означенням 4.1, для ТДБР маємо:

$$\mathbb{E}\left[\left(B^I_{H,\lambda}(t)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{0} \left(e^{-\lambda(t-s)}(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - e^{-\lambda(-s)}(-s)^{H-\frac{1}{2}}\right)^2 ds$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \int_0^t \left(e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 ds \\
&\geq \int_0^t \left(e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 ds \\
&\geq e^{-2\lambda t} \int_0^t (t-s)^{2H-1} ds \geq \frac{e^{-2\lambda}}{2H} t^{2H}.
\end{aligned}
$$

Для ТДБРІІ, з означення 4.2 випливають аналогічні перетворення:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(B^{II}_{H,\lambda}(t) \right)^2 \right] &= \int_{-\infty}^0 \left(g^{II}_{H,\lambda,t}(s) \right)^2 ds \\
&\quad + \int_0^t \left(e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} + \lambda \int_0^t (u-s)^{H-\frac{1}{2}} e^{-\lambda(u-s)} \, du \right)^2 ds,
\end{aligned}
$$

і застосування такої самої оцінки для другого інтеграла дає таку саму нижню границю. □

Лема 4.2. *Для всіх значень $H > 0$, $\lambda > 0$ і $\kappa \in (0, 2)$ існують константи $C_1, C_2 > 0$ такі, що для всіх $t \in [0, 1]$*

$$
\begin{aligned}
C_1 t^{2H} \leq \mathbb{E}\left[\left(X_{H,\lambda}(t) \right)^2 \right] \leq C_2 t^{2H}, &\qquad H \in (0, 1), \\
C_1 t^2 \leq \mathbb{E}\left[\left(X_{1,\lambda}(t) \right)^2 \right] \leq C_2 t^{2-\kappa}, &\qquad H = 1, \\
C_1 t^2 \leq \mathbb{E}\left[\left(X_{H,\lambda}(t) \right)^2 \right] \leq C_2 t^2, &\qquad H > 1.
\end{aligned}
$$

Доведення. Відповідно до [72, леми 1 та 3], дисперсії обох процесів неперервні на $[0, 1]$ і мають схожу поведінку при $t \downarrow 0$, а саме:

$$
\mathbb{E}\left[\left(X_{H,\lambda}(t) \right)^2 \right] \sim \begin{cases} Ct^{2H}, & H \in (0, 1), \\ Ct^2 \left| \ln t \right|, & H = 1, \\ Ct^2, & H > 1, \end{cases} \tag{4.9}
$$

де

$$C = C(H,\lambda) = \begin{cases} \frac{\Gamma(H+\frac{1}{2})^2}{2H\sin(\pi H)\Gamma(2H)}, & H \in (0,1), \\ \frac{1}{4}, & H = 1, \\ \frac{\Gamma(2H)}{2^{2H+1}\lambda^{2H-2}(H-1)}, & H > 1,\ X_{H,\lambda} = B^{I}_{H,\lambda}, \\ \frac{(2H-1)\Gamma(2H)}{2^{2H+1}\lambda^{2H-2}(H-1)}, & H > 1,\ X_{H,\lambda} = B^{II}_{H,\lambda}. \end{cases}$$

До того ж, з леми 4.1 випливає, що дисперсія $\mathbb{E}\left[(X_{H,\lambda}(1))^2\right]$ є строго додатною. Позначимо

$$f_1(t) = \frac{t^{2(H\wedge 1)}}{\mathbb{E}\left[\left(X_{H,\lambda}(t)\right)^2\right]}, \qquad f_2(t) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}\left[(X_{H,\lambda}(t))^2\right]}{t^{2(H\wedge 1)}}, & H > 0,\ H \neq 1, \\ \frac{\mathbb{E}\left[(X_{H,\lambda}(t))^2\right]}{t^{2-\kappa}}, & H = 1. \end{cases}$$

Обидві функції f_1 і f_2 є невід'ємними та неперервними на $(0,1]$. Використовуючи асимптотичні співвідношення (4.9), вони можуть бути розширені неперервно до $[0,1]$. Отже, f_1 і f_2 є обмеженими на $[0,1]$, що завершує доведення. □

Якщо взяти до уваги стаціонарність приростів обох процесів (ТДБР та ТДБРІІ), з леми 4.2 випливає наступний результат, який можна розглядати як розширення [9, теорема 2.7], де був розлянутий лише випадок $H \in (0,1)$.

Наслідок 4.1. *Нехай $H > 0$, $\lambda > 0$ та $\kappa \in (0,1)$. Тоді існують константи $K_1, K_2 > 0$ такі, що для всіх $t, s \in \mathbb{R}_+$ з $|t-s| \leq 1$ мають місце наступні двосторонні обмеження:*

$$\begin{aligned} K_1|t-s|^H &\leq \left(\mathbb{E}\left[\left(X_{H,\lambda}(t) - X_{H,\lambda}(s)\right)^2\right]\right)^{1/2} \leq K_2|t-s|^H, && H \in (0,1), \\ K_1|t-s| &\leq \left(\mathbb{E}\left[\left(X_{H,\lambda}(t) - X_{H,\lambda}(s)\right)^2\right]\right)^{1/2} \leq K_2|t-s|^{1-\kappa}, && H = 1, \\ K_1|t-s| &\leq \left(\mathbb{E}\left[\left(X_{H,\lambda}(t) - X_{H,\lambda}(s)\right)^2\right]\right)^{1/2} \leq K_2|t-s|, && H > 1. \end{aligned}$$

4.2.2 Асимптотичний ріст майже напевно приростів ТДБР та ТДБРІІ

У цьому пункті буде становлено оцінки зверху з імовірність 1 для приростів ТДБР та ТДБРІІ на малих інтервалах. Ці границі є важливими для доведення

строгої конзистентності оцінки параметра зсуву у моделі Орнштейна-Уленбека з дискретними спостереженнями, яка буде досліджена в підрозділі 4.3.

Виведення оцінок для приростів базується на перевірці припущень загальних теорем з [6, 53], в яких наведено аналогічні верхні межі для широкого класу гаусcових процесів. Ці припущення сформульовані в термінах дисперсії приростів процесу і є викладеними у зручній формі в додатку Б (див. теорему Б.5).

Аналогічно до [6], розглянемо зростаючу послідовність $\{b_k, k \geq 0\}$ з $b_0 = 0$ та приростами, що задовольняють $b_{k+1} - b_k \geq 1$ для всіх $k \geq 0$. Нехай $a\colon [0, \infty) \to (0, \infty)$ це зростаюча неперервна функція така, що $a(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Та визначимо послідовність $\{a_k, k \geq 0\}$ як $a_k = a(b_k)$.

Для $\Delta \in (0, 1]$ визначимо

$$\mathbf{T}_\Delta = \left\{\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2 : t_1 - \Delta \leq t_2 \leq t_1\right\}, \tag{4.10}$$

$$\mathbf{T}_{b_k, b_{k+1}, \Delta} = \left\{\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2 : b_k \leq t_1 \leq b_{k+1},\ t_1 - \Delta \leq t_2 \leq t_1\right\}, \tag{4.11}$$

та введемо метрику

$$d(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \max\left\{|t_1 - s_1|, |t_2 - s_2|\right\}, \quad \text{де } \mathbf{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2, \mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}_+^2. \tag{4.12}$$

У даному пункті аналіз обох процесів буде проходити одночасно.

Нагадаємо, що

$$X = X_{H,\lambda} \text{ позначає } B^I_{H,\lambda}, \text{ або } B^{II}_{H,\lambda}.$$

Позначимо прирости $X_{H,\lambda}$ як

$$Z(\mathbf{t}) := X_{H,\lambda}(t_1) - X_{H,\lambda}(t_2), \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2).$$

Почнемо з допоміжних тверджень, які приведуть до основної теореми даного пункту.

Твердження 4.1. *Припустимо, що виконуються наступні умови:*

$$L_1 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k} < \infty, \quad L_2 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(b_{k+1} - b_k)}{a_k} < \infty. \tag{4.13}$$

(i) Якщо $H \neq 1$, тоді для будь-яких значень $\vartheta \in (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, \beta)$, $\Delta \in (0, 1]$ і $\rho > 0$ виконуються наступні нерівності:

$$\mathbb{E}\exp\left\{\rho\sup_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}_\Delta}\frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1)}\right\}\le\frac{2^{2/\varepsilon+2}}{\Delta}\exp\left\{\frac{\rho^2K_2^2L_1^2\Delta^{2\beta}}{2(1-\vartheta)^2}\right\}\times\exp\left\{\frac{K_2}{K_1}\left(\frac{L_2}{L_1}+\frac{4^{1-\beta}}{\beta\vartheta(1-\varepsilon/\beta)^{\beta/\varepsilon}}\right)\right\},$$

де $\beta=H\wedge 1$.

(ii) Якщо $H=1$, $\beta\in(0,1)$ *– будь-яке, тоді для всіх значень* $\vartheta\in(0,1)$, $\varepsilon\in(0,\beta)$, $\kappa\in(0,1)$, $\Delta\in(0,1]$ *і* $\rho>0$ *виконуються наступні нерівності:*

$$\mathbb{E}\exp\left\{\rho\sup_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}_\Delta}\frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1)}\right\}\le\frac{2^{2/\varepsilon+2}}{\Delta}\exp\left\{\frac{\rho^2K_2^2L_1^2\Delta^{2\beta}}{2(1-\vartheta)^2}\right\}\times\exp\left\{\frac{K_2\Delta^{\beta-1}}{K_1}\left(\frac{L_2}{L_1}+\frac{4^{1-\beta}}{\beta\vartheta(1-\varepsilon/\beta)^{\beta/\varepsilon}}\right)\right\}.$$

Тут K_1 *і* K_2 *– це константи з наслідка 4.1.*

Доведення. Покажемо, що $Z(\mathbf{t})$ задовольняє умови теореми про асимптотичний ріст для центрованого гауссового процесу (див. теорему Б.5 у додатку Б).

(i) З наслідку 4.1 випливає (для випадку $H=1$ покладемо $\kappa=1-\beta$):

$$m_k:=\sup_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}_{b_k,b_{k+1},\Delta}}\left(\mathbb{E}Z(\mathbf{t})^2\right)^{1/2}\le K_2\Delta^\beta. \tag{4.14}$$

Отже, умова (i) теореми Б.5 виконується.

(ii) Використовуючи нерівність Мінковського і наслідок 4.1 для всіх $h\in(0,1)$, отримаємо:

$$\begin{aligned}&\sup_{\substack{d(\mathbf{t},\mathbf{s})\le h\\ \mathbf{t},\mathbf{s}\in\mathbf{T}_{b_k,b_{k+1},\Delta}}}\left(\mathbb{E}\left|Z(\mathbf{t})-Z(\mathbf{s})\right|^2\right)^{1/2}\\ &\le\sup_{\substack{d(\mathbf{t},\mathbf{s})\le h\\ \mathbf{t},\mathbf{s}\in\mathbf{T}_{b_k,b_{k+1},\Delta}}}\left[\left(\mathbb{E}\left|X_{H,\lambda}(t_1)-X_{H,\lambda}(s_1)\right|^2\right)^{\frac12}+\left(\mathbb{E}\left|X_{H,\lambda}(t_2)-X_{H,\lambda}(s_2)\right|^2\right)^{\frac12}\right]\\ &\le 2K_2h^\beta.\end{aligned}$$

Отже, $Z(\mathbf{t})$ задовольняє умову (ii) теореми Б.5 з $c_k=2K_2$, $k\ge 0$.

(iii) Збіжність перших двох рядів з умови (iii) теореми Б.5 випливає з верхньої границі (4.14) та припущення (4.13):

$$A:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k}{a_k}\le K_2L_1\Delta^\beta<\infty,\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k\ln(b_{k+1}-b_k)}{a_k}\le K_2L_2\Delta^\beta<\infty. \tag{4.15}$$

Покладемо $\gamma := \beta/2$ та використаємо той факт, що $c_k = 2K_2$, $k \geq 0$. Звідси отримаємо, що третій ряд в умові (iii) може бути записаний як:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k^{1-2\gamma/\beta} c_k^{2\gamma/\beta}}{a_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{a_k} = 2K_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k} = 2K_2 L_1 < \infty. \tag{4.16}$$

Отже, всі умови з теореми Б.5 виконуються. Як наслідок, застосувавши цю теорему, ми отримуємо, що для будь-яких значень $\vartheta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,\beta)$ і $\rho > 0$,

$$\mathbb{E} \exp\left\{\rho \sup_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}_\Delta} \frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1)}\right\} \leq \exp\left\{\frac{\rho^2 A^2}{2(1-\vartheta)^2}\right\} \cdot A_0\left(\vartheta, \tfrac{\beta}{2}, \varepsilon\right),$$

де

$$A_0\left(\vartheta, \tfrac{\beta}{2}, \varepsilon\right) = \frac{2^{2/\varepsilon+2}}{\Delta} \exp\left\{\frac{1}{A}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k \ln(b_{k+1}-b_k)}{a_k}\right\} \times \exp\left\{\frac{2\Delta^\beta}{\beta A \left(1-\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\beta/\varepsilon} \vartheta\, 4^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{a_k}\right\}.$$

Далі, використовуючи межі (4.15), рівність (4.16) та оцінку

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{a_k} \geq K_1 L_1 \Delta^{H\wedge 1},$$

приходимо до нерівності:

$$\mathbb{E} \exp\left\{\rho \sup_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}_\Delta} \frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1)}\right\} \leq \exp\left\{\frac{\rho^2 K_2^2 L_1^2 \Delta^{2\beta}}{2(1-\vartheta)^2}\right\} \times \frac{2^{2/\varepsilon+2}}{\Delta} \exp\left\{\frac{K_2 L_2 \Delta^{\beta-H\wedge 1}}{K_1 L_1}\right\} \exp\left\{\frac{4K_2 L_1 \Delta^{\beta-H\wedge 1}}{\beta K_1 L_1 \left(1-\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\beta/\varepsilon} \vartheta\, 4^\beta}\right\}.$$

Зрештою, оскільки $\beta - H\wedge 1 = 0$ для $H \neq 1$ і $\beta - H\wedge 1 = \beta - 1$ для $H = 1$, отримуємо межі, наведені в твердженні.

□

Тепер введемо строго спадну послідовність $\{d_k, k \geq 0\}$ з $d_0 = 1$ і $d_k \to 0$ при $k \to \infty$, неперервну функцію $g\colon (0,1] \to (0,\infty)$ та посліжовність $\{g_k, k \geq 0\}$ таку, що $0 < g_k \leq \min_{d_{k+1}\leq t\leq d_k} g(t)$.

Наступна теорема та наслідок отримані з твердження 4.1 аналогічно до теореми В.57 і наслідка В.58 у [53], відповідно.

Твердження 4.2. *Припустимо виконуються умови твердження 4.1.*

(i) Нехай $H \neq 1$ і покладемо $\beta = H \wedge 1$. Додатково припустимо, що

$$D_1 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k^{\beta} |\ln d_k|}{g_k} < \infty. \tag{4.17}$$

Тоді для всіх $\vartheta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,\beta)$ і $\rho > 0$

$$\mathbb{E} \exp\left\{\rho \sup_{0 \le t_2 < t_1 \le t_2+1} \frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1) g(t_1 - t_2)}\right\} \le \exp\left\{\frac{\rho^2 K_2^2 L_1^2 B^2}{2(1-\vartheta)^2}\right\} A_1(\vartheta, \varepsilon),$$

де $B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k^{\beta}}{g_k}$,

$$A_1(\vartheta, \varepsilon) = 2^{\frac{2}{\varepsilon}+1} \exp\left\{\frac{D_1}{B} + \frac{K_2}{K_1}\left(\frac{L_2}{L_1} + \frac{4^{1-\beta}}{\beta\vartheta(1-\varepsilon/\beta)^{\beta/\varepsilon}}\right)\right\}.$$

(ii) Нехай $H = 1$ і $\beta \in (0,1)$. Припустимо, що виконується сильніша умова

$$D_2 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k^{2\beta-1}}{g_k} < \infty. \tag{4.18}$$

Тоді для всіх $\vartheta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,\beta)$ і $\rho > 0$

$$\mathbb{E} \exp\left\{\rho \sup_{0 \le t_2 < t_1 \le t_2+1} \frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1) g(t_1 - t_2)}\right\} \le \exp\left\{\frac{\rho^2 K_2^2 L_1^2 B^2}{2(1-\vartheta)^2}\right\} A_1(\vartheta, \varepsilon),$$

де

$$A_1(\vartheta, \varepsilon) = 2^{\frac{2}{\varepsilon}+1} \exp\left\{\frac{D_1}{B} + \frac{K_2 D_2}{K_1 B}\left(\frac{L_2}{L_1} + \frac{4^{1-\beta}}{\beta\vartheta(1-\varepsilon/\beta)^{\beta/\varepsilon}}\right)\right\}.$$

Доведення. Позначимо

$$\mathbf{T}^{(k)} = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+ : d_{k+1} < t_1 - t_2 \le d_k\}.$$

Очевидно, $\mathbf{T}^{(k)} \subset \mathbf{T}_{d_k}$ і

$$\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R} : 0 \le t_2 < t_1 \le t_2 + 1\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbf{T}^{(k)}.$$

Отже,

$$\sup_{0 \le t_2 < t_1 \le t_2+1} \frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1) g(t_1 - t_2)} \le \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{\mathbf{t} \in \mathbf{T}^{(k)}} \frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1) g(t_1 - t_2)}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{g_k} \sup_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}^{(k)}} \frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1)}$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{g_k} \sup_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}_{d_k}} \frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1)}.$$

Нехай $\{r_k\}_{k\geq 0}$ – це додатні числа такі, що $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} = 1$. Тоді

$$I(\rho) \coloneqq \mathbb{E}\exp\left\{\rho \sup_{0\leq t_2<t_1\leq t_2+1} \frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1)g(t_1-t_2)}\right\}$$
$$\leq \mathbb{E}\exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho}{g_k} \sup_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}_{d_k}} \frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1)}\right\} \leq \prod_{k=0}^{\infty} \left(\mathbb{E}\exp\left\{\frac{\rho r_k}{g_k} \sup_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}_{d_k}} \frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1)}\right\}\right)^{1/r_k}.$$

Тепер розглянемо два випадки: $H \neq 1$ і $H = 1$.

(i) Випадок $H \neq 1$. З твердження 4.1(i) отримуємо, що

$$I(\rho) \leq \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^{2/\varepsilon+2}}{d_k} \exp\left\{\frac{\rho^2 r_k^2 K_2^2 L_1^2 d_k^{2\beta}}{2(1-\vartheta)^2 g_k^2}\right\} \exp\{A_2(\vartheta,\varepsilon)\}\right)^{1/r_k}$$
$$= 2^{2/\varepsilon+2} \exp\{A_2(\vartheta,\varepsilon)\} \exp\left\{\frac{\rho^2 K_2^2 L_1^2}{2(1-\vartheta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k d_k^{2\beta}}{g_k^2}\right\} \exp\left\{-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln d_k}{r_k}\right\},$$

де

$$A_2(\vartheta,\varepsilon) = \frac{K_2}{K_1}\left(\frac{L_2}{L_1} + \frac{4^{1-\beta}}{\beta\vartheta(1-\varepsilon/\beta)^{\beta/\varepsilon}}\right).$$

Поклавши $r_k = \frac{Bg_k}{d_k^{\beta}}$, одержимо

$$I(\rho) \leq 2^{2/\varepsilon+2} \exp\{A_2(\vartheta,\varepsilon)\} \exp\left\{\frac{\rho^2 K_2^2 L_1^2 B^2}{2(1-\vartheta)^2}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{B}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k^{\beta}\ln d_k}{g_k}\right\}$$
$$= 2^{2/\varepsilon+2} \exp\{A_2(\vartheta,\varepsilon)\} \exp\left\{\frac{\rho^2 K_2^2 L_1^2 B^2}{2(1-\vartheta)^2}\right\} \exp\left\{\tfrac{D_1}{B}\right\}$$
$$= \exp\left\{\frac{\rho^2 K_2^2 L_1^2 B^2}{2(1-\vartheta)^2}\right\} A_1(\vartheta,\varepsilon).$$

(ii) Випадок $H = 1$. З твердження 4.1(ii), маємо

$$I(\rho) \leq \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^{2/\varepsilon+2}}{d_k} \exp\left\{\frac{\rho^2 K_2^2 L_1^2 d_k^{2\beta}}{2(1-\vartheta)^2}\right\} \exp\left\{d_k^{\beta-1} A_2(\vartheta,\varepsilon)\right\}\right)^{1/r_k}$$
$$= 2^{2/\varepsilon+2} \exp\left\{\frac{\rho^2 K_2^2 L_1^2}{2(1-\vartheta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k d_k^{2\beta}}{g_k^2}\right\}$$

$$\times \exp\left\{-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\ln d_k}{r_k}\right\}\exp\left\{A_2(\vartheta,\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k^{\beta-1}}{r_k}\right\}.$$

Зрештою, обравши $r_k = \frac{Bg_k}{d_k^\beta}$, виводимо такий самий результат, як і в (i). □

Наслідок 4.2. *Якщо виконуються всі умови з твердження 4.2, тоді для всіх* $\vartheta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,\beta)$ *і* $u > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t_2<t_1\le t_2+1}\frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1)g(t_1-t_2)} > u\right\} \le \exp\left\{-\frac{u^2(1-\vartheta)^2}{2K_2^2L_1^2B^2}\right\}A_1(\vartheta,\varepsilon). \tag{4.19}$$

Доведення. З нерівності Чебишева отримуємо

$$\begin{aligned}\mathbb{P}&\left\{\sup_{0\le t_2<t_1\le t_2+1}\frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1)g(t_1-t_2)} > u\right\}\\ &\le \frac{1}{e^{\rho u}}\mathbb{E}\exp\left\{\rho\sup_{0\le t_2<t_1\le t_2+1}\frac{|Z(\mathbf{t})|}{a(t_1)g(t_1-t_2)}\right\}\\ &\le \exp\left\{\frac{\rho^2K_2^2L_1^2B^2}{2(1-\vartheta)^2}-\rho u\right\}A_1(\vartheta,\varepsilon).\end{aligned}$$

Поклавши $\rho = \frac{u(1-\vartheta)^2}{K_2^2L_1^2B^2}$, отримаємо (4.19). □

Результати з тверджень 4.1–4.2 та наслідка 4.2 дозволяють отримати наступні асимптотичні межі для приростів ТДБР та ТДБРІІ. Наступна теорема є головним результатом цього підрозділу.

Теорема 4.1. *Нехай* $\beta = H \wedge 1$, *якщо* $H \ne 1$, *і нехай* $\beta \in (0,1)$ *довільне, якщо* $H = 1$. *Для будь-яких значень* $\delta > 0$ *і* $p > 2$ *існує невід'ємна випадкова величина* $\eta = \eta(\delta,p)$ *така, що для всіх* $0 \le t_2 < t_1 \le t_2 + 1$

$$|Z(\mathbf{t})| \le (t_1^\delta \vee 1)(t_1-t_2)^\beta\left(|\ln(t_1-t_2)|^p \vee 1\right)\eta, \quad \text{м.н.}, \tag{4.20}$$

та існують константи $C_1 = C_1(\delta,p) > 0$ *і* $C_2 = C_2(\delta,p) > 0$ *такі, що для всіх* $u > 0$

$$\mathbb{P}(\eta > u) \le C_1\exp(-C_2u^2). \tag{4.21}$$

Доведення. Доведення складається з трьох частин, в яких будуть використовуватись твердження 4.1, твердження 4.2 та наслідок 4.2 відповідно.

Крок 1. Нехай $b_0 = 0$, $b_k = e^k$ для $k \ge 1$ і визначимо $a(t) = t^\delta \vee 1$. Тоді $a_k = a(b_k) = e^{k\delta}$.

Перевіримо умови (4.13) з твердження 4.1:

$$L_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{k\delta}} < \infty,$$
$$L_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(b_{k+1} - b_k)}{a_k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k\delta}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(e-1)}{e^{k\delta}} < \infty.$$

Тут обидва ряди збіжні за ознакою д'Аламбера.

Крок 2. Нехай $d_k = e^{-k}$ та задамо $g(t) = t^{\beta} |\ln t|^p$, $t \in (0, 1]$. Також задамо

$$g_0 = e^{-\beta}, \quad g_k = d_{k+1}^{\beta} |\ln d_k|^p = e^{-(k+1)\beta} k^p, \quad k \geq 1.$$

Зауважимо, що $g_k \leq \min_{d_{k+1} \leq t \leq d_k} g(t)$. Тепер перевіримо решту умов з твердження 4.2.

(i) Випадок $H \neq 1$. У цьому випадку умова (4.17) виконується:

$$D_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k^{\beta} |\ln d_k|}{g_k} = e^{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p-1}} < \infty \quad \text{для всіх } p > 2.$$

(ii) Випадок $H = 1$. Тут застосуємо твердження 4.1–4.2 та наслідок 4.2 з $\beta' = (1 + \beta)/2$ замість β (нагадаємо, що коли $H = 1$, для даного результату $\beta \in (0, 1)$ може бути вибраний довільним чином). Тоді умови (4.17)–(4.18) виконуються для будь-яких значень $p > 1$:

$$D_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k^{\beta'} |\ln d_k|}{g_k} = e^{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-(\beta'-\beta)k}}{k^{p-1}} = e^{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-(1-\beta)k/2}}{k^{p-1}} < \infty,$$
$$D_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k^{2\beta'-1}}{g_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k^{\beta}}{g_k} = e^{\beta} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}\right) < \infty.$$

Крок 3. Задамо

$$\eta := \sup_{0 \leq t_2 < t_1 \leq t_2 + 1} \frac{|Z(\mathbf{t})|}{(t_1^{\delta} \vee 1)(t_1 - t_2)^{\beta} (|\ln(t_1 - t_2)|^p \vee 1)}.$$

Тоді нерівність (4.20) виконується м.н. і за наслідком 4.2 випадкова величина η задовольняє оцінки (4.21). □

4.3 Строго конзистентна оцінка для параметра зсуву у моделі Орнштейна-Уленбека

4.3.1 Опис статистичної моделі

В підрозділі 4.3 темперовані дробові броунівські процеси (ТДБР та ТДБРІІ) будуть шумом в стохастичному диференціальному рівнянні Ланжевена, яке має наступний вигляд:

$$Y_t = y_0 + \theta \int_0^t Y_s ds + \sigma X_t, \quad t \geq 0, \tag{4.22}$$

де $y_0 \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$ і $\sigma > 0$ – це константи.

Як і раніше, позначаємо через $X = X_{H,\lambda}$ процес $B^I_{H,\lambda}$ або $B^{II}_{H,\lambda}$.

Аналогічно до випадку з рівнянням Ланжевена керованим ДБР, рівняння (4.22) має розв'язок $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$, який можна записати у такому вигляді:

$$Y_t = y_0 e^{\theta t} + \sigma \int_0^t e^{\theta(t-s)} dX_s. \tag{4.23}$$

Стохастичний інтеграл відносно ТДБР визначений потраєкторно в сенсі Рімана-Стілтьєса, оскільки іпдінтегральна функція $e^{\theta(t-s)}$ є ліпшицевою, і траєкторії обох процесів (ТДБР та ТДБРІІ) є гельдеровими до порядку $H \wedge 1$

Застосувавши формулу інтегрування частинами, розв'язок (4.23) може бути переписаний у такому вигляді:

$$Y_t = y_0 e^{\theta t} + \sigma\theta e^{\theta t} \int_0^t e^{-\theta s} X_s ds + \sigma X_t. \tag{4.24}$$

Інтеграл $\int_0^\infty e^{-\theta s} X_s ds$ визначений та обмежений. Детальніший аналіз буде наведено у лемі 4.4 та нерівностях (4.33) і (4.34) у випадку ТДБР та у лемі 4.6 і нерівності (4.41) для випадку ТДБРІІ.

У даному розділі припускаємо, що параметри σ, H та λ є відомими та фіксованими, у той час як параметр зсуву $\theta > 0$ невідомий. Мета дослідження: оцінити θ за спостереженнями процесу Y. Буде розглянуто два випадки:

- **Неперервні спостереження:** траєкторія Y спостерігається неперервно на $[0, T]$ (див. пункт 4.3.2).
- **Дискретні спостереження:** процес спостерігається тільки в дискретні моменти часу (див. пункт 4.3.3).

4.3.2 Неперервна оцінка

У даному пункті розглядаємо модель (4.22) та припускаємо, що спостерігається траєкторія $\{Y_t, 0 \le t \le T\}$. Розглянемо наступну неперервну оцінку $\widehat{\theta}_T$:

$$\widehat{\theta}_T = \frac{Y_T^2 - y_0^2}{2\int_0^T Y_t^2\, dt}. \tag{4.25}$$

Зауваження 4.1. Оцінку $\widehat{\theta}_T$ можна трактувати як оцінку найменших квадратів, яка формально мінімізує функціонал $F(\theta) = \int_0^T \left(\dot{Y}_t - \theta Y_t\right)^2 dt$. Нескладно перевірити, що мінімум цього функціоналу досягається в точці: $\widehat{\theta}_T = \frac{\int_0^T Y_t dY_t}{\int_0^T Y_t^2\, dt}$. Якщо траєкторії Y є гельдеровими порядку $\gamma > 1/2$, тоді інтеграл $\int_0^T Y_t\, dY_t$ визначений в сенсі Янга та задовольняє $\int_0^T Y_t\, dY_t = \frac{1}{2}\left(Y_T^2 - Y_0^2\right)$. У випадку $H \le 1/2$ ця умова не гарантується, але оцінка (4.25) залишається коректно визначеною для всіх $H > 0$ та, як буде показано нижче, строго конзистентною.

Теорема 4.2. *Оцінка $\widehat{\theta}_T$ строго конзистентна при $T \to \infty$.*

Доведення. Відповідно до [72, лема 6], наступні збіжності виконуються м.н. при $T \to \infty$:

$$e^{-\theta T} Y_T \to \zeta_\infty, \tag{4.26}$$

$$e^{-2\theta T} \int_0^T Y_t^2\, dt \to \frac{1}{2\theta}\zeta_\infty^2, \tag{4.27}$$

де

$$\zeta_\infty \coloneqq y_0 + \sigma\theta \int_0^\infty e^{-\theta s} X_s\, ds.$$

Випадкова величина ζ_∞ є гауссовою та задовольняє $0 < |\zeta_\infty| < \infty$ майже напевно.

Домножимо чисельник та знаменник оцінки (4.25) на $e^{-2\theta T}$ та використаємо границі (4.26) і (4.27). Отримаємо:

$$\widehat{\theta}_T = \frac{Y_T^2 - y_0^2}{2\int_0^T Y_t^2\,dt} = \frac{(e^{-\theta T}Y_T)^2 - e^{-2\theta T}y_0^2}{2e^{-2\theta T}\int_0^T Y_t^2\,dt} \to \theta \quad \text{м.н., при } T \to \infty. \qquad \square$$

4.3.3 Дискретна оцінка

Тепер розглянемо дискретний аналог оцінки (4.25). Щоб його побудувати, розглянемо розбиття інтервала $[0, n^{m-1}]$ з діаметром n^{-1}, де $n > 1$ і $m > 1$ фіксовані. Тоді отримаємо такий набір точок: $t_{k,n} = kn^{-1}$, де $0 \le k \le n^m$. З неперервного процесу $\{Y_t : 0 \le t \le n^{m-1}\}$, обираємо лише значення у цих дискретних точках і, для спрощення, будемо позначати $Y_{k,n} := Y_{t_{k,n}}$.

Замінивши інтеграли в (4.25) на відповідні інтегральні суми, визначимо наступну оцінку:

$$\widetilde{\theta}_n(m) = \frac{n\left(Y_{n^{m-1}}^2 - y_0^2\right)}{2\sum_{k=0}^{n^m-1} Y_{k,n}^2}. \tag{4.28}$$

Будемо досліджувати асимптотичну поведінку $\widetilde{\theta}_n(m)$ при $n \to \infty$. Сформулюємо основний результат даного пункту.

Теорема 4.3. *Оцінка $\widetilde{\theta}_n(m)$ є строго конзистентною при $n \to \infty$.*

Дану теорему буде доведено за загальною схемою, розглянутою в [24]. Спершу отримаємо кілька допоміжних результатів.

Лема 4.3. *Для процесу Y виконуються наступні обмеження для будь-яких значень $t > 0$:*

$$\sup_{0\le s\le t}|Y_s| \le |y_0|e^{\theta t} + \sigma\theta e^{\theta t}\int_0^t e^{-\theta s}\sup_{0\le u\le s}|X_u|\,ds + \sigma\sup_{0\le s\le t}|X_s|, \tag{4.29}$$

та для будь-яких значень $s \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ маємо

$$\sup_{\frac{k}{n}\le u\le s}|Y_u - Y_{k,n}| \le \theta\int_{\frac{k}{n}}^s\left(|y_0|\,e^{\theta u} + \sigma\theta e^{\theta u}\int_0^u e^{-\theta v}\sup_{0\le z\le v}|X_z|dv + \sigma\sup_{0\le z\le u}|X_z|\right)du$$

$$+ \sigma \sup_{\frac{k}{n} \le u \le s} \left| X_u - X_{k,n} \right|. \tag{4.30}$$

Доведення. Нерівність (4.29) випливає з явного розв'язку рівняння (4.24) моделі, яку розглядаємо.

Доведення нерівності (4.30) зробимо у два кроки. Спершу, використовуючи рівняння (4.22), запишемо різницю $Y_u - Y_{k,n}$ як:

$$Y_u - Y_{k,n} = \theta \int_{\frac{k}{n}}^{u} Y_s \, ds + \sigma(X_u - X_{k,n}).$$

Тепер застосуємо нерівність (4.29):

$$\begin{aligned}
\sup_{\frac{k}{n} \le u \le s} \left| Y_u - Y_{k,n} \right| &\le \theta \sup_{\frac{k}{n} \le u \le s} \int_{\frac{k}{n}}^{u} |Y_v| \, dv + \sigma \sup_{\frac{k}{n} \le u \le s} \left| X_u - X_{k,n} \right| \\
&\le \theta \int_{\frac{k}{n}}^{s} \left(|y_0| \, e^{\theta u} + \sigma\theta e^{\theta u} \int_0^u e^{-\theta v} \sup_{0 \le z \le v} |X_z| dv + \sigma \sup_{0 \le z \le u} |X_z| \right) du \\
&\quad + \sigma \sup_{\frac{k}{n} \le u \le s} \left| X_u - X_{k,n} \right| . \square
\end{aligned}$$

Тепер розглянемо кожен темперований дробовий броунівський рух окремо: ТДБР та ТДБРІІ.

4.3.3.1 Доведення теореми 4.3 у випадку ТДБР

У даному підпункті будемо аналізувати рівняння (4.22) з $X = B^I_{H,\lambda}$, тобто розглядається модель керована ТДБР.

Для спрощення записів позначимо через Ξ клас невід'ємних випадкових величин ξ, які мають наступну властивість: існують константи $C_1 > 0$ і $C_2 > 0$ такі, що ξ задовольняє (4.7) для всіх $u > 0$.

Зауваження 4.2. Клас Ξ є замкненим відносно додавання, множення на додатну сталу та додавання додатної сталої: якщо $\xi, \eta \in \Xi$ та $C > 0$, то $C\xi \in \Xi$, $\xi + C \in \Xi$, $\xi + \eta \in \Xi$. Дане зауваження випливає з відомих нерівностей; наприклад,

$$\mathbb{P}(\xi + \eta > u) \le \mathbb{P}(\xi > u/2) + \mathbb{P}(\eta > u/2),$$

$$\mathbb{P}(\xi + C > u) \le \mathbb{P}(\xi > u - C) \le C_1 e^{-C_2(u-C)^2} \le C_1' e^{-C_2' u^2}$$

для відповідних констант $C_1', C_2' > 0$.

Нагадаємо позначення: $\beta = H \wedge 1$ якщо $H \neq 1$, та $\beta \in (0,1)$ – довільне, якщо $H = 1$.

Лема 4.4. *Для будь-яких значень $\delta > 0$ існує $\zeta \in \Xi$ така що:*

$$\sup_{0 \le u \le s} |Y_u| \le \left(e^{\theta s} + s^{\delta}\right) \zeta, \tag{4.31}$$

та для будь-яких фіксованих значень $\alpha \in [0, \beta)$ і $s \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$

$$\sup_{\frac{k}{n} \le u \le s} |Y_u - Y_{k,n}| \le n^{-\alpha} \left(e^{\theta s} + s^{\delta}\right) \zeta. \tag{4.32}$$

Доведення. З нерівності (4.6) випливає, що для будь-яких значень $s > 0$ виконуються наступні нерівності:

$$\sup_{u \in [0,s]} \left|B^I_{H,\lambda}(u)\right| \le \left(s^{\delta} + 1\right) \xi(\delta) \quad \text{м.н.}, \tag{4.33}$$

де випадкова величина $\xi = \xi(\delta)$ є невід'ємною та належить до Ξ для будь-яких значень $\delta > 0$.

Звідси отримаємо оцінки:

$$\int_0^t e^{-\theta s} \sup_{0 \le u \le s} \left|B^I_{H,\lambda}(u)\right| ds \le \int_0^t e^{-\theta s} \left(s^{\delta} + 1\right) \xi(\delta)\, ds \le C\xi(\delta). \tag{4.34}$$

Підставивши (4.33) і (4.34) в (4.29), отримаємо:

$$\sup_{0 \le u \le s} |Y_u| \le |y_0|\, e^{\theta s} + C\sigma\theta e^{\theta s} \xi(\delta) + \sigma \left(s^{\delta} + 1\right) \xi(\delta). \tag{4.35}$$

Зауважимо, що множник в останньому доданку (4.35) можна обмежити таким чином: $s^{\delta} + 1 \le s^{\delta} + e^{\theta s}$. Та покладемо $\zeta := |y_0| + C\sigma\theta\xi(\delta) + \sigma\xi(\delta) \in \Xi$. Звідси отримаємо нерівність (4.31).

Тепер нехай $s \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, тоді $0 < s - \frac{k}{n} \le \frac{1}{n} < 1$. Покладемо $p = 3$, $t_1 = s$ і $t_2 = \frac{k}{n}$ в (4.20). У такому разі:

$$\left|B^I_{H,\lambda}(s) - B^I_{H,\lambda}\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| \le \left(s^{\delta} + 1\right) \left(s - \tfrac{k}{n}\right)^{\beta} \left(\left|\ln\left(s - \tfrac{k}{n}\right)\right|^3 + 1\right) \eta. \tag{4.36}$$

Для того, щоб обмежити праву частину нерівності (4.36), зауважимо, що для будь-яких значень $r > 0$, функція $f(t) = t^r |\ln t|^3$ при $t \in (0,1)$ є обмеженою та досягає свого максимуму у точці $t = e^{-3/r}$. Тому для будь-якого значення $r > 0$ існує константа C така, що $t^r |\ln t|^3 \le C$. Помноживши обидві частини на $t^{\beta-r}$, отримаємо $t^\beta |\ln t|^3 \le C t^{\beta-r}$. Оскільки t^β як функція від β є строго зростаючою для $t \in (0,1)$, тоді також маємо $t^\beta < t^{\beta-r}$ для будь-якого значення $r > 0$. Отже,

$$t^\beta |\ln t|^3 + t^\beta \le C t^{\beta-r}, \quad t \in (0,1).$$

Далі обмежимо r до проміжку $0 < r \le \beta$, звідси $\alpha := \beta - r \in [0, \beta)$. Тоді

$$\left(s - \tfrac{k}{n}\right)^{\beta-r} \le n^{-\beta+r} = n^{-\alpha},$$

для всіх $s \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$. Підставивши це в (4.36), отримаємо:

$$\left| B^I_{H,\lambda}(s) - B^I_{H,\lambda}\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| \le C n^{-\alpha} \left(s^\delta + 1\right) \eta. \tag{4.37}$$

Тепер застосуємо (4.33), (4.34) і (4.37) до (4.30). З цього випливає

$$\begin{aligned}
\sup_{\frac{k}{n} \le u \le s} |Y_u - Y_{k,n}| &\le \theta \int_{\frac{k}{n}}^{s} \left(|y_0| e^{\theta u} + C\sigma\theta e^{\theta u} \xi(\delta) + \sigma(s^\delta + 1)\xi(\delta) \right) du \\
&\quad + C\sigma n^{-\alpha}(s^\delta + 1)\eta \\
&\le \theta n^{-1} \left(|y_0| e^{\theta s} + C\sigma\theta e^{\theta s} \xi(\delta) + \sigma(s^\delta + 1)\xi(\delta) \right) \\
&\quad + C\sigma n^{-\alpha}(s^\delta + 1)\eta.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Покладемо

$$\zeta = \theta|y_0| + C\sigma\theta^2\xi(\delta) + \sigma\theta\xi(\delta) + C\sigma\eta,$$

яка належить до Ξ згідно зауваження 4.2.

Оскільки $n^{-1} \le n^{-\alpha}$ $(\alpha < \beta \le 1)$, $s^\delta + 1 \le s^\delta + e^{\theta s}$, тоді з нерівності (4.38) випливає обмеження (4.32).

Зауважимо, що дві оцінки, (4.31) і (4.32), можуть бути одержані з однаковою $\zeta \in \Xi$ якщо покласти

$$\zeta = (1+\theta)\left(|y_0| + C\sigma\theta\xi(\delta) + \sigma\xi(\delta)\right) + C\sigma\eta. \qquad \square$$

Лема 4.5. *Для будь-якого значення $\alpha \in (0, \beta)$ існує $\zeta \in \Xi$ та додатнє ціле n_0 такі, що для всіх $n \geq n_0$ виконується наступна нерівність:*

$$\left| \int_0^{n^{m-1}} Y_s^2 \, ds - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n^m-1} Y_{k,n}^2 \right| \leq \frac{\zeta^2}{n^\alpha} e^{2\theta n^{m-1}}.$$

Доведення. Спершу помітимо, що

$$\left| \int_0^{n^{m-1}} Y_s^2 \, ds - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n^m-1} Y_{k,n}^2 \right| \leq \int_0^{n^{m-1}} \sum_{k=0}^{n^m-1} \left| \varphi_{n,k}(s) \right| \, ds, \tag{4.39}$$

де доданки під знаком інтеграла мають вигляд:

$$\varphi_{n,k}(s) := \left(Y_s^2 - Y_{k,n}^2 \right) \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(s), \quad 0 \leq k \leq n^m - 1.$$

Використовуючи нерівності, встановлені в лемі 4.4, оцінимо кожен доданок таким чином:

$$\begin{aligned} \left| \varphi_{n,k}(s) \right| &\leq \left| Y_s - Y_{k,n} \right| \left(|Y_s| + \left| Y_{k,n} \right| \right) \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(s) \\ &\leq 2 \sup_{\frac{k}{n} \leq u \leq s} \left| Y_u - Y_{k,n} \right| \cdot \sup_{0 \leq u \leq s} |Y_u| \, \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(s) \\ &\leq 2n^{-\alpha} \left(e^{\theta s} + s^\delta \right)^2 \zeta^2 \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(s) \leq 4n^{-\alpha} \left(e^{2\theta s} + s^{2\delta} \right) \zeta^2 \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(s). \end{aligned}$$

Підставивши ці обмеження в (4.39) та проінтегрувавши, одержимо:

$$\left| \int_0^{n^{m-1}} Y_s^2 \, ds - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n^m-1} Y_{k,n}^2 \right| \leq 4 \, n^{-\alpha} \left(\frac{e^{2\theta n^{m-1}} - 1}{2\theta} + \frac{n^{(2\delta+1)(m-1)}}{2\delta + 1} \right) \zeta^2.$$

Зрештою, зауважимо, що для достатньо великих n доданок в дужках є $O(e^{2\theta n^{m-1}})$ і для будь-яких додатних констант може бути увібраний в загальну випадкову величину $\zeta \in \Xi$ відповідно до зауваження 4.2. □

Наслідок 4.3. *Існує випадкова величина $\zeta \in \Xi$ та додатнє ціле n_0 такі, що для всіх $n \geq n_0$*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n^m-1} Y_{k,n}^2 = \int_0^{n^{m-1}} Y_s^2 \, ds + R_n, \tag{4.40}$$

де залишок задовольняє

$$|R_n| \leq \frac{\zeta^2}{n^\alpha} e^{2\theta n^{m-1}}.$$

Доведення теореми 4.3. Скомбінувавши (4.40) з оцінкою (4.25), отримаємо:

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta}_n(m) &= \frac{n\left(Y^2_{n^{m-1}} - y_0^2\right)}{2\sum_{k=0}^{n^m-1} Y^2_{k,n}} = \frac{Y^2_{n^{m-1}} - y_0^2}{2\int_0^{n^{m-1}} Y_s^2\,ds + 2R_n} \\ &= \left(\frac{2\int_0^{n^{m-1}} Y_s^2\,ds}{Y^2_{n^{m-1}} - y_0^2} + 2\cdot\frac{R_n}{Y^2_{n^{m-1}} - y_0^2}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{\widehat{\theta}_{n^{m-1}}} + \frac{2R_n}{e^{2\theta n^{m-1}}}\cdot\frac{e^{2\theta n^{m-1}}}{Y^2_{n^{m-1}} - y_0^2}\right)^{-1} \to \theta, \quad \text{при } n\to\infty.\end{aligned}$$

Тут збіжність випливає з теореми 4.2, наслідка 4.3 та збіжності (4.26). □

4.3.3.2 Схема доведення теореми 4.3 у випадку ТДБРІІ

Доведення теореми 4.3 для ТДБРІІ відбувається за тим самим алгоритмом, як і у випадку ТДБР. Лема 4.6, що сформульована нижче, є аналогом до леми 4.4 для ТДБР $B^I_{H,\lambda}$. Єдиною вагомою різницею є використання нерівності (4.8) замість (4.6).

Тобто зараз, у випадку ТДБРІІ, використавши (4.8) з $p = 2$, отримуємо аналог нерівності (4.33):

$$\sup_{u\in[0,s]} |B^{II}_{H,\lambda}(u)| \le \left(s^{\frac{1}{2}}(\ln^+ s)^2 + 1\right)\xi, \quad \text{м.н.},$$

де $\xi \in \Xi$.

До того ж, використавши нерівність:

$$\ln^+ s \le C_\epsilon s^\epsilon, \quad \epsilon > 0,$$

та поклавши $\delta = \frac{1}{2} + 2\epsilon$, і включивши константу C_ϵ у випадкову величину $\xi \in \Xi$, приходимо до такого результату:

$$\sup_{u\in[0,s]} \left|B^{II}_{H,\lambda}(u)\right| \le \left(s^\delta + 1\right)\xi(\delta), \quad \text{м.н.} \tag{4.41}$$

На відміну від (4.33), обмеження в (4.41) виконується тільки для $\delta > \frac{1}{2}$. Проте, це обмеження не впливає на подальше доведення. Тоді аналог леми 4.4 може бути сформульований таким чином.

Лема 4.6. *Для будь-якого значення $\delta > \frac{1}{2}$ існує випадкова величина $\zeta \in \Xi$ така, що*

$$\sup_{0\le u\le s} |Y_u| \le \left(e^{\theta s} + s^{\delta}\right)\zeta, \tag{4.42}$$

та для будь-якого фіксованого значення $\alpha \in [0, \beta)$ і $s \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$

$$\sup_{\frac{k}{n}\le u\le s} |Y_u - Y_{k,n}| \le n^{-\alpha}\left(e^{\theta s} + s^{\delta}\right)\zeta. \tag{4.43}$$

Решта викладок для випадку ТДБРІІ аналогічні до випадку ТДБР.

4.4 Моделювання

Щоб перевірити та показати теоретичні результати, було досліджено поведінку оцінки $\widetilde{\theta}_n(m)$ для параметра зсуву для моделі Орнштейна-Уленбека керованою ТДБР та ТДБРІІ. Значення були згенеровані у мові програмування R.

Моделювання траєкторій ТДБР та ТДБРІІ спиралось на метод Девіса–Харта для генерування дробового броунівського руху. Цей метод був спершу запропонований в [27], а потім покращений у [32] та [115]. Алгоритм, у зручній для використання формі повністю описано в [31]. Метод Девіса–Харта використовує вкладення в циркулянтну матрицю та широко застосовується для моделювання ДБР. Цей алгоритм було адаптовано до ТДБР та ТДБРІІ, зокрема використано коваріаційні матриці цих процесів та властивість масштабування (4.3).

Для рівняння (4.22) було зафіксовано наступні значення констант: $y_0 = 1$, $\theta = 2$ і $\sigma = 1$. Для кожного типу темперованого дробового броунівського руху (ТДБР та ТДБРІІ) було розглянуто 18 комбінацій параметрів, де $\lambda \in \{0.05, 0.25, 0.5\}$ та $H \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.2, 1.4\}$.

Для кожного набору параметрів було згенеровано 1000 траєкторій. Для значення параметра m було розглянуто два варіанти: $m = 4/3$ і $m = 5/4$. У випадку $m = 4/3$ було згенеровано 1000 траєкторії для $n = 1000$, які мали 10000 точок з кроком 0.001. Потім з кожної такої траєкторії відбиралась кожна друга точка, та кожна четверта точка, таким чином було додатково отримано 1000 для $n = 500$ та $n = 250$. У випадку $m = 5/3$ спершу було згенеровано траєкторії, які мали 100000 точок для $n = 10000$ з кроком 0.00001. Аналогічно відбирались кожна друга та четверта точка для утворення траєкторії для $n = 5000$ та $n = 2500$.

При такому відборі у нових траєкторій змінювалася кількість точок та довжина горизонту для фіксованого m, значення для всіх випадків зібрано у таблиці 4.1.

Табл. 4.1. Параметри моделювання

$m = 4/3$				$m = 5/3$			
n	Діаметр n^{-1}	Кількість точок n^m	Відрізок $[0, n^{m-1}]$	n	Діаметр n^{-1}	Кількість точок n^m	Відрізок $[0, n^{m-1}]$
250	0.004	$\lceil 1250\sqrt[3]{2} \rceil$	$[0, 5\sqrt[3]{2}]$	2500	0.0004	$\lceil 12500\sqrt{2} \rceil$	$[0, 5\sqrt{2}]$
500	0.002	$\lceil 2500\sqrt[3]{4} \rceil$	$[0, 5\sqrt[3]{4}]$	5000	0.0002	$\lceil 25000\sqrt[3]{8} \rceil$	$[0, 5\sqrt[4]{8}]$
1000	0.001	10000	$[0, 10]$	10000	0.0001	100000	$[0, 10]$

У кожному випадку було обчислено 1000 оцінок $\widetilde{\theta}_n$, використовуючи формулу (4.28). Для кожного набору з 1000 оцінок було пораховано вибіркове середнє та стандартне відхилення. Одержані значення наведено у таблицях 4.2–4.5.

Результати моделювання підтверджують встановлені теоретичні факти. Вибіркове середнє прямує до істинного значення параметра, коли n зростає. Стандартні відхилення є досить близькими до нуля, що характерно для неергодичних моделей керованих дробовим шумом, а також, стандартне відхилення зменшується, коли n зростає.

4.5 Висновки

У даному розділі розглядаються темперований дробовий броунівський рух (ТДБР) і темперований дробовий броунівський рух другого року (ТДБРII) та темперована модель Орнштейна-Уленбека, у якій шумом є один з цих процесів.

Для даних темперованих ДБР встановлено оцінки зверху для дисперсій та їх приростів і оцінки зверху майже напевно для приростів даних процесів на невеликих інтервалах.

Для темперованої моделі Орнштейна-Уленбека розглянуто оцінку $\widehat{\theta}_T$ (4.25) для випадку неперервних спостережень та її модифікацію – оцінку $\widetilde{\theta}_n(m)$ (4.28) для випадку дискретних спостережень. Доведено, що обидві оцінки є строго конзистентними.

В рамках моделювального екперименту для ТДБР та ТДБРII побудовано та реалізовано алгоритм для їх генерування. А для моделі Орнштейна-Уленбека та її дискретної оцінки $\widehat{\theta}_T$ згенеровано значення розв'язків для 18 наборів даних та обчислено оцінки для кожного набору. Отримані значення вибіркових середніх та стандарних відхилень $\widehat{\theta}_T$ підтверджують строгу конзистентність даної оцінки.

Табл. 4.2. Вибіркове середнє $\widetilde{\theta}_n$ для $m = 4/3$

		ТДБР			ТДБРII		
H	n	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$
0.2	250	1.268788	1.268847	1.268858	1.268909	1.268859	1.268844
	500	1.592368	1.592369	1.592369	1.592372	1.592369	1.592368
	1000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000
0.4	250	1.268855	1.268877	1.268858	1.268857	1.268855	1.268857
	500	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369
	1000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000
0.6	250	1.268858	1.268855	1.268855	1.268853	1.268857	1.268853
	500	1.592369	1.592369	1.592369	1.592368	1.592369	1.592369
	1000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000
0.8	250	1.268847	1.268855	1.268856	1.268857	1.268857	1.268855
	500	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369
	1000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000
1.2	250	1.268866	1.268854	1.268856	1.268862	1.268834	1.268838
	500	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592368	1.592369
	1000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000
1.4	250	1.268857	1.268857	1.268856	1.268837	1.268859	1.268863
	500	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369	1.592369
	1000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000	2.002000

Табл. 4.3. Стандартне відхилення $\widetilde{\theta}_n$ для $m = 4/3$

		ТДБР			ТДБРІІ		
H	n	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$
0.2	250	$1.9997 \cdot 10^{-03}$	$3.5499 \cdot 10^{-04}$	$6.9153 \cdot 10^{-05}$	$1.6281 \cdot 10^{-03}$	$7.6248 \cdot 10^{-05}$	$3.4846 \cdot 10^{-04}$
	500	$4.3271 \cdot 10^{-05}$	$8.3467 \cdot 10^{-06}$	$1.0356 \cdot 10^{-05}$	$8.0224 \cdot 10^{-05}$	$2.8033 \cdot 10^{-06}$	$3.8018 \cdot 10^{-05}$
	1000	$6.2666 \cdot 10^{-07}$	$1.6395 \cdot 10^{-07}$	$9.3021 \cdot 10^{-08}$	$2.6986 \cdot 10^{-06}$	$5.6858 \cdot 10^{-08}$	$1.9929 \cdot 10^{-07}$
0.4	250	$6.5395 \cdot 10^{-05}$	$5.0709 \cdot 10^{-04}$	$5.2621 \cdot 10^{-05}$	$4.0962 \cdot 10^{-05}$	$5.9937 \cdot 10^{-05}$	$6.6379 \cdot 10^{-05}$
	500	$2.1335 \cdot 10^{-06}$	$2.1333 \cdot 10^{-05}$	$2.6852 \cdot 10^{-06}$	$1.6134 \cdot 10^{-06}$	$5.4587 \cdot 10^{-06}$	$3.0793 \cdot 10^{-06}$
	1000	$7.5702 \cdot 10^{-08}$	$1.1535 \cdot 10^{-07}$	$1.1471 \cdot 10^{-07}$	$5.1099 \cdot 10^{-08}$	$6.2280 \cdot 10^{-08}$	$6.9588 \cdot 10^{-08}$
0.6	250	$4.8083 \cdot 10^{-05}$	$2.6463 \cdot 10^{-05}$	$1.9945 \cdot 10^{-05}$	$9.0090 \cdot 10^{-05}$	$9.9179 \cdot 10^{-05}$	$1.0640 \cdot 10^{-04}$
	500	$6.1121 \cdot 10^{-06}$	$1.6543 \cdot 10^{-06}$	$1.5960 \cdot 10^{-06}$	$2.3875 \cdot 10^{-05}$	$2.1153 \cdot 10^{-06}$	$4.2449 \cdot 10^{-06}$
	1000	$9.3252 \cdot 10^{-08}$	$2.0269 \cdot 10^{-08}$	$3.9338 \cdot 10^{-08}$	$2.6170 \cdot 10^{-07}$	$2.7869 \cdot 10^{-08}$	$9.5062 \cdot 10^{-08}$
0.8	250	$4.1416 \cdot 10^{-04}$	$3.9851 \cdot 10^{-05}$	$1.5541 \cdot 10^{-05}$	$6.3931 \cdot 10^{-05}$	$8.0856 \cdot 10^{-05}$	$4.1361 \cdot 10^{-05}$
	500	$1.1347 \cdot 10^{-05}$	$1.7778 \cdot 10^{-06}$	$5.8001 \cdot 10^{-06}$	$2.4166 \cdot 10^{-06}$	$3.2078 \cdot 10^{-06}$	$1.1505 \cdot 10^{-05}$
	1000	$1.2129 \cdot 10^{-07}$	$3.4435 \cdot 10^{-08}$	$3.5659 \cdot 10^{-08}$	$1.7653 \cdot 10^{-07}$	$5.3886 \cdot 10^{-08}$	$1.0734 \cdot 10^{-07}$
1.2	250	$1.5651 \cdot 10^{-04}$	$1.4593 \cdot 10^{-04}$	$6.7546 \cdot 10^{-06}$	$1.1707 \cdot 10^{-04}$	$6.8233 \cdot 10^{-04}$	$4.3279 \cdot 10^{-04}$
	500	$5.0710 \cdot 10^{-06}$	$9.9194 \cdot 10^{-06}$	$2.8924 \cdot 10^{-07}$	$7.0722 \cdot 10^{-06}$	$2.9152 \cdot 10^{-05}$	$1.0933 \cdot 10^{-05}$
	1000	$1.9460 \cdot 10^{-07}$	$1.7918 \cdot 10^{-07}$	$5.9246 \cdot 10^{-09}$	$1.0615 \cdot 10^{-07}$	$2.2170 \cdot 10^{-07}$	$2.4456 \cdot 10^{-07}$
1.4	250	$1.0252 \cdot 10^{-04}$	$7.1823 \cdot 10^{-05}$	$6.2743 \cdot 10^{-06}$	$5.6380 \cdot 10^{-04}$	$7.4692 \cdot 10^{-05}$	$1.1007 \cdot 10^{-04}$
	500	$7.3125 \cdot 10^{-06}$	$1.1500 \cdot 10^{-05}$	$3.2318 \cdot 10^{-07}$	$2.2496 \cdot 10^{-05}$	$3.1634 \cdot 10^{-06}$	$4.0389 \cdot 10^{-06}$
	1000	$1.5571 \cdot 10^{-07}$	$2.1325 \cdot 10^{-07}$	$6.2200 \cdot 10^{-09}$	$9.3998 \cdot 10^{-07}$	$6.7855 \cdot 10^{-08}$	$8.1683 \cdot 10^{-08}$

Табл. 4.4. Вибіркове середнє $\widetilde{\theta}_n$ для $m = 5/4$

		ТДБР			ТДБРII		
H	n	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$
	2500	1.415258	1.415231	1.415229	1.415229	1.415230	1.415231
0.2	5000	1.682306	1.682304	1.682305	1.682305	1.682305	1.682304
	10000	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200
	2500	1.415230	1.415225	1.415241	1.415232	1.415228	1.415225
0.4	5000	1.682305	1.682305	1.682304	1.682305	1.682305	1.682305
	10000	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200
	2500	1.415231	1.414944	1.415231	1.415231	1.415230	1.415230
0.6	5000	1.682305	1.682281	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305
	10000	2.000200	2.000199	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200
	2500	1.415227	1.415231	1.415231	1.415232	1.415231	1.415230
0.8	5000	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305
	10000	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200
	2500	1.415236	1.415230	1.415230	1.415230	1.415229	1.415230
1.2	5000	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305
	10000	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200
	2500	1.415232	1.415231	1.415230	1.415231	1.415229	1.415230
1.4	5000	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305	1.682305
	10000	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200	2.000200

Табл. 4.5. Стандартне відхилення $\widetilde{\theta}_n$ для $m = 5/4$

		ТДБР			ТДБРII		
H	n	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.5$
0.2	2500	$8.4350 \cdot 10^{-04}$	$2.4394 \cdot 10^{-05}$	$4.9201 \cdot 10^{-05}$	$3.0249 \cdot 10^{-05}$	$1.8264 \cdot 10^{-05}$	$7.7357 \cdot 10^{-05}$
	5000	$3.5145 \cdot 10^{-05}$	$5.3186 \cdot 10^{-06}$	$5.9345 \cdot 10^{-06}$	$3.6694 \cdot 10^{-06}$	$1.7982 \cdot 10^{-06}$	$6.1008 \cdot 10^{-06}$
	10000	$2.0706 \cdot 10^{-06}$	$1.2148 \cdot 10^{-07}$	$5.4094 \cdot 10^{-07}$	$6.4181 \cdot 10^{-08}$	$8.2159 \cdot 10^{-08}$	$2.3023 \cdot 10^{-07}$
0.4	2500	$1.9432 \cdot 10^{-05}$	$1.5160 \cdot 10^{-04}$	$3.2868 \cdot 10^{-04}$	$3.2687 \cdot 10^{-05}$	$7.1024 \cdot 10^{-05}$	$1.2848 \cdot 10^{-04}$
	5000	$9.6117 \cdot 10^{-07}$	$4.4393 \cdot 10^{-06}$	$7.4030 \cdot 10^{-06}$	$1.3129 \cdot 10^{-06}$	$6.2374 \cdot 10^{-06}$	$3.6981 \cdot 10^{-06}$
	10000	$6.0144 \cdot 10^{-08}$	$4.5926 \cdot 10^{-07}$	$7.1825 \cdot 10^{-07}$	$1.2477 \cdot 10^{-07}$	$5.6128 \cdot 10^{-07}$	$2.7313 \cdot 10^{-07}$
0.6	2500	$6.8152 \cdot 10^{-06}$	$9.0504 \cdot 10^{-03}$	$2.1613 \cdot 10^{-05}$	$1.4843 \cdot 10^{-05}$	$1.8412 \cdot 10^{-05}$	$1.4553 \cdot 10^{-05}$
	5000	$8.6851 \cdot 10^{-07}$	$7.5915 \cdot 10^{-04}$	$4.7399 \cdot 10^{-06}$	$9.7171 \cdot 10^{-07}$	$1.6972 \cdot 10^{-06}$	$1.6803 \cdot 10^{-06}$
	10000	$7.4942 \cdot 10^{-08}$	$2.4013 \cdot 10^{-05}$	$6.8452 \cdot 10^{-08}$	$5.4407 \cdot 10^{-08}$	$1.1327 \cdot 10^{-07}$	$1.5761 \cdot 10^{-07}$
0.8	2500	$1.0037 \cdot 10^{-04}$	$1.9593 \cdot 10^{-05}$	$1.5725 \cdot 10^{-05}$	$6.8951 \cdot 10^{-05}$	$2.9703 \cdot 10^{-05}$	$1.2062 \cdot 10^{-05}$
	5000	$7.9395 \cdot 10^{-07}$	$1.2566 \cdot 10^{-06}$	$5.5416 \cdot 10^{-07}$	$7.1800 \cdot 10^{-06}$	$1.6409 \cdot 10^{-06}$	$5.9543 \cdot 10^{-07}$
	10000	$2.2371 \cdot 10^{-07}$	$7.3027 \cdot 10^{-08}$	$3.0269 \cdot 10^{-07}$	$1.0607 \cdot 10^{-07}$	$7.4764 \cdot 10^{-08}$	$3.9592 \cdot 10^{-08}$
1.2	2500	$1.8460 \cdot 10^{-04}$	$5.5355 \cdot 10^{-06}$	$4.1290 \cdot 10^{-06}$	$4.1102 \cdot 10^{-05}$	$3.1240 \cdot 10^{-05}$	$2.6083 \cdot 10^{-05}$
	5000	$2.6353 \cdot 10^{-05}$	$6.7311 \cdot 10^{-07}$	$1.1992 \cdot 10^{-07}$	$1.9263 \cdot 10^{-06}$	$3.5026 \cdot 10^{-06}$	$7.1713 \cdot 10^{-06}$
	10000	$1.2649 \cdot 10^{-06}$	$2.0003 \cdot 10^{-08}$	$1.7318 \cdot 10^{-08}$	$6.5946 \cdot 10^{-08}$	$1.8823 \cdot 10^{-07}$	$8.1930 \cdot 10^{-08}$
1.4	2500	$2.3036 \cdot 10^{-05}$	$8.3351 \cdot 10^{-06}$	$5.0158 \cdot 10^{-06}$	$1.7493 \cdot 10^{-05}$	$2.5415 \cdot 10^{-05}$	$7.3485 \cdot 10^{-06}$
	5000	$4.6750 \cdot 10^{-06}$	$8.6370 \cdot 10^{-07}$	$1.1373 \cdot 10^{-07}$	$1.6592 \cdot 10^{-06}$	$2.2547 \cdot 10^{-06}$	$7.1412 \cdot 10^{-07}$
	10000	$3.0744 \cdot 10^{-07}$	$3.8827 \cdot 10^{-08}$	$1.2423 \cdot 10^{-08}$	$7.9098 \cdot 10^{-08}$	$1.1680 \cdot 10^{-07}$	$2.0048 \cdot 10^{-08}$

Висновки

У дисертаційній роботі досліджено задачі статистичного оцінювання параметрів у моделях Васічека, Кокса – Інгерсолла – Росса та Орнштейна – Уленбека. Отримані результати мають переважно теоретичний характер і спрямовані на розвиток методів статистичного аналізу афінних дифузійних моделей. Основні результати дослідження полягають у такому:

1) досліджено нормовані суми дискретних спостережень розв'язку рівняння Васічека, нормовані суми їх квадратів та добутки сусідніх спостережень, доведено збіжність відповідних статистик та знайдено їх границі;
2) отримано границі нормованих дисперсій та коваріацій зазначених статистик;
3) побудовано оцінки всіх трьох параметрів моделі Васічека на основі дискретних спостережень, доведено їх строгу конзистентність і асимптотичну нормальність та встановлено асимптотичну коваріаційну матрицю;
4) досліджено асимптотичну поведінку інтегралів від розв'язку рівняння Кокса – Інгерсолла – Росса, отримано їх представлення через мартингали Ітo та встановлено спільну асимптотичну нормальність відповідних інтегралів;
5) доведено асимптотичну нормальність оцінки параметрів зсуву за узагальненим методом моментів у моделі Кокса – Інгерсолла – Росса за неперервними спостереженнями та встановлено її коваріаційну матрицю;
6) побудовано дискретний аналог зазначеної оцінки параметрів зсуву, доведено його строгу конзистентність і асимптотичну нормальність та встановлено відповідну коваріаційну матрицю;
7) отримано оцінки для дисперсій та приростів ТДБР і ТДБРІІ, а також встановлено асимптотичні оцінки зверху для приростів цих процесів;
8) доведено строгу конзистентність оцінки параметра зсуву типу найменших квадратів у моделях Орнштейна–Уленбека, керованих ТДБР та ТДБРІІ;

9) побудовано дискретний аналог оцінки параметра зсуву та доведено його строгу конзистентність;
10) для всіх розглянутих у роботі моделей проведено чисельні експерименти у середовищі програмування R, у межах яких змодельовано траєкторії відповідних процесів та обчислено побудовані оцінки параметрів для різних наборів значень параметрів; отримані результати моделювання підтвердили теоретичні висновки. Для моделей Орнштейна–Уленбека, керованих ТДБР та ТДБРІІ, додатково розроблено алгоритм моделювання відповідних темперованих дробових процесів.

Список використаних джерел

1. Випадкові процеси: теорія, статистика, застосування. 2-ге вид., випр. і допов. / Мішура Ю. С., Ральченко К. В., Сахно Л. М. і Шевченко Г. М. ВПЦ «Київський університет», 2024. С. 495.
2. Приходько О. Д., Ральченко К. В. Асимптотичні властивості оцінок параметрів моделі Васічека за дискретними спостереженнями // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2023». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2023. С. 47.
3. Aït-Sahalia Y. Likelihood inference for diffusions: a survey // Frontiers in statistics. Imp. Coll. Press, London, 2006. P. 369–405.
4. Alfonsi A. Affine Diffusions and Related Processes: Simulation, Theory and Applications. Springer and Bocconi University Press, 2015. Vol. 6 of Bocconi & Springer Series. P. xiv+252.
5. Arcones M. A. Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary Gaussian sequence of vectors // Ann. Probab. 1994. Vol. 22, no. 4. P. 2242–2274.
6. Asymptotic growth of trajectories of multifractional Brownian motion, with statistical applications to drift parameter estimation / Dozzi M., Kozachenko Y., Mishura Y., and Ralchenko K. // Stat. Inference Stoch. Process. 2018. Vol. 21, no. 1. P. 21–52.
7. Asymptotic theory for estimating drift parameters in the fractional Vasicek model. Vol. 35.
8. Asymptotic theory for rough fractional Vasicek models // Economics Letters. 2019. Vol. 177. P. 26–29.

9. Azmoodeh E., Mishura Y., Sabzikar F. How does tempering affect the local and global properties of fractional Brownian motion? // J. Theoret. Probab. 2022. Vol. 35, no. 1. P. 484–527.

10. Belfadli R., Es-Sebaiy K., Ouknine Y. Parameter estimation for fractional Ornstein–Uhlenbeck processes: non-ergodic case // Frontiers in Science and Engineering. 2011. Vol. 1, no. 1. P. 1–16.

11. Ben Alaya M., Kebaier A. Parameter Estimation for the Square-root Diffusions: Ergodic and Nonergodic Cases // Stoch. Models. 2012. Vol. 28, no. 4. P. 609–634.

12. Ben Alaya M., Kebaier A. Asymptotic Behavior of the Maximum Likelihood Estimator for Ergodic and Nonergodic Square-root Diffusions // Stoch. Anal. Appl. 2013. Vol. 31, no. 4. P. 552–573.

13. Billingsley P. Probability and Measure. Third edition. A Wiley-Interscience Publication. JOHN WILEY & SONS, 1995. P. 608.

14. Bishwal J. P. N. Parameter Estimation in Stochastic Differential Equations. Springer, Berlin, 2008. Vol. 1923 of Lecture Notes in Mathematics. P. xiv+264.

15. Bishwal J. P. N. Minimum contrast estimation in fractional Ornstein–Uhlenbeck process: Continuous and discrete sampling // Fract. Calc. Appl. Anal. 2011. Vol. 14. P. 375–410.

16. Bojdecki T., Gorostiza L. G., Talarczyk A. Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times. // Stat. Probab. Lett. 2004. Vol. 69, no. 4. P. 405–419.

17. Boniece B. C., Didier G., Sabzikar F. Tempered fractional Brownian motion: wavelet estimation, modeling and testing // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2021. Vol. 51. P. 461–509.

18. Brown B. M., Hewitt J. I. Asymptotic likelihood theory for diffusion processes // J. Appl. Probability. 1975. Vol. 12. P. 228–238.

19. Cheng Y., Hufnagel N., Masuda H. Estimation of Ergodic Square-root Diffusion under High-frequency Sampling // Econometrics and Statistics. 2022.

20. Cheridito P., Kawaguchi H., Maejima M. Fractional Ornstein-Uhlenbeck processes // Electron. J. Probab. 2003. Vol. 8. P. no. 3, 1–14.

21. Chronopoulou A., Viens F. Stochastic volatility and option pricing with long-memory in discrete and continuous time // Quantitative Finance. 2012. Vol. 12, no. 4. P. 635–649.

22. Chronopoulou A., Viens F. G. Estimation and pricing under long-memory stochastic volatility // Annals of Finance. 2012. Vol. 8, no. 2-3. P. 379–403.

23. Comte F., Coutin L., Renault E. Affine fractional stochastic volatility models // Annals of Finance. 2012. Vol. 8, no. 2-3. P. 337–378.

24. Consistency of the drift parameter estimator for the discretized fractional Ornstein–Uhlenbeck process with Hurst index $H \in (0, \frac{1}{2})$ / Kubilius K., Mishura Y., Ralchenko K., and Seleznjev O. // Electron. J. Stat. 2015. Vol. 9, no. 2. P. 1799–1825.

25. Cox J. C., Ingersoll Jr. J. E., Ross S. A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates // Econometrica. 1985. Vol. 53, no. 2. P. 385–407.

26. Dacunha-Castelle D., Florens-Zmirou D. Estimation of the coefficients of a diffusion from discrete observations // Stochastics. 1986. Vol. 19, no. 4. P. 263–284.

27. Davies R. B., Harte D. S. Tests for Hurst effect // Biometrika. 1987. Vol. 74, no. 1. P. 95–101.

28. De Rossi G. Maximum Likelihood Estimation of the Cox–Ingersoll–Ross Model Using Particle Filters // Computational Economics. 2010. Vol. 36, no. 1. P. 1–16.

29. Deelstra G., Delbaen F. Long-term Returns in Stochastic Interest Rate Models // Insurance Math. Econom. 1995. Vol. 17, no. 2. P. 163–169.

30. Dehtiar O., Mishura Y., Ralchenko K. Two Methods of Estimation of the Drift Parameters of the Cox-Ingersoll-Ross process: Continuous Observations // Comm. Statist. Theory Methods. 2022. Vol. 51, no. 19. P. 6818–6833.

31. Dieker T. Simulation of fractional Brownian motion : Master's thesis ; Department of Mathematical Sciences, University of Twente. 2004. Access mode: www.columbia.edu/ad3217/fbm/thesisold.pdf.

32. Dietrich C. R., Newsam G. N. Fast and exact simulation of stationary Gaussian processes through circulant embedding of the covariance matrix // SIAM J. Sci. Comput. 1997. Vol. 18, no. 4. P. 1088–1107.

33. El Machkouri M., Es-Sebaiy K., Ouknine Y. Least squares estimator for non-ergodic Ornstein–Uhlenbeck processes driven by Gaussian processes // J. Korean Statist. Soc. 2016. Vol. 45, no. 3. P. 329–341.

34. El-Nouty C., Zili M. On the sub-mixed fractional Brownian motion // Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B. 2015. Vol. 30, no. 1. P. 27–43.

35. Es-Sebaiy K. Berry-Esséen bounds for the least squares estimator for discretely observed fractional Ornstein–Uhlenbeck processes // Stat. Probab. Lett. 2013. Vol. 83, no. 10. P. 2372–2385.

36. Es-Sebaiy K., Es.Sebaiy M. Estimating drift parameters in a non-ergodic Gaussian Vasicek-type model // Stat. Methods Appl. 2021. Vol. 30, no. 2. P. 409–436.

37. Fan J. A selective overview of nonparametric methods in financial econometrics // Statist. Sci. 2005. Vol. 20, no. 4. P. 317–357.

38. Florens-Zmirou D. Approximate discrete-time schemes for statistics of diffusion processes // Statistics. 1989. Vol. 20, no. 4. P. 547–557.

39. Göing-Jaeschke A., Yor M. A Survey and Some Generalizations of Bessel Processes // Bernoulli. 2003. Vol. 9, no. 2. P. 313–349.

40. Hao R., Liu Y., Wang S. Pricing credit default swap under fractional Vasicek interest rate model // Journal of Mathematical Finance. 2014. Vol. 4, no. 1. P. 10 – 20.

41. Heston S. L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // The Review of Financial Studies. 1993. Vol. 6, no. 2. P. 327–343.

42. Heyde C. C. Quasi-likelihood and Its Application. A General Approach to Optimal Parameter Estimation. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1997. P. x+235.

43. Houdré C., Villa J. An example of infinite dimensional quasi-helix // Stochastic models (Mexico City, 2002). Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003. Vol. 336 of Contemp. Math. P. 195–201.

44. Hu Y., Nualart D. Parameter estimation for fractional Ornstein–Uhlenbeck processes // Statistics and Probability Letters. 2010. Vol. 80, no. 11–12. P. 1030–1038.

45. Hu Y., Nualart D., Zhou H. Parameter estimation for fractional Ornstein–Uhlenbeck processes of general Hurst parameter // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2017.

46. Hu Y., Song J. Parameter estimation for fractional Ornstein–Uhlenbeck processes with discrete observations // Malliavin calculus and stochastic analysis. A Festschrift in honor of David Nualart. New York, NY: Springer, 2013. P. 427–442.

47. Iacus S. M. Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations. With R Examples. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2008. P. xviii+284.

48. Isserlis L. On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables // Biometrika. 1918. Vol. 12, no. 1/2. P. 134–139.

49. Jacod J., Shiryaev A. N. Limit Theorems for Stochastic Processes. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Vol. 288 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. P. xviii+601.

50. Kladívko K. Maximum Likelihood Estimation of the Cox–Ingersoll–Ross Process: the Matlab Implementation // Technical Computing Prague. 2007. Vol. 7.

51. Kleptsyna M. L., Le Breton A. Statistical analysis of the fractional Ornstein–Uhlenbeck type process // Statist. Inference Stoch. Process. 2002. Vol. 5. P. 229–248.

52. Kozachenko Y., Melnikov A., Mishura Y. On drift parameter estimation in models with fractional Brownian motion // Statistics. 2015. Vol. 49, no. 1. P. 35–62.

53. Kubilius K., Mishura Y., Ralchenko K. Parameter estimation in fractional diffusion models. Bocconi University Press, [Milan]; Springer, Cham, 2017. Vol. 8 of Bocconi & Springer Series. P. xix+390.

54. Kubilius K., Mishura Y., Ralchenko K. Parameter estimation in fractional diffusion models. Bocconi University Press; Springer, 2017. Vol. 8 of Bocconi & Springer Series. P. xix+390.

55. Kutoyants Y. A. Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2004. P. xiv+481.

56. Le Breton A. On continuous and discrete sampling for parameter estimation in diffusion type processes // Mathematical Programming Study. 1976. no. 5. P. 124–144.

57. Leonenko N. N., Meerschaert M. M., Sikorskii A. Correlation structure of fractional Pearson diffusions // Comput. Math. Appl. 2013. Vol. 66, no. 5. P. 737–745.

58. Leonenko N. N., Meerschaert M. M., Sikorskii A. Fractional Pearson diffusions // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 403, no. 2. P. 532–546.

59. Lim S., Eab C. H. Tempered fractional Brownian motion revisited via fractional Ornstein-Uhlenbeck processes // arXiv preprint arXiv:1907.08974. 2019.

60. Liptser R. S., Shiryaev A. N. Statistics of random processes. I, II. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Vol. 5, 6 of Applications of Mathematics (New York).

61. Lohvinenko S., Ralchenko K., Zhuchenko O. Asymptotic properties of parameter estimators in fractional Vasicek model // Lithuanian Journal of Statistics. 2016. Vol. 55, no. 1. P. 102–111.

62. Lohvinenko S. S., Ralchenko K. V. Maximum likelihood estimation in the fractional Vasicek model // Lithuanian Journal of Statistics. 2017. Vol. 56. P. 77–87.

63. Lohvinenko S. S., Ralchenko K. V. Asymptotic distribution of the maximum likelihood estimator in the fractional Vasicek model // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2019. Vol. 99. P. 149–168.

64. Lohvinenko S. S., Ralchenko K. V. Maximum likelihood estimation in the non-ergodic fractional Vasicek model // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2019. Vol. 6, no. 3. P. 377–395.

65. Macioszek K., Sabzikar F., Burnecki K. Testing of tempered fractional Brownian motions // arXiv preprint arXiv:2504.11906. 2025.

66. Marie N. A generalized mean-reverting equation and applications // ESAIM Probab. Stat. 2014. Vol. 18. P. 799–828.

67. Meerschaert M. M., Sabzikar F. Tempered fractional Brownian motion // Statist. Probab. Lett. 2013. Vol. 83, no. 10. P. 2269–2275.

68. Meerschaert M. M., Sabzikar F. Stochastic integration for tempered fractional Brownian motion // Stochastic Process. Appl. 2014. Vol. 124, no. 7. P. 2363–2387.

69. Melnikov A., Mishura Y., Shevchenko G. Stochastic viability and comparison theorems for mixed stochastic differential equations // Methodol. Comput. Appl. Probab. 2015. Vol. 17, no. 1. P. 169–188.

70. Mishura Y. Standard maximum likelihood drift parameter estimator in the homogeneous diffusion model is always strongly consistent // Statist. Probab. Lett. 2014. Vol. 86. P. 24–29.

71. Mishura Y., Ralchenko K. Drift parameter estimation in the models involving fractional Brownian motion // Modern problems of stochastic analysis and statistics. Springer, Cham, 2017. Vol. 208 of Springer Proc. Math. Stat. P. 237–268.

72. Mishura Y., Ralchenko K. Asymptotic growth of sample paths of tempered fractional Brownian motions, with statistical applications to Vasicek-type models // Fractal and Fractional. 2024. Vol. 8, no. 2. P. 79.

73. Mishura Y., Ralchenko K., Dehtiar O. Parameter Estimation in CKLS Model by Continuous Observations // Statist. Probab. Lett. 2022. Vol. 184. P. Paper No. 109391, 10.

74. Mishura Y., Ralchenko K., Dehtiar O. Asymptotic properties of parameter estimators in Vasicek model driven by tempered fractional Brownian motion // Austrian J. Statist. 2025. Vol. 54. P. 61–81.

75. Mishura Y., Ralchenko K., Shklyar S. Gaussian Volterra processes: asymptotic growth and statistical estimation // Theory Probab. Math. Statist. 2023. no. 108. P. 149–167.

76. Mishura Y., Shevchenko G. Theory and statistical applications of stochastic processes. ISTE, London, 2017. P. 373.

77. Mishura Y., Yurchenko-Tytarenko A. Fractional Cox–Ingersoll–Ross process with non-zero “mean” // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2018. Vol. 5, no. 1. P. 99–111.

78. Mishura Y., Yurchenko-Tytarenko A. Fractional Cox–Ingersoll–Ross process with small Hurst indices // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2018. Vol. 6, no. 1. P. 13–39.

79. Mishura Y., Zili M. Stochastic analysis of mixed fractional Gaussian processes. ISTE Press, London; Elsevier Ltd, Oxford, 2018. P. xvi+194. ISBN: 978-1-78548-245-8.

80. Mishura Y. S. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Vol. 1929 of Lecture Notes in Mathematics. P. xviii+393. ISBN: 978-3-540-75872-3.

81. Nielsen J. N., Madsen H., Young P. C. Parameter estimation in stochastic differential equations: an overview // Annual Reviews in Control. 2000. Vol. 24. P. 83–94.

82. Novikov A. A. Sequential estimation of the parameters of diffusion processes // Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1972. Vol. 12, no. 5. P. 812–818.

83. Overbeck L., Rydén T. Estimation in the Cox–Ingersoll–Ross Model // Econometric Theory. 1997. Vol. 13, no. 3. P. 430–461.

84. Peltier R.-F., Lévy Véhel J. Multifractional Brownian motion: definition and preliminary results // INRIA research report, vol. 2645. 1995.

85. Prakasa Rao B. L. S. Asymptotic Theory of Statistical Inference. New York : Wiley, 1987.

86. Prakasa Rao B. L. S. Statistical inference from sampled data for stochastic processes // Statistical inference from stochastic processes (Ithaca, NY, 1987). Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988. Vol. 80 of Contemp. Math. P. 249–284.

87. Prakasa Rao B. L. S. Statistical inference for fractional diffusion processes. Chichester: John Wiley & Sons, 2010. P. xii + 252. ISBN: 978-0-470-66568-8/hbk; 978-0-470-66712-5/ebook.

88. Prykhodko O., Ralchenko K. Estimation of all parameters in the Vasicek model by low-frequency data // Математика та математичне моделювання у сучасному технічному університеті. [Електронний ресурс]: Збірник тез доповідей І Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих вчених. Луцьк, Україна : Луцьк: ДонНТУ. 2022. С. 62–63.

89. Prykhodko O., Ralchenko K. Strongly consistent estimation of all parameters in the Vasicek model by discrete observations // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. 2022. no. 4. P. 26–30.

90. Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic behavior of estimators for all parameters in the Vasicek model by discrete observations // Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2023» : Book of abstracts. Kyiv, Ukraine : Taras Shevchenko National University of Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. 2023. P. 47.

91. Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic behavior of the parameter estimators in the Vasicek model based on discrete observations // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. 2023. Access mode: https://www.imath.kiev.ua/young/youngconf2023/Abstracts2023/PS/Prykhodko-Ralchenko.pdf.

92. Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic normality of estimators for all parameters in the Vasicek model by discrete observations // XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського : Тези доповідей. Київ, Україна : КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2023. С. 144–145.

93. Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic behavior of discrete estimators for drift parameters in the Cox-Ingersoll-Ross model // Матеріали XXII Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2024». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2024. С. 45–46.

94. Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic normality of estimators for all parameters in the Vasicek model by discrete observations // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2024. Vol. 111. P. 123 – 135.

95. Prykhodko O., Ralchenko K. Drift parameters estimation in the Cox–Ingersoll–Ross model // Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2024» : Book of abstracts. Kyiv, Ukraine : Taras Shevchenko National University of Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. 2024. P. 80.

96. Prykhodko O., Ralchenko K. Strong consistency of discrete estimators for drift parameters in the Cox-Ingersoll-Ross model // XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, Київ, 9-11 травня 2024 р. : [збірник тез /оргком.: Глибовець А. М. та ін.]. Київ, Україна : "Національний університет Києво-Могилянська академія"[та ін.]. - [Київ : б. в.]. 2024. С. 41–42.

97. Prykhodko O., Ralchenko K. Almost sure bounds for increments of tempered fractional Brownian motion with statistical applications // XX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука: Тези доповідей. Київ, Україна : КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2025. С. 138–139.

98. Prykhodko O., Ralchenko K. Discretization and Asymptotic Normality of Drift Parameters Estimator in the Cox-Ingersoll-Ross Model // Austrian Journal of Statistics. 2025. Vol. 54, no. 1. P. 82 – 99.

99. Prykhodko O., Ralchenko K. Strong consistency of drift parameter estimator in the Langevin equation driven by tempered fractional Brownian motion // Матеріали XXIII Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2025». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2025. С. 43–44.

100. Prykhodko O., Ralchenko K. Strongly consistent estimation of drift parameter in tempered fractional Ornstein-Uhlenbeck process // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. 2025. Access mode: https://www.imath.kiev.ua/young/youngconf2025/abstracts/Prykhodko-Ralchenko.pdf.

101. Prykhodko O., Ralchenko K. Drift parameter estimation for tempered fractional Ornstein–Uhlenbeck processes based on discrete observations // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2026. Vol. 13, no. 2. P. 169 – 194.

102. Rate of Convergence of Discretized Drift Parameters Estimators in the Cox–Ingersoll–Ross Model / Chernova O., Dehtiar O., Mishura Y., and Ralchenko K. // Comm. Statist. Theory Methods. 2024. Vol. 53, no. 13. P. 4857–4879.

103. Sabzikar F., Surgailis D. Tempered fractional Brownian and stable motions of second kind // Statist. Probab. Lett. 2018. Vol. 132. P. 17–27.

104. Serfling R. J. Approximation Theorems of Mathematical Statistics. A Wiley-lnterscience Publication. JOHN WILEY & SONS, INC, 2002. P. 400.

105. Song L., Li K. Pricing option with stochastic interest rates and transaction costs in fractional Brownian markets // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2018. Vol. 2018. P. Article ID 7056734, 8 pages.

106. Sørensen H. Parametric inference for diffusion processes observed at discrete points in time: a survey // International Statistical Review. 2004. Vol. 72, no. 3. P. 337–354.

107. Sullivan M. A. Discrete-time continuous-state interest rate models // J. Econom. Dynam. Control. 2001. Vol. 25, no. 6-7. P. 1001–1017.

108. Tanaka K. Distributions of the maximum likelihood and minimum contrast estimators associated with the fractional Ornstein–Uhlenbeck process // Stat. Inference Stoch. Process. 2013. Vol. 16. P. 173–192.

109. Tanaka K. Maximum likelihood estimation for the non-ergodic fractional Ornstein–Uhlenbeck process // Stat. Inference Stoch. Process. 2015. Vol. 18, no. 3. P. 315–332.

110. Tanaka K., Xiao W., Yu J. Maximum likelihood estimation for the fractional Vasicek model // Econometrics. 2020. Vol. 8, no. 3.

111. Tang C. Y., Chen S. X. Parameter Estimation and Bias Correction for Diffusion Processes // J. Econometrics. 2009. Vol. 149, no. 1. P. 65–81.

112. Tudor C. A., Viens F. G. Statistical aspects of the fractional stochastic calculus // The Annals of Statistics. 2007. Vol. 35, no. 3. P. 1183–1212.

113. Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure // Journal of financial economics. 1977. Vol. 5, no. 2. P. 177–188.

114. Withers C. The moments of the multivariate normal // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1985. Vol. 32, no. 1. P. 103–107.

115. Wood A. T. A., Chan G. Simulation of stationary Gaussian processes in $[0, 1]^d$ // J. Comput. Graph. Statist. 1994. Vol. 3, no. 4. P. 409–432.

116. Xiao W., Zhang W., Xu W. Parameter estimation for fractional Ornstein–Uhlenbeck processes at discrete observation // Applied Mathematical Modelling. 2011. Vol. 35. P. 4196–4207.

117. Yoshida N. Estimation for Diffusion Processes from Discrete Observation // J. Multivariate Anal. 1992. Vol. 41, no. 2. P. 220–242.

118. Zili M. On the mixed fractional Brownian motion // J. Appl. Math. Stoch. Anal. 2006. P. Art. ID 32435, 9.

119. Zili M. Generalized fractional Brownian motion // Mod. Stoch. Theory Appl. 2017. Vol. 4, no. 1. P. 15–24.

Додаток А

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1) Prykhodko O., Ralchenko K. Strongly consistent estimation of all parameters in the Vasicek model by discrete observations // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. 2022. no. 4. P. 26–30.
2) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic normality of estimators for all parameters in the Vasicek model by discrete observations // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2024. Vol. 111. P. 123 – 135.
3) Prykhodko O., Ralchenko K. Discretization and Asymptotic Normality of Drift Parameters Estimator in the Cox-Ingersoll-Ross Model // Austrian Journal of Statistics. 2025. Vol. 54, no. 1. P. 82 – 99.
4) Prykhodko O., Ralchenko K. Drift parameter estimation for tempered fractional Ornstein–Uhlenbeck processes based on discrete observations // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2026. Vol. 13, no. 2. P. 169 – 194.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1) Prykhodko O., Ralchenko K. Estimation of all parameters in the Vasicek model by low-frequency data // Математика та математичне моделювання у сучасному технічному університеті. [Електронний ресурс]: Збірник тез доповідей І Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих вчених. Луцьк, Україна : Луцьк: ДонНТУ. 2022. С. 62–63.
2) Приходько О. Д., Ральченко К. В. Асимптотичні властивості оцінок параметрів моделі Васічека за дискретними спостереженнями // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2023». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2023. С. 47.
3) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic behavior of the parameter estimators in the Vasicek model based on discrete observations // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. 2023. Access mode: https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Prykhodko-Ralchenko.pdf.
4) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic normality of estimators for all parameters in the Vasicek model by discrete observations // XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського : Тези доповідей. Київ, Україна : КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2023. С. 144–145.
5) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic behavior of estimators for all parameters in the Vasicek model by discrete observations // Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2023» : Book of abstracts. Kyiv, Ukraine : Taras Shevchenko National University of Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. 2023. P. 47.
6) Prykhodko O., Ralchenko K. Asymptotic behavior of discrete estimators for drift parameters in the Cox-Ingersoll-Ross model // Матеріали XXII Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2024». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2024. С. 45–46.
7) Prykhodko O., Ralchenko K. Strong consistency of discrete estimators for drift parameters in the Cox-Ingersoll-Ross model // XII Всеукраїнська наукова

конференція молодих математиків, Київ, 9-11 травня 2024 р. : [збірник тез /оргком.: Глибовець А. М. та ін.]. Київ, Україна : "Національний університет Києво-Могилянська академія"[та ін.]. - [Київ : б. в.]. 2024. С. 41–42.

8) Prykhodko O., Ralchenko K. Drift parameters estimation in the Cox–Ingersoll–Ross model // Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2024» : Book of abstracts. Kyiv, Ukraine : Taras Shevchenko National University of Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. 2024. P. 80.
9) Prykhodko O., Ralchenko K. Strong consistency of drift parameter estimator in the Langevin equation driven by tempered fractional Brownian motion // Матеріали XXIII Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2025». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2025. С. 43–44.
10) Prykhodko O., Ralchenko K. Strongly consistent estimation of drift parameter in tempered fractional Ornstein-Uhlenbeck process // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. 2025. Access mode: https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2025/abstracts/Prykhodko-Ralchenko.pdf.
11) Prykhodko O., Ralchenko K. Almost sure bounds for increments of tempered fractional Brownian motion with statistical applications // XX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука: Тези доповідей. Київ, Україна : КПІ ім. Ігоря Сікорського. 2025. С. 138–139.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції

1) I Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих вчених «Математика та математичне моделювання у сучасному технічному університеті», 30 листопада, 2022, Луцьк, Україна;
2) XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023», 14 квітня, 2023, Київ, Україна;
3) International Conference of Young Mathematicians, June 1–3, 2023, Kyiv, Ukraine;
4) XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського, 11–12 жовтня 2023, Київ, Україна;

5) Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2023», December 26-27, 2023, Kyiv, Ukraine;
6) XXII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2024», 11 квітня, 2024, Київ, Україна;
7) XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, 9-11 травня, 2024, Київ, Україна;
8) Ukraine Mathematics Conference At the End of the Year 2024, December 16-18, 2024, Kyiv, Ukraine;
9) XXIII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2025», 10 квітня, 2025, Київ, Україна;
10) International Conference of Young Mathematicians, June 4–6, 2025, Kyiv, Ukraine;
11) XX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 17–20 листопада, 2025, Київ, Україна.

Семінари

1) Аспірантський воркшоп з теорії ймовірностей, 4 лютого 2026 року, кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету та кафедра дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
2) Науковий семінар, 12 березня 2026 року, кафедра теорії ймовірностей статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет,Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;
3) Семінар "Асимптотичні методи в статистиці 18 березня 2026 року.

Додаток Б

Допоміжні теореми

Дельта-метод

Теорема Б.1 ([54, теорема B.6], [104, теорема 3.3A]). *Нехай* $\mathbf{X}_n = (X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(d)})$ – *послідовність* d*-вимірних випадкових векторів. Припустимо, що при* $n \to \infty$

$$\frac{X_n - \mu}{b_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

де Σ *це коваріаційна матриця і* $b_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Нехай* $g(x) = (g_1(x), ..., g_m(x))$, $x = (x_1, ..., x_d)$ *векторнозначна функція, для якої кожен компонент функції* $g_i(x)$ ϵ *дійснозначною функцією і має ненульовий диференціал* $g_i(\mu; t), t = (t_1, ..., t_d)$, *при* $x = \mu$. *Позначимо*

$$D = \left[\left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{x=\mu} \right]_{m \times d}.$$

Тоді

$$\frac{g(X_n) - g(\mu)}{b_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, D\Sigma D') \text{ при } n \to \infty.$$

Центральна гранична теорема для стаціонарних векторів

Теорема Б.2 ([5, теорема 2]). *Нехай* $\{\mathbf{X}_j = (X_j^{(1)}, \ldots, X_j^{(d)}), j \geq 0\}$ – *стаціонарна гауссова послідовність* $\mathbb{R}^d$*-значних векторів з нульовим середнім. Нехай* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *функція з* $\mathbb{E}\left[f^2(\mathbf{X}_0)\right] < \infty$. *Позначимо*

$$r^{(p,q)}(k) = \mathbb{E}\left[X_0^{(p)} X_k^{(q)}\right]$$

для $k \in \mathbb{Z}$ *і* $1 \leq p, q \leq d$. *Припустимо, що*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j,k=0}^{n-1} r^{(p,q)}(j-k) \quad і \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j,k=0}^{n-1} \left(r^{(p,q)}(j-k)\right)^2$$

існує для кожного $1 \le p, q \le d$. *Тоді*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \left(f(\mathbf{X}_j) - \mathbb{E} f(\mathbf{X}_j) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right),$$

де

$$\sigma^2 := \mathbb{E}\left[\left(f(\mathbf{X}_0) - \mathbb{E} f(\mathbf{X}_0) \right)^2 \right] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(f(\mathbf{X}_0) - \mathbb{E} f(\mathbf{X}_0) \right) \left(f(\mathbf{X}_k) - \mathbb{E} f(\mathbf{X}_k) \right) \right].$$

Теорема Крамера-Вольда

Теорема Б.3 ([13, теорема 29.4]). *Для випадкових векторів* $\mathbf{X}_n = (X_{n1}, \ldots, X_{nk})$ *і* $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_k)$ *необхідна та достатня умова для* $X_n \xrightarrow{d} Y$ *це* $\sum_{u=1}^{k} t_u X_{nu} \xrightarrow{d} \sum_{u=1}^{k} t_u Y_u$ *для всіх* $(t_1, ..., t_k)$ *з* $\mathbb{R}^k$

Теорема Слуцького

Теорема Б.4 ([54, теорема B.5]). *Нехай* $\{X_n, n \ge 1\}$ *і* $\{Y_n, n \ge 1\}$ *– це послідовності випадкових векторів з* $\mathbb{R}^d$ *і* $\mathbb{R}^k$ *відповідно такі, що* $X_n \xrightarrow{d} X$ *і* $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} C$ *при* $n \to \infty$, *де* C *– це сталий вектор, тоді*

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, C), n \to \infty.$$

Зокрема, для будь-якої неперервної функції $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$,

$$f(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} f(X, C), n \to \infty.$$

Асимптотичний ріст для центрованого гауссового процесу

Нехай $\{b_k, k \ge 0\}$ – зростаюча послідовсть така, що $b_0 = 0$, $b_{k+1} - b_k \ge 1$ і $b_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Нехай $a(t) > 0$ неперервна та зростаюча функція і позначимо $a_k := a(b_k)$.

Нехай для фіксованих значень $\Delta > 0$ множини $\mathbf{T}_\Delta$, $\mathbf{T}_{b_k, b_{k+1}, \Delta}$ та метрика $d(\mathbf{t}, \mathbf{s})$ будуть визначені, як у формулах (4.10), (4.11) та (4.12) відповідно.

Теорема Б.5 ([53, теорема B.34]). *Нехай* $0 < \Delta \le 2(b_{k+1} - b_k)$ *для всіх значень* $k \ge 0$ *та* $X = \{X(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbf{T}_\Delta\}$ *центрований гауссовий процес, що задовольняє наступні умови:*

(i) Максимальне стандартне відхилення на кожній множині обмежене:

$$m_k := m(\mathbf{T}_{b_k,b_{k+1},\Delta}) = \sup_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}_{b_k,b_{k+1},\Delta}} \left(\mathbb{E}[X(\mathbf{t})^2]\right)^{1/2} < \infty.$$

(ii) Існують константи $\beta \in (0,1]$ та $c_k > 0$ такі, що

$$\sup_{\substack{d(\mathbf{t},\mathbf{s})\le h \\ \mathbf{t},\mathbf{s}\in\mathbf{T}_{b_k,b_{k+1},\Delta}}} \left(\mathbb{E}\left[(X(\mathbf{t}) - X(\mathbf{s}))^2\right]\right)^{1/2} \le c_k h^{\beta}.$$

(iii) Збігається наступні ряди:

$$A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{a_k} < \infty, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k \ln(b_{k+1} - b_k)}{a_k} < \infty,$$

та для деякого значення $\gamma \in (0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k^{1-2\gamma/\beta}\, c_k^{2\gamma/\beta}}{a_k} < \infty.$$

Тоді для будь-яких значень $\vartheta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,\beta)$ і $\rho > 0$, маємо:

$$\mathbb{E}\exp\left\{\rho \sup_{\mathbf{t}\in\mathbf{T}_\Delta} \frac{|X(\mathbf{t})|}{a(t_1)}\right\} \le \exp\left\{\frac{\rho^2 A^2}{2(1-\vartheta)^2}\right\} \cdot A_0(\vartheta,\gamma,\varepsilon),$$

де

$$A_0(\vartheta,\gamma,\varepsilon) = \frac{2^{2/\varepsilon+2}}{\Delta} \exp\left\{\frac{1}{A}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k \ln(b_{k+1}-b_k)}{a_k}\right\} \times \exp\left\{\frac{\Delta^{2\gamma}}{\gamma A \left(1-\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{2\gamma/\varepsilon} \vartheta^{2\gamma/\beta} 4^{2\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k^{2\gamma/\beta} m_k^{1-2\gamma/\beta}}{a_k}\right\}.$$

Багатовимірна центральна гранична теорема для неперервних мартингалів

Деякі результати щодо асимптотичної нормальності, отримані в цій роботі, ґрунтуються на багатовимірній центральній граничній теоремі для неперервних мартингалів, у якій гранична коваріаційна матриця визначається асимптотичною поведінкою квадратичної варіації.

Теорема Б.6 ([42, Теорема 12.6]). *Нехай маємо ймовірнісний простір* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *з фільтрацією* $(\mathcal{F}_t)$*, що задовольняє стандартні умови, а* $\{M_t, t \geq 0\}$ *— p-вимірний неперервний локально квадратично інтегровний мартингал відносно фільтрації* $(\mathcal{F}_t)$ *та* $M_0 = 0$*. Нехай* $\langle M \rangle_t$ *позначає його матрицю квадратичної варіації. Припустимо, що*

$$\frac{1}{t} \langle M \rangle_t \xrightarrow{\mathbb{P}} \Sigma, \quad t \to \infty,$$

де Σ *— невипадкова додатно визначена матриця. Тоді*

$$\frac{1}{\sqrt{t}} M_t \xrightarrow{d} \mathcal{N}_p(0, \Sigma), \quad t \to \infty.$$

Цей результат є стандартним наслідком центральної граничної теореми для мартингалів з [42, Теорема 12.6] у випадку, коли мартингал є неперервним, а нормована квадратична варіація збігається до невипадкової границі.