

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Проректор з наукової роботи

Київського національного університету

імені Тараса Шевченка

Оксана ЖИЛІНСЬКА

2026 р.



ВИСНОВОК

**Київського національного університету імені Тараса Шевченка
про наукову повноту, теоретичне та практичне значення результатів дисертації
Нечипорука Сергія Анатолійовича на тему:
«Моделювання та аналіз порогових процесів з допомогою стохастичних рівнянь
Іто та Іто-Скорохода», поданої на здобуття ступеня доктора філософії з галузі
знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 113 Прикладна математика**

Витяг

з протоколу № 11 розширеного засідання кафедри системного аналізу та теорії
прийняття рішень

від «07» травня 2026 року

Присутні: Головуюча на засіданні – завідувач кафедри, доктор фіз.-мат. наук, ст.
н. сп. Капустян О.А., доктор фіз.-мат. наук, професор Наконечний О.Г., доктор фіз.-мат.
наук, професор Машенко С.О., кандидат фіз.-мат. наук, доцент Зінько П.М., кандидат
фіз.-мат. наук, доцент Доленко Г.О., кандидат техн. наук, доцент Махно М.Ф., кандидат
фіз.-мат. наук, асистент Сіренко А.С., кандидат техн. наук, асистент Зінько Т.П.,
аспірант, асистент Осьмак Є.А.

Запрошені: доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри математики та
інтелектуальних обчислень Навчально-наукового інституту ІТ та бізнесу Національного
університету “Острозька академія” Нікітін А.В., доктор фіз.-мат. наук, професор,
професор кафедри теоретичної кібернетики факультету комп’ютерних наук та
кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка Пашко
А.О., доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри дослідження
операцій факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного
університету імені Тараса Шевченка Самойленко І.В.

Серед присутніх 6 докторів фіз.-мат. наук, 3 кандидати фіз.-мат. наук, 2 кандидати
технічних наук.

Порядок денний:

Обговорення дисертаційного дослідження аспіранта кафедри системного аналізу
та теорії прийняття рішень факультету комп’ютерних наук та кібернетики **Нечипорука
Сергія Анатолійовича** на тему «Моделювання та аналіз порогових процесів з
допомогою стохастичних рівнянь Іто та Іто-Скорохода», поданого на здобуття ступеня
доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 113
Прикладна математика.

Наукові керівники – доцент кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень
факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету

імені Тараса Шевченка, кандидат фіз.-мат. наук Зінько П.М., завідувач кафедри математики та інтелектуальних обчислень Навчально-наукового інституту ІТ та бізнесу Національного університету "Острозька академія", доктор фіз.-мат. наук, професор Нікітін А.В.

Дисертація виконувалася на кафедрі інформаційних технологій та аналітики даних Навчально-наукового інституту ІТ та бізнесу Національного університету "Острозька академія". Тему дисертації затверджено на засіданні вченої ради Національного університету "Острозька академія" (протокол № 5 від 24 листопада 2022 року). Уточнену редакцію теми дисертаційного дослідження затверджено на засіданні вченої ради Національного університету "Острозька академія" (протокол № 3 від 25 вересня 2025 року). Відповідно до наказу №15 від 21 вересня 2022 року Нечипорук С.А. був зарахований аспірантом денної форми навчання за контрактом зі спеціальності 113 Прикладна математика, де навчався успішно до березня 2026 року. У зв'язку з відсутністю акредитації даної освітньої програми у Національному університеті "Острозька академія" був відрхований за власним бажанням з метою подальшого поновлення у числі аспірантів Київського національного університету імені Тараса Шевченка для захисту дисертації. Відповідно до наказу № 90-34 від 03 березня 2026 року Нечипорук С.А. поновився у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка в складі аспірантів 4 року навчання заочної форми здобуття освіти на умовах контракту з 16 лютого 2026 року для завершення освітньо-наукової програми "Прикладна математика" за спеціальністю 113 "Прикладна математика" та захисту дисертації на здобуття ступеня доктора філософії.

Виступили:

Здобувач Нечипорук Сергій Анатолійович представив презентацію за основними положеннями дисертації «Моделювання та аналіз порогових процесів з допомогою стохастичних рівнянь Іто та Іто-Скорохода», поданої на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика.

Доповідач виклав основні положення та висновки, що виносяться на захист, ознайомив з науковими статтями, в яких опубліковані результати дисертації.

Після закінчення презентації Нечипорука С.А. присутніми на захисті фахівцями були поставлені наступні запитання:

Доктор фіз.-мат. наук, професор Наконечний О.Г.:

Згідно означення процес Орнштейна-Уленбека це гауссовський марківський стаціонарний процес, який задовольняє лінійному диференційно-статичному рівнянню. У вас же процес є не гаусівським, а марківським, стаціонарність його треба доводити. Що ви скажете з цього приводу?

Нечипорук С.А.: Ми у роботі цей момент включили із посиланнями на інші дослідження і вказали при яких умовах він є стаціонарним.

Тут важливо розмежувати класичний процес Орнштейна-Уленбека та узагальнену двопорогову модель, яку ми розглядаємо в дисертації. Класичний процес Орнштейна-Уленбека дійсно є гаусівським, марківським, стаціонарним (за певних умов), та описується лінійним стохастичним диференціальним рівнянням Іто. Однак у нашій роботі використовується не класичний ОУ-процес у чистому вигляді, а його двопорогове узагальнення з трьома режимами динаміки. У такій моделі коефіцієнти дрейфу є кусково-заданими, параметри змінюються залежно від положення процесу відносно порогів, а в моделі Іто-Скорохода додатково вводиться стрибова компонента.

Через це процес уже не є гаусівським у глобальному сенсі, особливо у випадку моделі Леві зі стрибками. Гаусівські властивості зберігаються лише локально в межах окремих режимів при фіксованих параметрах.

Щодо марківської властивості — вона зберігається, оскільки майбутня динаміка процесу визначається лише поточним станом процесу та не залежить від усієї попередньої траєкторії. Це впливає із структури стохастичного рівняння та незалежності приростів процесу Вінера і Пуассонівської міри.

Щодо стаціонарності — я погоджуюсь, що для двопорогової моделі її не можна просто трактувати, як у класичному ОУ-процесі. Саме тому в роботі окремо наведено умови стаціонарності. У кожному режимі дрейф повинен забезпечувати повернення процесу до локального середнього, а не відштовхування від нього. Саме це забезпечує ергодичність та існування стаціонарного розподілу.

Доктор фіз.-мат. наук, професор Наконечний О.Г.:

Тоді, можливо, варто записати, що у моделі, у якій описували процес Орнштейна–Уленбека, ми використовуємо пороги.

Доктор фіз.-мат. наук, професор Пашко А.О.:

У мене питання, а як задаються пороги?

Нечипорук С.А.: У нашій роботі пороги r_1 та r_2 не задаються наперед, а оцінюються як невідомі параметри моделі. Для цього формується сітка можливих значень порогів, і для кожної пари обчислюється наближена функція правдоподібності. Після цього обираються такі значення порогів, при яких функція правдоподібності дає найкращий результат. Саме пороги визначають межі переходу між трьома режимами поведінки процесу. Додатково в алгоритмі перевіряється, щоб у кожному режимі було достатньо спостережень для коректного оцінювання параметрів.

Доктор фіз.-мат. наук, професор Наконечний О.Г.:

Ще питання, по функції вірогідності. Ви використовували скачки. Як виписати функцію вірогідності у випадку, коли є сума гаусового розподілу та пуассонового? Як обґрунтовується функція правдоподібності для такого процесу?

Нечипорук С.А.: У нашій роботі використовується наближений підхід на основі схеми Ейлера та AMLE. На малому часовому інтервалі приріст процесу апроксимується як сума нормально розподіленої величини та пуассонівського доданку.

Функція правдоподібності для пуассонівського процесу обґрунтовується через властивість незалежних та стаціонарних приростів процесу Пуассона. Якщо за інтервал часу Δt кількість стрибків ΔN_t має пуассонівський розподіл з параметром $\lambda \Delta t$, то ймовірність появи k стрибків задається формулою:

$$P(\Delta N_t = k) = \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \Delta t}$$

Саме цей вираз і використовується як складова функції правдоподібності. Для всієї вибірки функція правдоподібності будується як добуток таких ймовірностей для всіх часових інтервалів спостереження. У моделі Іто–Скорохода ця пуассонівська частина далі поєднується з гаусівською дифузійною складовою процесу.

Після відповідей на запитання виступили:

Науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук, доцент Зінько П.М.

Сьогодні ми побачили достатньо серйозний і, що важливо, добре аргументований зсув роботи у сторону прикладної математики та комп'ютерного моделювання. Якщо на початкових етапах дослідження основний акцент робився переважно на теоретичних аспектах стохастичних процесів, то в представленій дисертаційній роботі автору вдалося поєднати математичний апарат із практичними алгоритмами оцінювання та програмною реалізацією моделей.

Аналізуючи доробок, який сьогодні був продемонстрований, можна зробити висновок, що поставлена у роботі мета досягнута відповідно до сформульованих завдань дослідження. Автор не лише розглянув двопорогові моделі на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода, а й запропонував підхід до оцінювання параметрів таких процесів з використанням наближеного методу максимальної правдоподібності. Важливо, що дисертант у своїй роботі не обмежився формальним математичним описом, а довів до рівня обчислювального алгоритму та програмного інструменту.

Окремо хочу відзначити, що в роботі простежується комплексний підхід: від постановки задачі й аналізу існуючих підходів — до побудови моделі, дослідження збіжності алгоритму, проведення чисельних експериментів та інтерпретації отриманих результатів. Це є важливим показником зрілості наукового дослідження.

Також позитивним моментом є те, що автор не уникає складних аспектів задачі — зокрема питань ідентифікації порогів, неконвексності функції правдоподібності, впливу шуму та стрибкової компоненти на точність оцінювання. Навпаки, ці питання винесені в окремий аналіз і підтверджені результатами чисельного моделювання.

На мою думку, отримані результати мають як теоретичну, так і прикладну цінність, а сама робота виглядає завершеним дослідженням у напрямку прикладного стохастичного моделювання.

Науковий керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор Нікітін А.В.

Погоджуюся з думкою Петра Миколайовича щодо загального рівня та змісту представленої роботи. У дисертації була проведена значна і системна робота в напрямку побудови статистичних оцінок параметрів двопорогових процесів. За певних припущень автору вдалося отримати результати щодо спроможності оцінок, а також дослідити їх асимптотичні властивості, що є важливим з точки зору математичної статистики та стохастичного аналізу.

Окремо варто відзначити результати другого розділу, де для моделі на основі рівняння Іто-Скорохода були розглянуті питання існування та єдиності розв'язку. Це свідчить про те, що автор не обмежився лише чисельними експериментами чи програмною реалізацією, а приділив увагу і теоретичному обґрунтуванню побудованих моделей.

Загалом у роботі проведено великий обсяг досліджень — як у теоретичній частині, так і в частині комп'ютерного моделювання та аналізу отриманих результатів. Важливо також відзначити, що Сергій Анатолійович значну частину необхідного математичного апарату опановував самостійно, зокрема складні розділи теорії випадкових процесів та стохастичних диференціальних рівнянь. Це видно як по змісту роботи, так і по рівню проведеного дослідження.

Тому вважаю, що дисертаційна робота заслуговує на позитивну оцінку, а її автора можна підтримати щодо присудження відповідного наукового ступеня.

Рецензенти дисертаційної роботи, які наголосили на позитивних аспектах дослідження та висловили свої побажання та зауваження:

Доктор фіз.-мат. наук, професор Самойленко І.В.:

Дисертаційне дослідження присвячене актуальній науковій проблематиці у галузі прикладної математики та математичного моделювання стохастичних процесів. У роботі помітно суттєвий прогрес у порівнянні з попередніми варіантами дослідження, насамперед у частині математичного обґрунтування та теоретичного опрацювання поставлених задач. Дисертанту вдалося значно посилити математичну складову роботи, що позитивно вплинуло на загальний рівень дослідження.

У роботі використано сучасний математичний апарат, а також враховано результати досліджень відомих науковців у галузі стохастичних процесів та прикладної математики. Важливо відзначити, що дисертант не обмежився лише теоретичним

аналізом, а також приділив увагу програмній реалізації та чисельному моделюванню запропонованих моделей, що дозволяє на практиці продемонструвати роботу досліджуваних підходів.

Позитивним є те, що основні результати роботи мають належний рівень математичної строгості, а наведені твердження та результати є достатньо аргументованими. Робота виглядає структурованою, логічно побудованою та завершеною. Разом з тим, окремі формулювання та термінологічні аспекти доцільно ще уточнити для забезпечення максимальної математичної коректності викладу, зокрема у частині трактування узагальнених порогових моделей та використання функції правдоподібності. Вказані зауваження мають рекомендаційний характер і не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації.

Дисертація відповідає основним вимогам до наукових досліджень, зокрема щодо актуальності теми, обґрунтованості використаних методів, наукової новизни та практичного значення отриманих результатів. Робота демонструє належний рівень підготовки автора та відповідає спеціальності ІІЗ «Прикладна математика».

Загалом дисертаційна робота справляє позитивне враження, є цілісним і завершеним науковим дослідженням, тому вважаю, що її можна рекомендувати до подальшого розгляду та захисту у спеціалізованій вченій раді.

Доктор фіз.-мат. наук, професор Пашко А.О.: Автором проведено значну за обсягом і змістом наукову роботу, присвячену дослідженню стохастичних моделей на основі інтегралів Іто та Іто–Скорохода, а також питанням оцінювання параметрів порогових процесів Орнштейна–Уленбека та їх узагальнень. Робота охоплює широке коло задач, пов'язаних зі стохастичними диференціальними рівняннями, побудовою наближених функцій правдоподібності, аналізом збіжності оцінок та комп'ютерним моделюванням відповідних процесів.

Слід відзначити, що дисертація має виражений теоретико-прикладний характер і містить низку вагомих результатів, серед яких доцільно виділити такі:

- побудову та дослідження порогових моделей на основі процесу Орнштейна–Уленбека;
- розробку підходів до оцінювання параметрів стохастичних процесів із використанням наближених функцій правдоподібності;
- дослідження збіжності запропонованих алгоритмів оцінювання;
- застосування методів комп'ютерного моделювання для перевірки отриманих теоретичних результатів;
- розгляд моделей на основі інтегралів Іто–Скорохода зі стрибковими компонентами та аналіз особливостей їх поведінки.

Позитивним є те, що дисертант поступово змістив акцент роботи саме у бік математичного апарату та теоретичного обґрунтування результатів. У роботі простежується прагнення до математичної строгості, а наведені результати мають належний рівень аргументованості.

Разом з тим, окремі результати дослідження можуть бути предметом подальших наукових досліджень автора. Зокрема, питання властивостей порогових процесів Орнштейна–Уленбека, таких як стаціонарність, марковість та існування відповідних характеристик процесів. Окремої уваги також заслуговує питання строгості введення та інтерпретації функцій правдоподібності для досліджуваних моделей.

Одержані результати апробовані на наукових конференціях та опубліковані у достатній кількості фахових наукових праць. Загалом дисертаційна робота відповідає вимогам, що ставляться до дисертацій на здобуття ступеня доктора філософії, та відповідає спеціальності ІІЗ «Прикладна математика».

Вважаю, що подана дисертаційна робота може бути рекомендована до захисту у разовій спеціалізованій вченій раді.

В обговоренні дисертаційного дослідження взяли участь:

завідувач кафедри, доктор фіз.-мат. наук, ст. н. сп. Капустян О.А., доктор фіз.-мат. наук, професор Наконечний О.Г., кандидат фіз.-мат. наук, доцент Зінько П.М., доктор фіз.-мат. наук, доктор фіз.-мат. наук, професор Пашко А.О., доктор фіз.-мат. наук, професор Нікітін А.В.

У ході обговорення було відзначено, що дисертаційна робота присвячена актуальній проблематиці прикладної математики та стохастичного аналізу, а також характеризується достатнім рівнем теоретичного опрацювання та математичного обґрунтування отриманих результатів. Було підкреслено, що у порівнянні з попередніми етапами підготовки дисертації автором суттєво посилено саме математичну складову дослідження, що позитивно вплинуло на загальний науковий рівень роботи.

Доцент Зінько П.М. у своєму виступі зазначив, що результати дисертаційного дослідження пройшли належну апробацію та відображені у достатній кількості наукових публікацій, що відповідає вимогам, встановленим для дисертацій за спеціальністю ІІЗ «Прикладна математика». Було також відзначено, що результати роботи доповідалися на наукових конференціях та отримали позитивну оцінку фахового середовища.

Професор Пашко А.О. акцентував увагу на належному рівні публікаційної активності здобувача. Зокрема, було відзначено, що за темою дисертації опубліковано дві статті у фахових наукових виданнях України, а також дві статті у міжнародних наукових виданнях, що індексуються у наукометричній базі Scopus. При цьому одна англomовна стаття опублікована у виданні квартиля Q1, а інша — у виданні квартиля Q3, що свідчить про відповідність результатів дослідження сучасному міжнародному науковому рівню.

Професор Нікітін А.В. відзначив, що результати дисертаційної роботи мають належний рівень теоретичної аргументованості та поєднують елементи математичного аналізу, стохастичного моделювання й алгоритмічної реалізації. Окремо було підкреслено, що результати дослідження неодноразово обговорювалися у науковому середовищі та отримали фахову апробацію.

Завідувачка кафедри Капустян О.А. підсумувала, що дисертаційна робота є цілісним і завершеним науковим дослідженням, виконаним на належному теоретичному рівні. Було зазначено, що висловлені під час обговорення зауваження мають переважно рекомендаційний та редакційний характер і не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

За результатами обговорення учасники засідання дійшли висновку, що дисертаційне дослідження відповідає вимогам, які висуваються до дисертацій на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю ІІЗ «Прикладна математика», та може бути рекомендоване до подальшого розгляду і захисту у разовій спеціалізованій вченій раді.

ВИСНОВОК

про наукову повизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації
Нечипорука Сергія Анатолійовича на тему:
«Моделювання та аналіз порогових процесів з допомогою стохастичних рівнянь
Іто та Іто-Скорохода», поданої на здобуття ступеня доктора філософії з галузі
знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 113 Прикладна математика

1. Обґрунтування вибору теми дослідження. Вибір теми дослідження зумовлений актуальністю задачі щодо опису та оцінювання реальних процесів, динаміка яких змінюється при досягненні певних порогових рівнів. Класичні стохастичні моделі часто передбачають однорідну поведінку процесу, що не завжди відповідає практичним спостереженням. Рівняння Іто та Іто-Скорохода дають можливість враховувати наявність декількох режимів у динаміці процесу, а також поєднувати дифузійну і стрибкову складову. Додатковою мотивацією стало те, що питання оцінювання параметрів двопорогових моделей та їх програмної реалізації залишаються недостатньо дослідженими. Тому таке дослідження може бути актуальним як в теоретичному так і в прикладному аспектах.

2. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Основні дослідження за темою дисертації було виконано у рамках науково-дослідної роботи «Математичні методи, моделі та інформаційні технології в освіті, науці, бізнесі» (номер державної реєстрації: 0123U103522, термін виконання 09.2023 - 08.2028 рр.) на кафедрі економіко-математичного моделювання та інформаційних технологій Національного університету «Острозька академія».

3. Мета і завдання дослідження. Метою даної дисертаційної роботи є побудова математичної та комп'ютерної моделі для оцінювання двопорогових процесів з допомогою рівнянь Іто та Іто-Скорохода. А також, побудова інструменту для оцінювання параметрів двопорогових процесів, що описуються рівняннями Іто та Іто-Скорохода.

4. Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження в даній роботі є стохастичні процеси, що описуються рівняннями Іто та Іто-Скорохода з двопороговою структурою, динаміка яких може змінюватися та включати як неперервну дифузійну складову, так і стрибкову компоненту.

5. Предмет дослідження. Предметом дослідження є методи математичного моделювання, чисельного аналізу та ідентифікації порогових процесів на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода та оцінювання їх параметрів.

6. Методи дослідження. Під час проведення наукового дослідження використовувались методи стохастичного аналізу та теорії випадкових процесів, зокрема процесів, що описуються рівняннями Іто та Іто-Скорохода, а також чисельні методи моделювання з використанням диференціальних рівнянь. Для оцінки параметрів моделей використовувались наближені методи максимальної правдоподібності, які дають змогу отримувати результати оцінювання навіть за відсутності аналітичного вигляду функції правдоподібності.

7. Наукова новизна дослідження:

1. Вперше проаналізовано і змодельовано стохастичний процес, що можна описати рівняннями Іто та Іто-Скорохода з двома порогами та трьома режимами динаміки. Параметри такої моделі змінюються в залежності від положення відносно порогових значень. Таке рішення дає можливість гнучко описувати динаміку процесів із кількома стабільними та перехідними режимами.
2. Вперше розроблено алгоритм оцінювання параметрів двопорогових стохастичних процесів, що можна описати рівняннями Іто та Іто-Скорохода, на основі наближеного методу максимальної правдоподібності. Ця методика дає

можливість оцінювати параметри динаміки процесу у кожному режимі та визначати значення порогів.

3. Для моделей на базі стохастичних рівнянь Іто встановлено властивості спроможності та асимптотичної нормальності параметрів дрейфу при відомих порогах.
4. Розширено модель двопорогового процесу шляхом додавання стрибкової компоненти. Це дозволило наблизити опис моделі до реальних процесів, шляхом врахування раптових змін стану системи.
5. Вперше розроблено програмне рішення для аналізу двопорогових стохастичних процесів на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода. Програмний код дозволяє моделювати динаміку процесу, оцінювати параметри моделі у різних режимах, знаходити наближені значення порогів та візуально представляти отримані результати у вигляді графіків.

Таким чином, наукова новизна полягає у комплексному поєднанні математичного моделювання, чисельних методів оцінювання та програмного забезпечення що дозволяє оцінювати двопорогові стохастичні процеси, що описуються рівняннями Іто та Іто-Скорохода з різною структурою динаміки їх поведінки.

8. Теоретичне значення. Теоретичне значення роботи полягає у розвитку підходів до моделювання та аналізу порогових стохастичних процесів з допомогою рівнянь Іто та Іто-Скорохода з кількома режимами динаміки. В рамках даного дослідження розширено застосування наближених методів максимальної правдоподібності до двопорогових моделей із трьома режимами, що дозволяє більш гнучко описувати складні стохастичні системи. Запропонований підхід поглиблює теоретичне розуміння процесів, у яких поєднуються дифузійна та стрибова компоненти, а також пропонує ще один підхід до оцінювання їх параметрів.

9. Практичне значення. Практичне значення отриманих результатів дослідження - це розробка алгоритму та програмного забезпечення для оцінювання параметрів стохастичних процесів на базі рівнянь Іто та Іто-Скорохода, які містять як дифузійну так і стрибоку компоненту та характеризуються наявністю порогових значень, на основі яких визначається зміна режиму динаміки. Таке рішення може бути застосоване у фінансовій, економічній та інших сферах для аналізу часових рядів процесів в період кризових явищ, різкої зміни попиту та інших факторів.

10. Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку досліджень та постановка задач належать доктору фіз.-мат. наук, професору А.В. Нікітіну. З результатів, надрукованих у сумісних статтях, в основну частину дисертації увійшли лише такі, які отримані здобувачем особисто. В англомовних та україномовних статтях з А.В. Нікітіним постановка задач належить А.В. Нікітіну, результати отримано здобувачем особисто.

11. Апробація результатів дослідження.

Основні положення та висновки дисертаційного дослідження обговорювались на наукових семінарах кафедри інформаційних технологій та аналітики даних Навчально-наукового інституту ІТ та бізнесу Національного університету «Острозька академія» та кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка і отримали схвальні відгуки.

Результати дисертаційного дослідження пройшли апробацію, їх оприлюднено у доповідях міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій, семінарів:

- XL International Conference «Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2025)». – September 30 – October 1, 2025, Bielsko-Biala, Poland;
- Всеукраїнська наукова конференція «Диференціальні рівняння і аналіз даних» Differential Equations and Data Analysis (DEDAL-2025);

- XXII International Scientific-Practical Conference «Shevchenkivska Vesna – 2026» (квітень 2026).

12. Публікації. Основні наукові положення, висновки та результати дослідження опубліковано у 7 наукових працях, серед яких 2 статті у виданнях, проіндексованих у базі даних Scopus (Q1, Q3), 2 статті, які опубліковані у наукових фахових виданнях України, та 3 – тези всеукраїнських і міжнародних конференцій.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях:

1. Нечипорук С. А. Наближений метод максимальної вірогідності для оцінювання двопорогового процесу Орнштейна-Уленбека. Науковий журнал Херсонського національного технічного університету. Прикладні питання математичного моделювання. 2024. Том 7. №2. С. 117-124.
2. Нечипорук С. А. Approximate maximum likelihood estimation for a two-threshold Levy process: convergence assessment and data applications. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія математичне та комп'ютерне моделювання. 2025. №27. С. 29-38.
3. Bekesiene S., Nikitin A., Nechiporuk S. MDPI. Mathematics. Modeling Dynamic Regime Shifts in Diffusion Processes: Approximate Maximum Likelihood Estimation for Two-Threshold Ornstein-Uhlenbeck Models. 2025. №13(21). (Q1).
4. Нікітін А., Хімка У., Нечипорук С. Кібернетика і системний аналіз. Оцінка параметрів двопорогового процесу Леві за методом наближеної максимальної правдоподібності. 2026. №. 3 С.1-14. (Q3).

13. Структура та обсяг дисертації. Робота складається зі змісту, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел. Обсяг роботи: 112 сторінок основного тексту, 30 рисунків та 4 таблиці; список використаних джерел зі 59 найменувань на 6 сторінках. Загальний обсяг роботи складає 133 сторінки.

14. Характеристика особистості здобувача. За час навчання та підготовки дисертаційної роботи здобувач показав себе як мотивований та працьовитий аспірант, що має навички самоорганізації та ініціативності, необхідних для виконання самостійної роботи. Здобувач повністю та у встановлені строки виконав поставлені перед ним завдання відповідно до індивідуального плану навчальної та наукової роботи, провів та захистив асистентську практику, що є необхідною складовою даної освітньої програми.

15. Оцінка мови та стилю дисертації. Дисертація виконана фаховою українською мовою, текстове подання матеріалу відповідає стилю науково-дослідної літератури.

16. Рецензенти рекомендують: відповідно до пп. 15, 16 Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. № 44, *пропонується такий склад разової ради:*

Голова ради:

Наконечний Олександр Григорович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Рецензенти:

Самойленко Ігор Валерійович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Пашко Анатолій Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри теоретичної кібернетики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Офіційні опоненти:

Сверстюк Андрій Степанович, доктор технічних наук, професор, професор кафедри медичної інформатики Тернопільського медичного університету імені І.Я. Горбачевського

Ярова Оксана Анатоліївна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка

Усі члени разової спеціалізованої вченої ради не мають реальний чи потенційний конфлікт інтересів щодо здобувача Нечипорука Сергія Анатолійовича (зокрема, є його близькою особою) та/або його наукових керівників.

У результаті попередньої експертизи дисертації **Нечипорука Сергія Анатолійовича** і повноти публікації основних результатів дослідження

УХВАЛЕНО:

1. Затвердити висновок про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації Нечипорука Сергія Анатолійовича на тему: «Моделювання та аналіз порогових процесів з допомогою стохастичних рівнянь Іто та Іто-Скорохода».

2. Констатувати, що за актуальністю, ступенем наукової новизни, обґрунтованістю, науковою та практичною цінністю здобутих результатів дисертація Нечипорука С.А. відповідає спеціальності 113 Прикладна математика та вимогам Порядку підготовки здобувачів вищої освіти ступеня доктора філософії та доктора наук у закладах вищої освіти (наукових установах), затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 23 березня 2016 р. № 261, пп. 6, 7, 8 Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. № 44.

3. Рекомендувати дисертацію Нечипорука С.А. на тему «Моделювання та аналіз порогових процесів з допомогою стохастичних рівнянь Іто та Іто-Скорохода» до захисту на здобуття ступеня доктора філософії у разовій спеціалізованій вченій раді за спеціальністю 113 Прикладна математика.

4. Рекомендувати вченій раді факультету комп'ютерних наук та кібернетики затвердити склад разової спеціалізованої вченої ради:

Голова ради:

Накопечний Олександр Григорович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету

комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Рецензенти:

Самойленко Ігор Валерійович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Пашко Анатолій Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри теоретичної кібернетики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Офіційні опоненти:

Сверстюк Андрій Степанович, доктор технічних наук, професор, професор кафедри медичної інформатики Тернопільського медичного університету імені І.Я. Горбачевського

Ярова Оксана Анатоліївна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка

Результати голосування щодо рекомендації до захисту дисертації Нечипорука Сергія Анатолійовича:

«За» – 9

«Проти» – немає

«Утримались» – немає

Презентація Нечипорука Сергія Анатолійовича на 61 стор. додається.

Декан факультету
комп'ютерних наук та кібернетики –
доктор фізико-математичних наук,
доцент



Олена КАШПУР

Головуюча на засіданні –
доктор фізико-математичних наук,
завідувач кафедри системного аналізу та
теорії прийняття рішень факультету
комп'ютерних наук та кібернетики,
старший науковий співробітник



Олена КАПУСТЯН

Секретар засідання



Михайло МАХНО

Моделювання та аналіз порогових процесів з допомогою стохастичних рівнянь Іто та Іто-Скорохода

Нечипорук Сергій Анатолійович

Наукові керівники:

Зінько Петро Миколайович,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

Нікітін Анатолій Володимирович,

доктор фізико-математичних наук, професор

План дослідження

Розділ I

- Порогові моделі на базі рівняння Іто

Розділ II

- Порогові моделі на базі рівняння Іто-Скорохода

Розділ III

- Комп'ютерне моделювання

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Нечипорук С. А. Наближений метод максимальної вірогідності для оцінювання двопорогового процесу Орнштейна-Уленбека. Науковий журнал Херсонського національного технічного університету. Прикладні питання математичного моделювання. 2024. Том 7. №2. С. 117-124.
2. Нечипорук С. А. Approximate maximum likelihood estimation for a two-threshold Levy process: convergence assessment and data applications. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія математичне та комп'ютерне моделювання. 2025. №27. С. 29-38.
3. Bekesiene S., Nikitin A., Nechyporuk S. MDPI. Mathematics. Modeling Dynamic Regime Shifts in Diffusion Processes: Approximate Maximum Likelihood Estimation for Two-Threshold Ornstein–Uhlenbeck Models. 2025. №13(21).
4. Нікітін А., Хімка У., Нечипорук С. Кібернетика і системний аналіз. Оцінка параметрів двопорогового процесу Леві за методом наближеної максимальної правдоподібності. 2026.

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Нікітін А. В., Нечипорук С. А. Наближений метод максимальної вірогідності для оцінювання двопорогового процесу Орнштейна-Уленбека. Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції «Диференціальні рівняння і аналіз даних» Differential Equations and Data Analysis (DEDAL-2025). Lviv. 2025. С. 72.
2. Nikitin A.V., Nechyporuk S.A. Approximate maximum likelihood estimation to estimate the parameters of a two-regime threshold discrete Ornstein–Uhlenbeck process. Abstracts XL International Conference Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2025). Bielsko-Biala, Poland. 2025. P. 96.
3. Зінько П. М., Нечипорук С. А. Програмна реалізація алгоритму оцінки параметрів двопорогової моделі на основі процесу Орнштейна-Уленбека. Proceeding of XXII International Scientific-Practical Conference «Shevchenkivska Vesna – 2026». 2026.

Мета та завдання дослідження

Метою даної дисертаційної роботи є створення математичної моделі та її комп'ютерної реалізації для оцінювання двопорогових процесів за допомогою рівнянь Іто та Іто-Скорохода. А також, побудова методики для оцінювання параметрів двопорогових процесів, що описуються рівняннями Іто та Іто-Скорохода.

Об'єктом дослідження

Об'єктом дослідження в даній роботі є процеси, що описуються рівняннями Іто та Іто-Скорохода з двопороговою структурою, динаміка яких може змінюватись та включати як неперервну дифузійну складову так і стрибкову компоненти.

Основні наукові результати, що додають роботі новизни

- Вперше проаналізовано двопорогові моделі на базі рівнянь Іто та Іто-Скорохода.
- Вперше розроблено алгоритм оцінювання параметрів двопорогових процесів, що можна описати рівняннями Іто та Іто-Скорохода, на основі наближеного методу максимальної правдоподібності.
- Вперше розроблено програмне рішення для аналізу двопорогових процесів на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода.
- Проведено оцінювання невідомих параметрів дрейфу та дифузії при фіксованих порогах.

Практичне значення одержаних результатів

Практичне значення отриманих результатів дослідження - це розробка алгоритму та програмного рішення для оцінювання параметрів двопорогових процесів на базі рівнянь Іто та Іто-Скорохода, на основі запропонованої в роботі математичної моделі.

Розділ I Порогові моделі на базі рівняння Іто

Процес Орнштейна–Уленбека є базовою моделлю в аналізі часових рядів.

Двопорогові моделі відображають нелінійні динамічні системи з різними режимами поведінки.

Точне оцінювання параметрів таких систем – це складна задача, оскільки аналітичної форми ймовірнісної функції переходу не існує, тому пряме застосування класичних методів оцінювання виявляється неможливим. Для її вирішення застосовується наближений метод максимальної правдоподібності (AMLE).

Двопороговий процес Орнштейна–Уленбека (ОУ)

Процес має 3 режими динаміки:

- Нижній режим: $X_t \leq r_1$
- Центральний режим: $r_1 < X_t \leq r_2$
- Верхній режим: $X_t > r_2$

Процес має низку корисних властивостей (стаціонарність, гауссовість, марковська властивість) і є розв'язком стохастичного диференціального рівняння:

$$dX_t = \beta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$$

де X_t — значення процесу в момент часу t ; β — швидкість повернення до середнього значення μ ; σ —інтенсивність шуму; W_t — процес Вінера.

Двопороговий процес ОУ

Нехай $X = \{X_0, X_1, \dots, X_q\}$ - це дані, що спостерігаються в моменти часу $\{t_0, t_1, \dots, t_q\}$, $\beta = (\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{20}, \beta_{21})$, $\sigma^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2)$, і $\theta = (\beta, \sigma^2)$. Мета полягає в оцінюванні невідомого параметра $\eta = (r_1, r_2, \theta)$.

Процес з двома порогами:

$$\begin{aligned} dX_t &= \left\{ (\beta_{10} + \beta_{11}X_t)I(X_t \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21}X_t)I(r_1 < X_t \leq r_2) + \right. \\ &\quad \left. (\beta_{30} + \beta_{31}X_t)I(X_t > r_2) \right\} dt \\ &\quad + \{ \sigma_1 I(X_t \leq r_1) + \sigma_2 I(r_1 < X_t \leq r_2) + \sigma_3 I(X_t > r_2) \} dW_t \end{aligned}$$

Для двопорогових процесів Орнштейна–Уленбека не існує аналітичної форми перехідного розподілу. В даній роботі було використано апроксимацію за схемою Ейлера.

$$X_j - X_{j-1} = \Delta_j \{ (\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})I(X_{j-1} \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) +$$

Функція правдоподібності

$$\begin{aligned}
 & f(X_0, X_1, \dots, X_q | \theta) \\
 &= \prod_{j=1}^q f(X_j | X_{j-1}) \\
 &= C \\
 &\cdot \prod_{j=1}^q \frac{1}{\sqrt{2\pi\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_t \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j}} \\
 &\times \exp \left[- \sum_{j=1}^q \frac{\left\{ X_j - X_{j-1} - \Delta_j \left[\frac{(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1}) I(X_{j-1} \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21} X_{j-1}) I(r_1 < X_t \leq r_2) + (\beta_{30} + \beta_{31} X_{j-1}) I(X_{j-1} > r_2)}{2\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_t \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\}} \right] \right\}^2}{2\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_t \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j} \right]
 \end{aligned}$$

за умови, що X_0 і r_1, r_2 відомі, рівняння вище може бути використане для отримання $-2l_x(\theta)$, що є подвоєною від'ємною наближеною логарифмічною функцією правдоподібності для X .

$$\begin{aligned}
 -2l_x(\theta) &= C + \sum_{j=1}^q \log\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_t \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} + \\
 &+ \sum_{j=1}^q \frac{\left[X_j - X_{j-1} - \Delta_j \left\{ \frac{(\beta_{10} + \beta_{11} X_{j-1}) I(X_{j-1} \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21} X_{j-1}) I(r_1 < X_t \leq r_2) + (\beta_{30} + \beta_{31} X_{j-1}) I(X_{j-1} > r_2)}{2\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_t \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\}} \right\} \right]^2}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_t \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\} \Delta_j}
 \end{aligned}$$

Квазіправдоподібне оцінювання параметрів у дифузійних процесах Іто

Нехай виконуються умови

(А) Параметри дрейфу в суміжних режимах відрізняються ($\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$).

(В) Процес $\{X(t)\}$ є стаціонарним та геометрично ергодичним зі скінченними четвертими моментами (Процес $\{X(t)\}$ називається геометрично ергодичним, якщо він ергодичний, а також збігається до стаціонарного розподілу з експоненціальною швидкістю).

(С) Процес $\{X(t)\}$ допускає стаціонарну щільність ймовірності, яка майже напевно є неперервною з можливими розривами першого роду в точках порогів.

Теорема 2 Нехай виконуються припущення (А)–(С). Тоді оцінка $\hat{\theta}_T = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ є спроможною, тобто

$$\hat{\theta}_T \xrightarrow{P} \theta_0$$

при $T \rightarrow \infty$.

Встановимо асимптотичні властивості вектора параметрів $\hat{\theta}$ при $T \rightarrow \infty$. Розглянемо випадок, коли $\sigma^2(x)$ є додатна з обмеженою кількістю точок розриву та має не більше ніж лінійний ріст.

Теорема 3. Нехай виконуються припущення (A)–(C). Тоді для оцінки вектора параметрів дрейфу $\hat{\beta}_{\hat{r}}$ виконується:

$$\hat{\beta}_{\hat{r}} - \beta_0 = O_p(1/\sqrt{T})$$

Крім того, величина

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_{\hat{r}} - \beta_0)$$

є асимптотично нормально розподіленою з розподілом $N(0, \Sigma)$.

Тут

$$\Sigma = E^{-1}(H_{\beta_0}) E(G_{\beta_0} G_{\beta_0}^\top) E^{-1}(H_{\beta_0})^\top,$$

G_{β_0} є вектором перших похідних, а H_{β_0} — матрицею других похідних функції квазіправдоподібності за параметрами β .

Обчислювальний алгоритм AMLE для процесу ОУ

Крок 1. Набір даних для моделі.

Часовий ряд $\{X_0, X_1, \dots, X_q\}$.

Крок 2.

2.1. Фіксуємо $\hat{r}$ для $i = 0, 1, \dots, \lambda$. Визначається $\sigma_1^2(0), \sigma_2^2(0), \sigma_3^2(0)$. Для розрахунку стартових значень дисперсій використовується квадрати режимних приростів, згідно [3].

2.2. Для $k \geq 1$ обчислюємо

$$\theta(k) = (\hat{\beta}_{10}(k), \hat{\beta}_{11}(k), \hat{\beta}_{20}(k), \hat{\beta}_{21}(k), \hat{\beta}_{30}(k), \hat{\beta}_{31}(k), \hat{\sigma}_1^2(k), \hat{\sigma}_2^2(k), \hat{\sigma}_3^2(k)),$$

рекурсивно, як у рівняннях для оцінки параметрів, замінивши відповідно у правих частинах β_{10} на $\hat{\beta}_{10}(k-1)$, β_{11} на $\hat{\beta}_{11}(k-1)$, β_{20} на $\hat{\beta}_{20}(k-1)$, β_{21} на $\hat{\beta}_{21}(k-1)$, β_{30} на $\hat{\beta}_{30}(k-1)$, β_{31} на $\hat{\beta}_{31}(k-1)$, σ_1^2 на $\hat{\sigma}_1^2(k-1)$, σ_2^2 на $\hat{\sigma}_2^2(k-1)$, σ_3^2 на $\hat{\sigma}_3^2(k-1)$.

2.3. Повторення кроку 2.2 доки $\hat{\theta}(k)$ не буде збіжною.

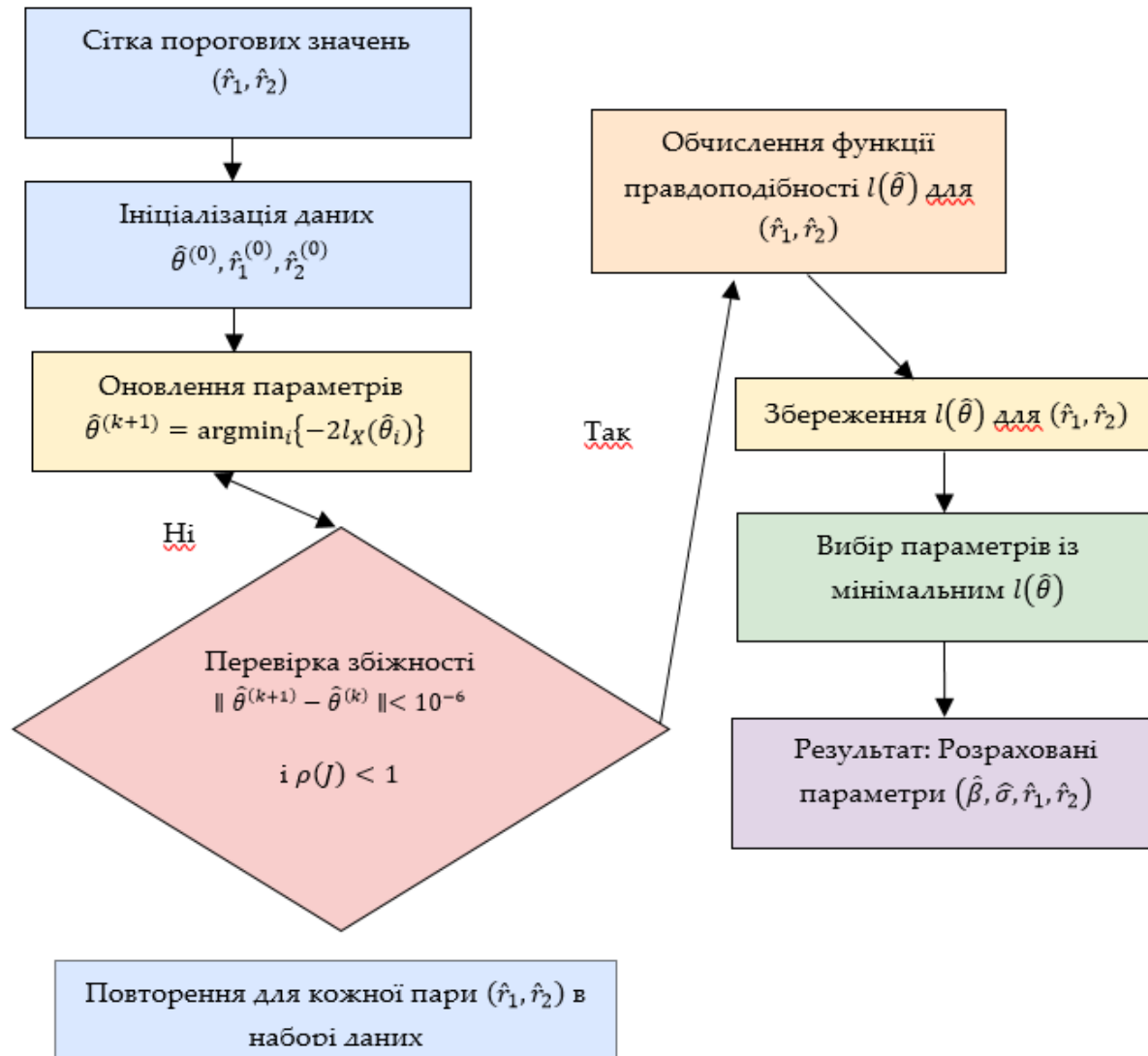
Збіжна оцінка буде мати вигляд:

$$\hat{\theta}_i = (\hat{\beta}_{10,i}(k), \hat{\beta}_{11,i}(k), \hat{\beta}_{20,i}(k), \hat{\beta}_{21,i}(k), \hat{\beta}_{30,i}(k), \hat{\beta}_{31,i}(k), \hat{\sigma}_{1,i}^2(k), \hat{\sigma}_{2,i}^2(k), \hat{\sigma}_{3,i}^2(k)).$$

Крок 3.

$\hat{\theta}_i$). Тоді $\tau = \operatorname{argmin}_i \{-2l_X(\hat{\theta}_i)\}$ і наближеною оцінкою максимальної правдоподоби для $i = 0, 1, \dots, \lambda$ обчислюється $-2l_X$ (дібності $\eta = (r, \theta)$ буде $\hat{\eta} = (\hat{r}_\tau, \hat{\theta}_\tau)$.

Графічне представлення алгоритму



Чисельна збіжність алгоритму

Алгоритм є ітераційним, тому потрібна перевірка збіжності.

Використовуються два критерії:

Різниця оцінок параметрів:

$$\|\theta^{k+1} - \theta^k\| < \varepsilon, \varepsilon = 10^{-6}$$

Спектральний радіус матриці Якобі:

$$\rho(J) < 1$$

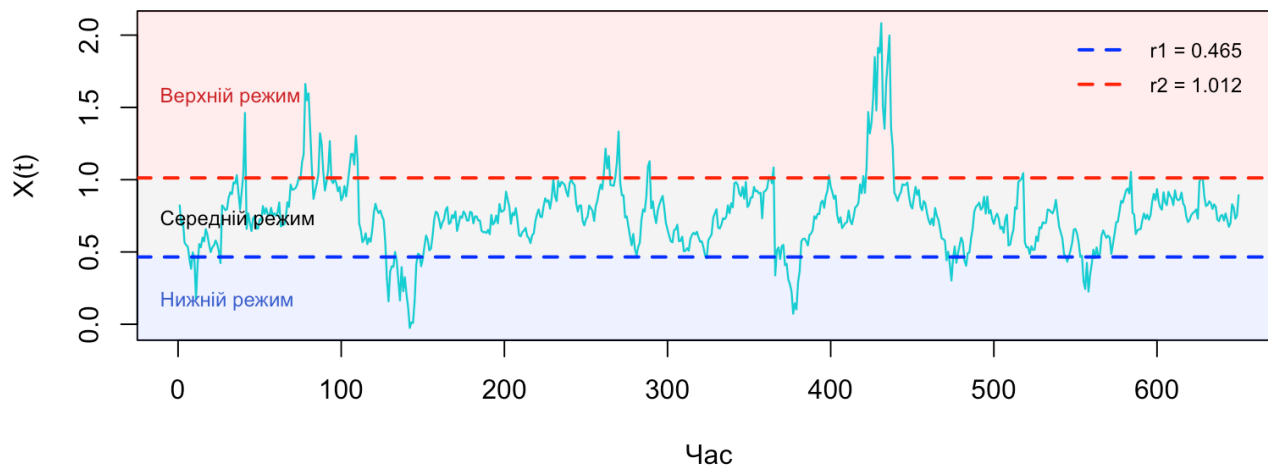
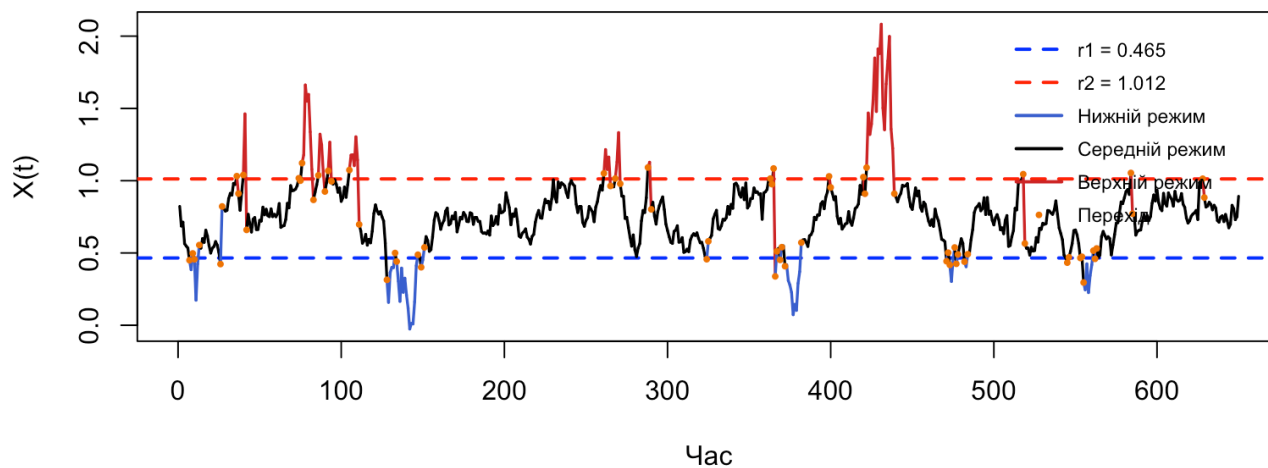
Це гарантує локальну збіжність.

Якщо параметри стабілізуються з точністю до 10^{-6} , ітерації зупиняються.

Якщо матриця Якобі має власні значення в межах одиничного кола, алгоритм на поточній ітерації не розбігається.

Результати тестування алгоритму для процесу ОУ на синтетично згенерованих даних

$$r_1 \approx 0.465, r_2 \approx 1.012$$

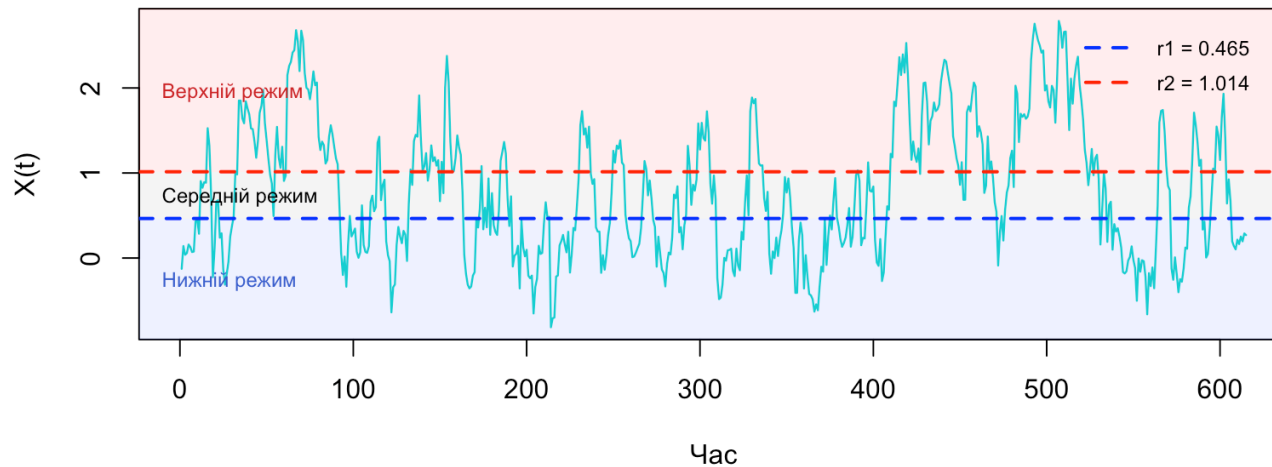
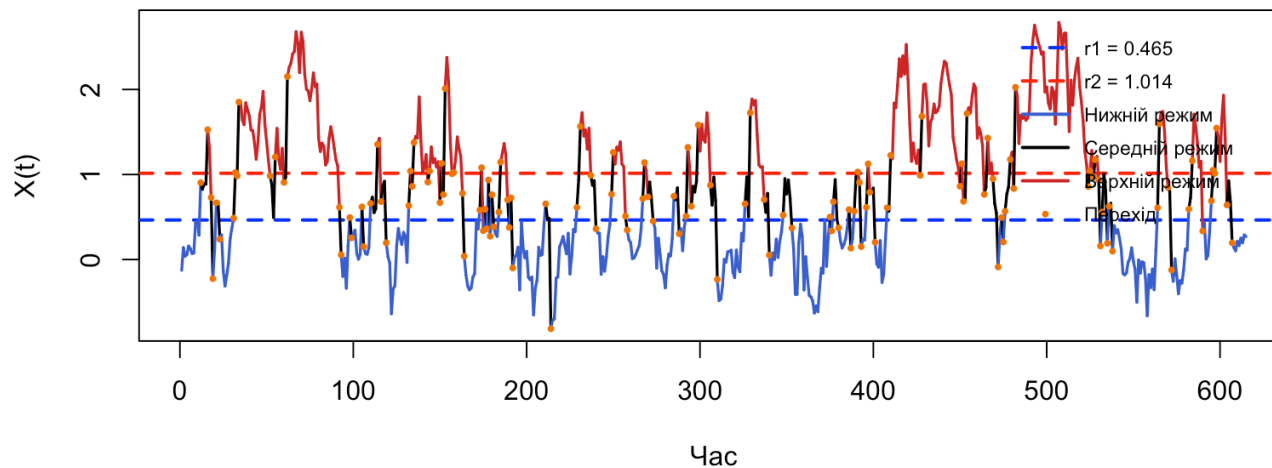


Для аналізу впливу довжини вибірки на точність оцінювання було розглянуто три часові горизонти спостереження: $T = 10, T = 50, T = 100$. Метод Монте Карло виступив в якості інструменту числової верифікації запропонованої методики.

Параметр	Істинне	$T10$	$T50$	$T100$
r_1	0.48	0.5028(0.1042)	0.4902(0.0228)	0.4895(0.0240)
r_2	1.02	1.0044(0.0515)	1.0009(0.0239)	0.9978(0.0234)
β_{10}	0.684	1.5620(1.3630)	0.7637(0.3503)	0.7566(0.2577)
β_{11}	-1.9	-4.7266(3.4650)	-2.1303(0.9767)	-2.0174(0.8415)
β_{20}	1.053	0.8666(2.0290)	0.9560(0.2729)	1.0444(0.2524)
β_{21}	-1.35	-1.0538(2.0524)	-1.2200(0.3539)	-1.3281(0.3293)
β_{30}	2.204	6.0266(4.3159)	3.3615(1.5864)	2.3689(1.2306)
β_{31}	-1.9	-4.643(3.4876)	-2.6486(1.1133)	-1.9971(0.8339)
σ_1	0.58	0.5341(0.0772)	0.5653(0.0351)	0.5661(0.0324)
σ_2	0.3	0.3169(0.0760)	0.3016(0.0085)	0.3031(0.0092)
σ_3	1.28	1.1858(0.1715)	1.2192(0.0948)	1.2039(0.0764)

Результати тестування алгоритму для процесу ОУ на синтетично згенерованих даних

$$r_1 \approx 0.465, r_2 \approx 1.014$$



Аналіз впливу довжини вибірки на точність оцінювання.

Параметр	Істинне	T_{10}	T_{50}	T_{100}
r_1	0.48	0.4150(0.2148)	0.4660(0.0345)	0.4543(0.0348)
r_2	1.02	1.0182(0.3046)	1.0313(0.0444)	1.0384(0.0348)
β_{10}	0.684	0.6415(1.6352)	0.7290(0.2411)	0.6843(0.1801)
β_{11}	-1.9	-3.1971(2.7827)	-2.0558(0.7124)	-2.0197(0.4928)
β_{20}	1.053	3.2335(12.7674)	1.0048(3.7645)	0.3462(2.4934)
β_{21}	-1.35	-5.1825(17.9668)	-1.3463(4.7754)	-0.4288(3.4593)
β_{30}	2.204	3.4661(4.2512)	2.4016(1.1488)	2.4631(0.8764)
β_{31}	-1.9	-2.7536(2.3054)	-2.0309(0.6952)	-2.0632(0.5076)
σ_1	1.08	1.0562(0.1001)	1.0833(0.0373)	1.0830(0.0269)
σ_2	2.3	1.9928(0.4718)	2.1901(0.1629)	2.2213(0.1249)
σ_3	1.28	1.2806(0.1469)	1.2814(0.0476)	1.2769(0.0338)

Висновки по даній моделі

Основні результати:

- Створено математичну модель для оцінювання параметрів двопорогового процесу Орнштейна-Уленбека.
- Запропоновано наближений метод максимальної правдоподібності (AMLE) для оцінювання параметрів двопорогового процесу Орнштейна-Уленбека.
- Проведено комп'ютерне моделювання. На синтетичних даних підтверджено можливість методу визначати порогові значення та оцінки дрейфу і дифузії у трьох режимах.

Розділ II Порогові моделі на базі рівняння Іто-Скорохода

Для подальшого розгляду будемо використовувати стохастичне рівняння Іто-Скорохода для моделювання процесу Леві, що містить стрибкову компоненту:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t + \int_U \gamma(X_t, t)\tilde{\nu}(dt, du), X_0 = 0$$

де:

$\{W_t, t \geq 0\}$ процес Вінера,

$\mu(X_t, t)$ - коефіцієнт дрейфу,

$\sigma(X_t, t)$ - дифузійний компонент,

$\int_U \gamma(X_t, t)\tilde{\nu}(dt, du)$ - моделює стрибки процесу, де $\tilde{\nu}$ є компенсованою мірою Пуассона.

Теорема існування розв'язку

Теорема 1. Нехай коефіцієнти рівняння

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \int_U \gamma(s, X_s, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, ds)$$

задовольняють наступним умовам:

- 1.) $\mu(s, 0), \sigma(s, 0), \int |\gamma(s, 0, \theta)|^2 \tilde{\nu}(d\theta)$ локально обмежені по s ,
- 2.) існує зростаюча функція $l(s)$ така, що

$$|\mu(s, x) - \mu(s, y)|^2 + \|\sigma(s, x) - \sigma(s, y)\|^2 + \int |\gamma(s, x, \theta) - \gamma(s, y, \theta)|^2 \tilde{\nu}(d\theta) \leq l(s) |x - y|^2$$

Позначимо через $\tilde{\mathfrak{F}}_t$ σ -алгебру, породжену величинами $X_0, \tilde{\nu}(d\theta \times ds), W_s$ при $s \leq t$. Якщо X_0 не залежить від сукупності величин $W_s, \tilde{\nu}(d\theta \times ds)$ і $\mathbf{M}|X_0|^2 < \infty$, то рівняння для X_t має $\tilde{\mathfrak{F}}_t$ -вимірний розв'язок, при чому $\mathbf{M}|X_s|^2 < \infty$.

Двопороговий процес Леві

Припущення моделі

Для подальшого аналізу розглянемо однорідний процес Леві, у якому коефіцієнти не залежать від часу:

$$\mu(x, t) = \mu(x), \sigma(x, t) = \sigma(x), \gamma(x, t) = \gamma(x).$$

Коефіцієнт зсуву має вигляд, аналогічний процесу Орнштейна–Уленбека:

$$\mu(x) = (\beta_0 + \beta_1 x), \text{ де } \beta_1 < 0$$

Двопороговий процес Леві (трьохрежимний випадок)

$$X_t = \{(\beta_{10} + \beta_{11} X_t)I(X_t \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21} X_t)I(r_1 < X_t \leq r_2)\}$$

Апроксимація різницевою схемою за допомогою методу Ейлера

Двопороговий процес Леві можна наближено записати у різницевій формі за допомогою методу Ейлера:

$$\begin{aligned} X_j - X_{j-1} \\ = \Delta_j \{ (\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})I(X_{j-1} \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) \end{aligned}$$

$-2l_X(\theta)$ – подвоєна від'ємна наближена логарифмічна функція правдоподібності

$$\begin{aligned}
 -2l_X(\theta) = & C + \sum_{j=1}^q \log\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} + \\
 & + \sum_{j=1}^q \left[\frac{X_j - X_{j-1} - \left\{ \frac{(\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})I(X_{j-1} \leq r_1) + (\beta_{20} + \beta_{21}X_{j-1})I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\beta_{30} + \beta_{31}X_{j-1})I(X_{j-1} > r_2)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\}} \right\} \Delta_j}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j} \right]^2 - \\
 & - 2 \sum_{j=1}^q N_j \log(\Delta_j) - 4 \sum_{j=1}^q N_j \log\{\gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2)\} + \\
 & + 2 \sum_{j=1}^q \Delta t_j \{\gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_3 I(X_{j-1} > r_2)\}^2
 \end{aligned}$$

Приклад диференціювання функції правдоподібності за параметрами β_{10} та β_{11}

Часткові похідні від функції правдоподібності за параметрами β_{10}, β_{11} для випадку $X_{j-1} \leq r_1$:

$$2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{10}} = -2 \sum_{j=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})\}I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\}\Delta_j};$$

$$-2 \frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \beta_{11}} = -2 \sum_{j=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})\}X_{j-1}I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + (\sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2))\}\Delta_j}$$

Ці рівняння використовуються для побудови матричної системи оцінювання параметрів β у кожному з трьох режимів.

Система рівнянь для оцінювання параметрів моделі

Після диференціювання функції правдоподібності і прирівнювання похідних до нуля:

$$\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

отримуємо матричну форму системи рівнянь, яка дозволяє оцінити основні параметри моделі:

$$\theta = (\beta, \sigma^2, \gamma)$$

Приклад:

$$\begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\}} \\ \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} X_{j-1}^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} X_{j-1}^{-1}} \\ \sum_{i=1}^q \frac{\Delta_j I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} X_{j-1}^{-2}} \end{bmatrix}^{-1} \\ * \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1}) I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\}} \\ \sum_{i=1}^q \frac{(X_j - X_{j-1}) I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^2 I(X_{j-1} > r_2)\} X_{j-1}^{-1}} \end{bmatrix}$$

Система рівнянь для оцінювання параметрів

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^q \frac{\{X_j - X_{j-1} - \Delta_j(\beta_{10} + \beta_{11}X_{j-1})\}^2 I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^4 I(X_{j-1} \leq r_1) + \sigma_2^4 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \sigma_3^4 I(X_{j-1} > r_2)\} \Delta_j}}{\sum_{i=1}^q \frac{I(X_{j-1} \leq r_1)}{\{\sigma_1^2 I(X_{j-1} \leq r_1)\}}}$$

$$\gamma_1 = \frac{\sum_{j=1}^q \frac{X_j I(X_{j-1} \leq r_1)}{\gamma_1 I(X_{j-1} \leq r_1) + \gamma_2 I(r_1 < X_{j-1} \leq r_2) + \gamma_1 I(X_{j-1} > r_2)}}{\sum_{j=1}^q \Delta v_j I(X_{j-1} \leq r_1)}$$

Обчислювальний алгоритм (AMLE для двопорогового процесу Леві)

Обчислювальний алгоритм побудовано за аналогією з алгоритмом для процесу Орнштейна–Уленбека, однак він доповнений стрибковою компонентою γ , яка враховує випадкові розриви у динаміці процесу.

Для цього процесу збіжна оцінка буде мати вигляд:

$$\hat{\theta}_i = \left(\hat{\beta}_{10,i}(k), \hat{\beta}_{11,i}(k), \hat{\beta}_{20,i}(k), \hat{\beta}_{21,i}(k), \hat{\beta}_{30,i}(k), \hat{\beta}_{31,i}(k), \right. \\ \left. \hat{\sigma}_{1,i}^2(k), \hat{\sigma}_{2,i}^2(k), \hat{\sigma}_{3,i}^2(k), \hat{\gamma}_{1,i}(k), \hat{\gamma}_{2,i}(k), \hat{\gamma}_{3,i}(k) \right)$$

Числова збіжність ітераційного алгоритму

Для оцінки параметрів моделі з двома порогоми, які ділять дані на три режими, використовується ітераційна процедура, що оновлює параметри β, σ^2, γ на кожному кроці:

$$\theta^{(k+1)} = F(\theta^{(k)})$$

Ідея збіжності (Теорема Банаха):

Якщо різниця між послідовними ітераціями зменшується та виконується умова:

$$\|F(\theta^{(1)}) - F(\theta^{(2)})\| \leq q \|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}\|, \quad 0 < q < 1$$

то існує єдина фіксована точка θ^* , і послідовність $\theta^{(k)}$ збігається.

Для оцінки стабільності використано спектральний аналіз матриці Якобі:

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i(\theta)}{\partial \theta_j}$$

Оскільки аналітичні похідні складні, то використовується чисельне наближення (forward difference):

$$J_{ij} \approx \frac{\theta_i^{(k+1)} - \theta_i^{(k)}}{\theta_j^{(k)}} \quad (\text{для } \theta_j^{(k)} \neq 0)$$

Критерій збіжності:

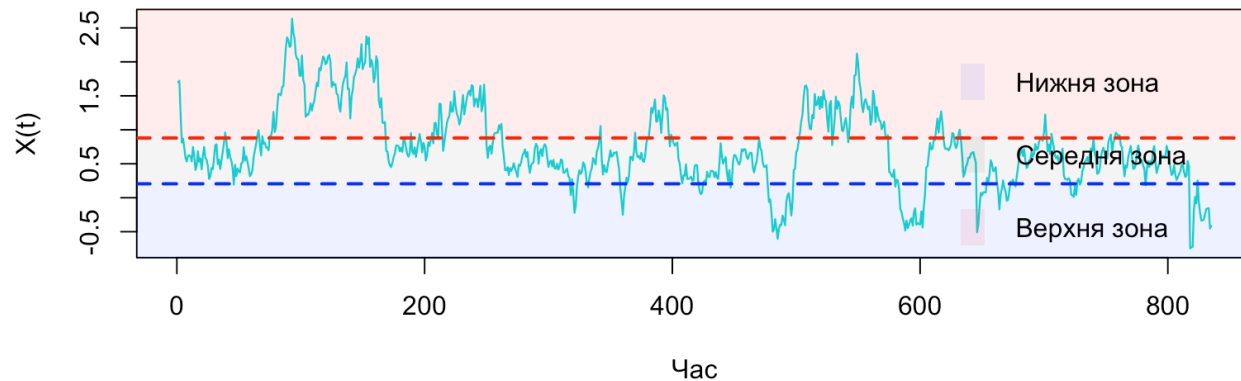
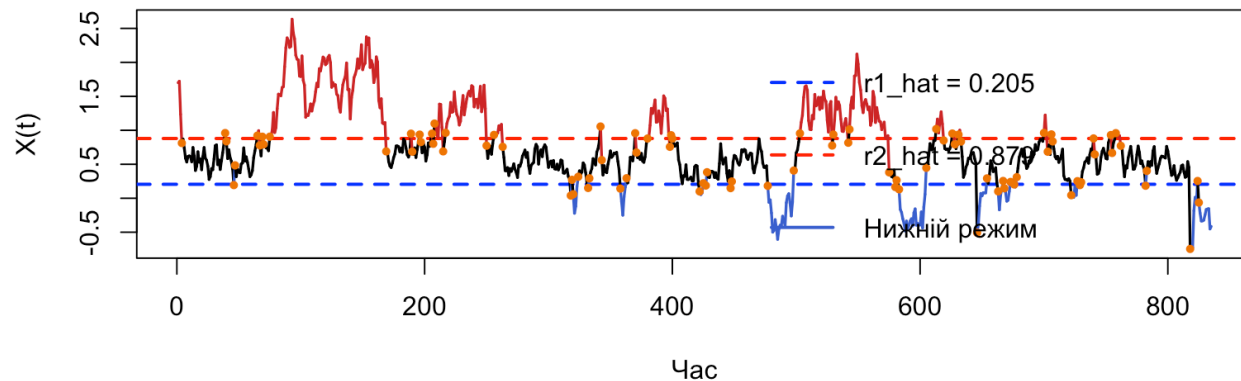
$$\rho(J) = \max |\lambda_i| < 1$$

Де $\rho(J)$ спектральний радіус матриці Якобі. Якщо ця умова виконується, то це свідчить про локальну збіжність ітераційного процесу для відповідної пари порогових значень.

Додатково виконується перевірка $\|\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}\| < 10^{-6}$

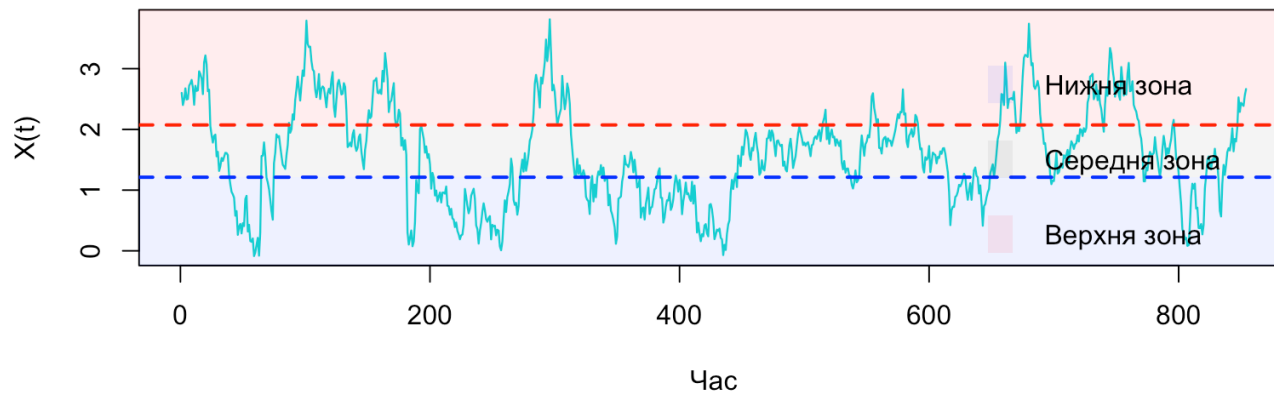
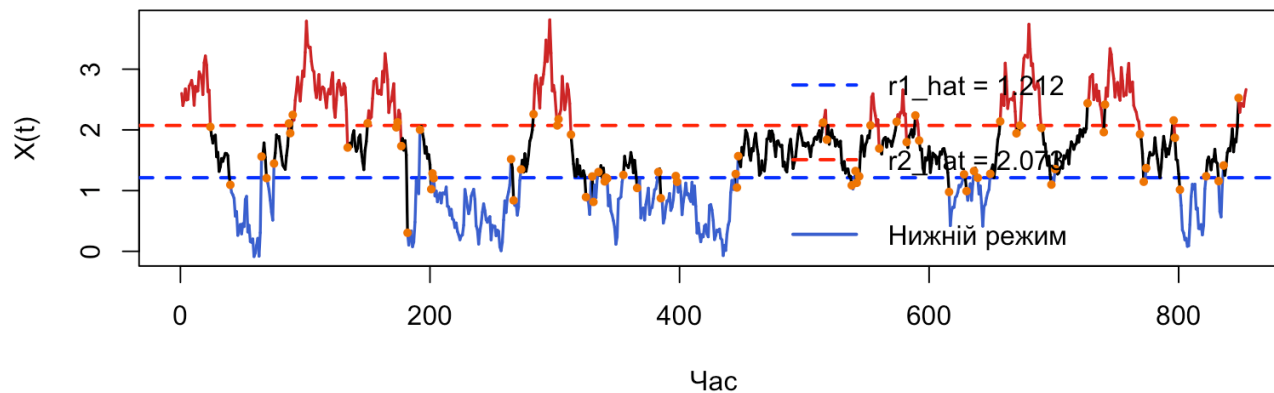
Оцінка результатів роботи алгоритму (на синтетично згенерованих даних)

$$r_1 \approx 0.205 \text{ та } r_2 \approx 0.879$$



Оцінка результатів роботи алгоритму (на синтетично згенерованих даних)

$$r_1 \approx 1.212 \text{ та } r_2 \approx 2.07$$



Отримані результати

Поріг	Істинне значення	Оцінене значення	Абсолютна похибка	Відносна похибка
r_1	0.2	0.205359	0.005359	0.026795
r_2	0.9	0.879224	0.020776	0.023085
r_1	1.3	1.212136	0.087864	0.067588
r_2	2.0	2.073042	0.073042	0.036521

Розділ III Комп'ютерне моделювання

Для програмної реалізації запропонованого алгоритму було обрано мову програмування R. В якості середовища для розробки було використано RStudio.

Робота програми поділена на етапи:

- Генерація тестових даних
- Обчислювальний цикл. Для кожної пари можливих порогових значень (r_1, r_2) алгоритм. Обчислює параметри $\beta_i, \sigma_i^2, \gamma_i$ для трьох режимів та θ_i для різних комбінацій порогів.
- В результаті повертає оптимальні параметри за $\tau = \operatorname{argmin}_i \{-2l_X(\hat{\theta}_i)\}$.

Генерація синтетичних даних

Ключові кроки

- Фіксуємо рівномірну часову сітку:
 $dt = \text{const.}$
- Генеруємо $dW \sim N(0, dt)$.
- Для моделі Леві додатково генерується стрибова компонента: $N \sim \text{Pois}(\lambda dt)$ + розміри стрибків.
- Формуємо фінальний набір даних, що описує двопорогову структуру процесу.

```
1 set.seed(42)
2 T <- 10; dt <- 0.01
3 t <- seq(0, T, by = dt)
4 n <- length(t)
5 x <- numeric(n); x[1] <- 0
6
7 #
8 beta <- list(c(b10,b11), c(b20,b21), c(b30,b31))
9 sigma <- c(s1, s2, s3)
10 gamma <- c(g1, g2, g3)           # для Леві
11 lambda <- 3                     # інтенсивність
    стрибків
12
13 for (j in 2:n) {
14   reg <- regime(x[j-1], r1, r2)   # 1/2/3
15   b0 <- beta[[reg]][1]; b1 <- beta[[reg]][2]
16   dW <- rnorm(1, 0, sqrt(dt))
17   drift <- dt*(b0 + b1*x[j-1])
18   diff <- sigma[reg]*dW
19   # стрибки (опційно для моделі Леві)
20   Nj <- rpois(1, lambda*dt)
21   J <- sum(rjump(Nj, gamma[reg]))
22   x[j] <- x[j-1] + drift + diff + J
23 }
```

Набір порогових значень

- Уникаємо крайніх значень: беремо квантілі (напр., 5%...95%).
- Розбиваємо діапазон на сітку з кроком `step`
- Сітка відсортована, тоді легко забезпечити $r_2 > r_1$.

```
1 q_lo <- quantile(x, 0.05)
2 q_hi <- quantile(x, 0.95)
3 step <- 0.05
4
5 R_grid <- seq(q_lo, q_hi, by =
  step)
6 R_grid <- sort(unique(R_grid))
```

Цикл перебору (r_1, r_2)

Порогові пари формуються за допомогою вкладених циклів:

- перший поріг r_1 перебирається по всій сітці значень, а другий поріг r_2 для кожного фіксованого r_1 перебирається лише серед значень, що строго більші за r_1 .

Логіка

- Зовнішній цикл: $r_1 = R_{grid}[i]$
- Внутрішній цикл: $r_2 = R_{grid}[j]$, де $r_2 > r_1$.

```
1 best_nll <- Inf; best <- NULL
2 min_n <- 10
3
4 for (i in 1:(length(R_grid)-2)) {
5   r1 <- R_grid[i]
6   for (j in (i+1):(length(R_grid)-1))
7   {
8     r2 <- R_grid[j]
9     n1 <- sum(x <= r1)
10    n2 <- sum(x > r1 & x <= r2)
11    n3 <- sum(x > r2)
12    if (min(c(n1,n2,n3)) < min_n)
13      next
14  }
```

Розрахунок β (дрейфу) у кожному режимі

Розрахунок виконується згідно формул із системи рівнянь

```
1 update_beta_reg <- function(x, dt, idx,
sigma2) {
2   #
3   y <- (x[idx+1] - x[idx]) / dt
4   Xd <- cbind(1, x[idx])
5   w <- rep(1/sigma2, length(idx))
6   W <- diag(w)
7   b <- solve(t(Xd) %*% W %*% Xd, t(Xd) %*% W
%*% y)
8   return(b)
9 }
10
11 beta1 <- update_beta_reg(x, dt, idx1,
sigma2[1])
12 beta2 <- update_beta_reg(x, dt, idx2,
sigma2[2])
13 beta3 <- update_beta_reg(x, dt, idx3,
sigma2[3])
```

Розрахунок σ^2 (дифузії) у кожному режимі

Розрахунок виконується згідно
формул із системи рівнянь

```
1 update_sigma2_reg <- function(x, dt,
  idx, beta0, beta1, Jhat = NULL) {
2   dX <- (x[idx+1] - x[idx])
3   mu <- dt*(beta0 + beta1*x[idx])
4   if (!is.null(Jhat)) dX <- dX -
  Jhat
5   e <- dX - mu
6   s2 <- mean(e^2) / dt
7   return(s2)
8 }
9
10 sigma2[1] <- update_sigma2_reg(x,
  dt, idx1, beta1[1], beta1[2])
```

Для моделі Леві: γ (стрибкова компонента)

Розрахунок виконується згідно
формул із системи рівнянь

Оцінюємо інтенсивність стрибків
окремо для кожного режиму

```
1 #
2 update_lambda_reg <- function(Nj, idx,
dt) {
3   return( sum(Nj[idx]) /
(length(idx)*dt) )
4 }
5
6 #
7 update_gamma_reg <- function(jumps,
idx) {
8   # jumps[idx] – оцінені/виділені
стрибки на кроці
9   return( mean(abs(jumps[idx])) )
10 }
11
12 lambda1 <- update_lambda_reg(Nj, idx1,
dt)
13 gamma1 <- update_gamma_reg(Jhat,
idx1)
```

Збіжність в коді

Критерії

- Умова 1: $\|\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}\| < \varepsilon$
- Умова 2: $\rho(J) < 1$ (стійкість ітерацій)

```
1 eps <- 1e-6
2 if (norm(theta_new - theta, "2") < eps) {
3   J <- jacobian_fd(function(th) F(th, r1,
4     rho <- max(Mod(eigen(J)$values))
5     if (rho < 1) converged <- TRUE
6   }
7
8   jacobian_fd <- function(F, theta, h = 1e-
6) {
9     p <- length(theta); J <- matrix(0, p, p)
10    f0 <- F(theta)
11    for (j in 1:p) {
12      th <- theta; th[j] <- th[j] + h
13      J[,j] <- (F(th) - f0) / h
14    }
15    J
16 }
```

Розрахунок функції правдоподібності

Розраховується

Для процесу ОУ або Леві
розраховується функція
правдоподібності.

Оцінки оптимальних порогів
визначаються як ті, що
забезпечують мінімальне значення
від'ємної подвоєної логарифмічної
функції правдоподібності $\tau =$
 $\operatorname{argmin}_i \{-2l_X(\hat{\theta}_i)\}$.

```
1 negloglik_OU <- function(x, dt, r1, r2,
2   beta, sigma2) {
3   #
4 }
5 negloglik_Levy <- function(x, dt, r1,
6   r2, beta, sigma2, gamma, lambda) {
7   #
8 }
9 nll <- if (model == "OU")
10  negloglik_OU(x, dt, r1, r2, beta,
11  sigma2)
12 else
13  negloglik_Levy(x, dt, r1, r2, beta,
14  sigma2, gamma, lambda)
```

Вибір оптимальних параметрів

Збереження оптимальних
порогів r_1 , r_2 та θ

Повернення: (r_1, r_2) та
оцінених параметрів θ

```
1 if (converged) {  
2   nll <- negloglik(..., r1, r2, theta)  
3   if (nll < best_nll) {  
4     best_nll <- nll  
5     best <- list(r1 = r1, r2 = r2, theta =  
theta)  
6   }  
7 }  
8  
9 # результат  
10 cat("r1* =", best$r1, " r2* =", best$r2, "  
11 ")  
12 print(best$theta)
```

Візуалізація результату

Побудова графіків

```
plot_trajectory <- function(t, X, r1, r2,
title="") {
  plot(t, X, type="l", xlab="t", ylab="X(t)",
main=title)

  # thresholds
  abline(h=r1, lty=2); abline(h=r2, lty=2)

  # regime coloring (fill by y-intervals)
  usr <- par("usr")
  rect(usr[1], -Inf, usr[2], r1, border=NA,
col=rgb(0.2,0.4,1,0.08))
  rect(usr[1], r1,  usr[2], r2, border=NA,
col=rgb(0.2,1,0.4,0.08))
  rect(usr[1], r2,  usr[2], Inf, border=NA,
col=rgb(1,0.4,0.2,0.08))
  lines(t, X) # redraw on top
}
```

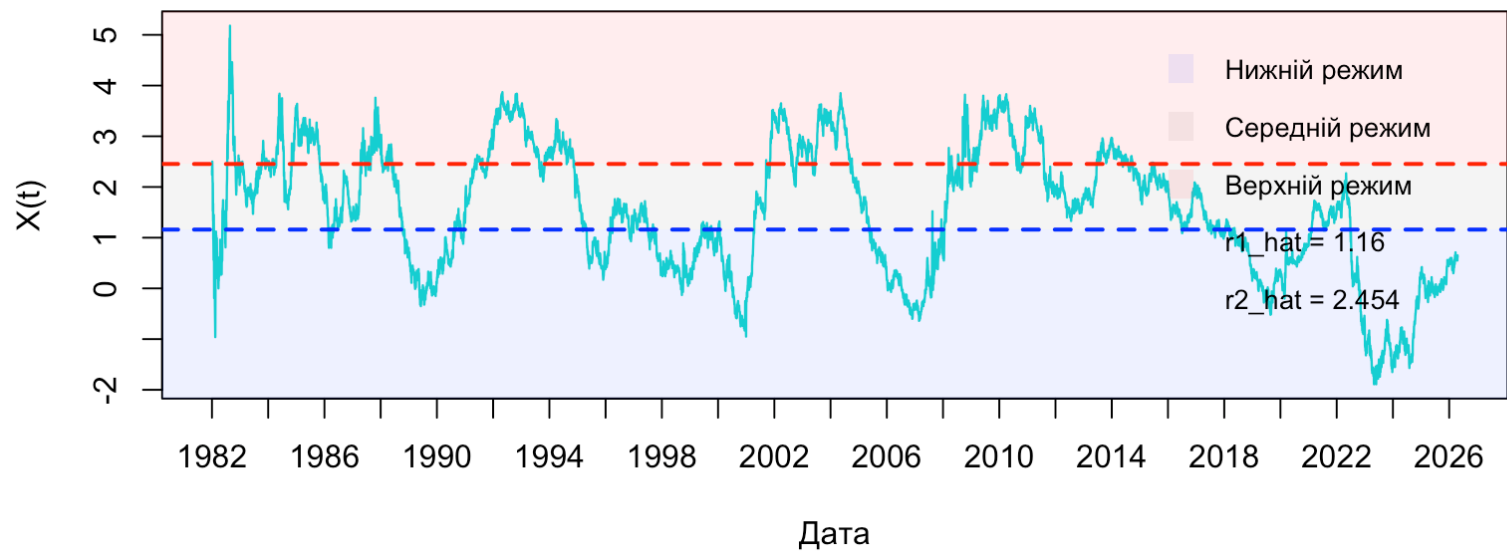
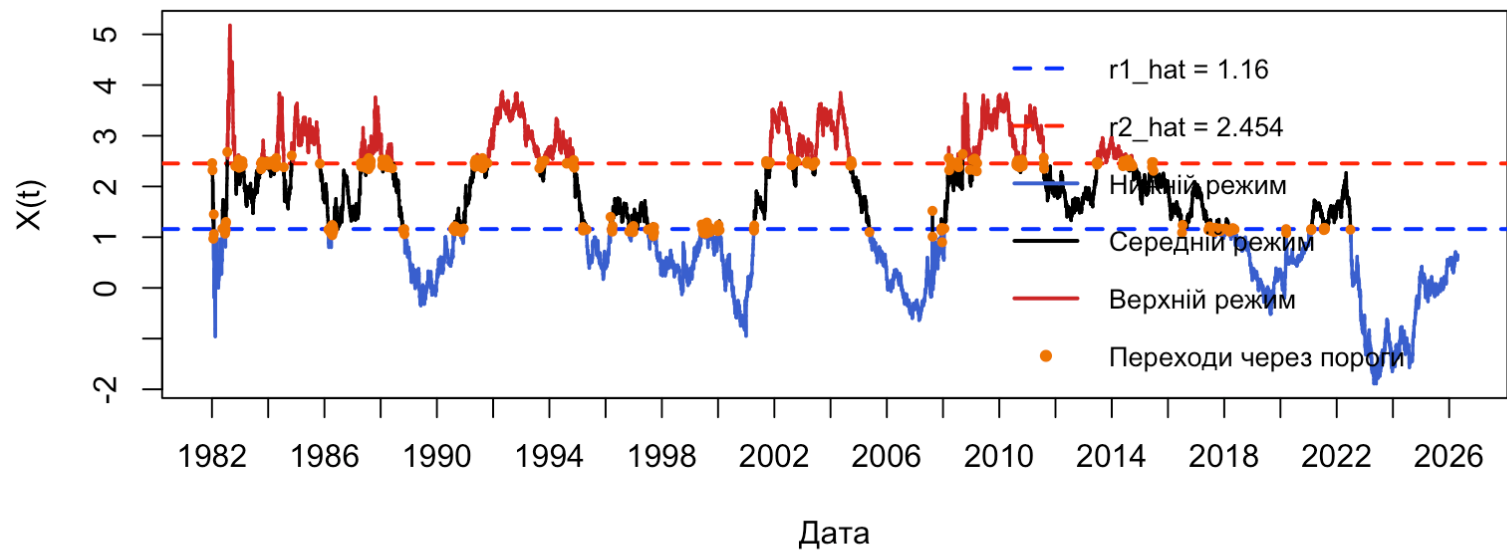
Перевірка алгоритму на реальних даних за допомогою програмного коду

Для перевірки алгоритму оцінювання двопорогових процесів, що описуються рівнянням Іто та Іто-Скоророхода, було використано дані з відкритих джерел API.

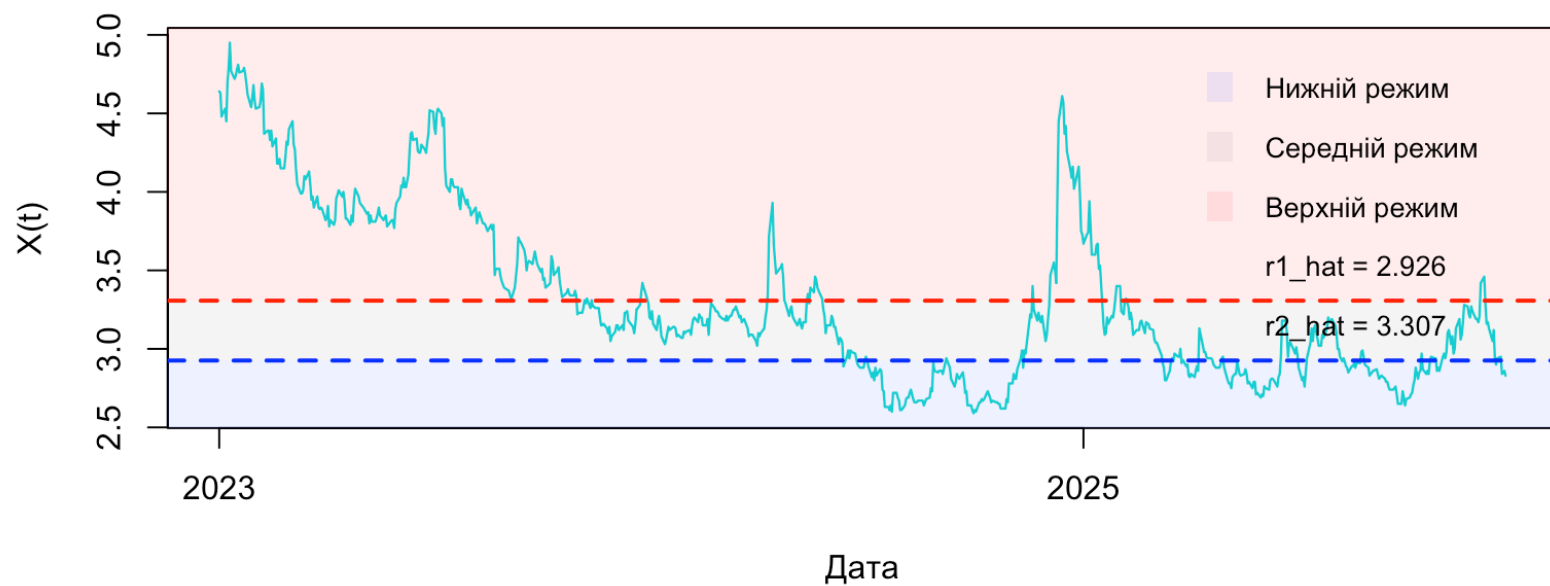
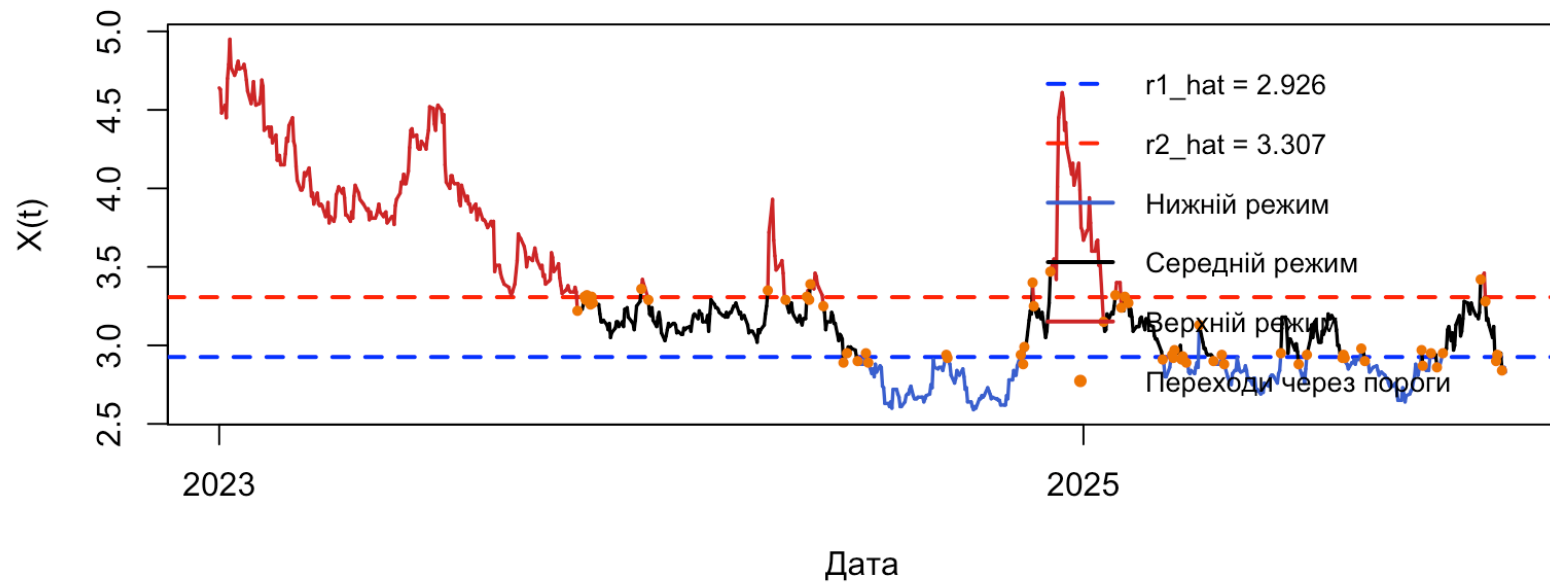
Дані отримувались із публічного API ресурсу FRED (Federal Reserve Economic Data) за допомогою пакета `quantmod` у середовищі R, також із Yahoo Finance.

Набори даних отримувались у вигляді часових рядів. До наборів даних входять спреди дохідності облігацій, фінансові індекси та інше.

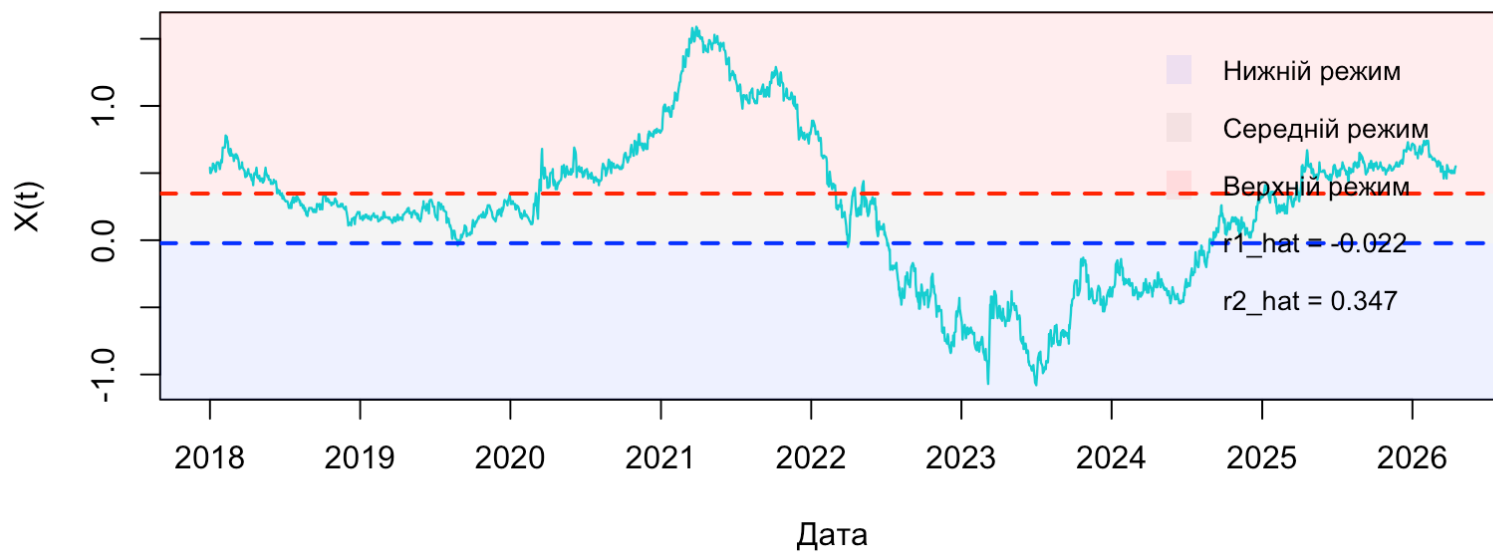
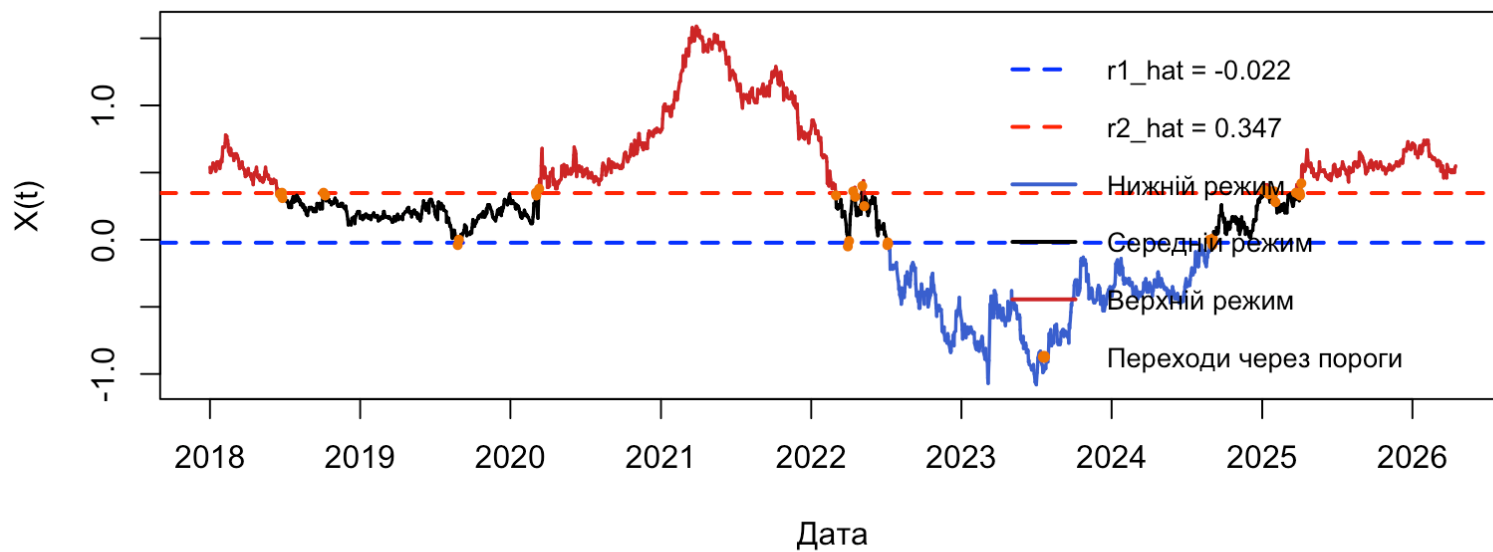
Часовий ряд T10Y3M



Часовий ряд BAMLN0A0HYM2



Часовий ряд T10Y2Y

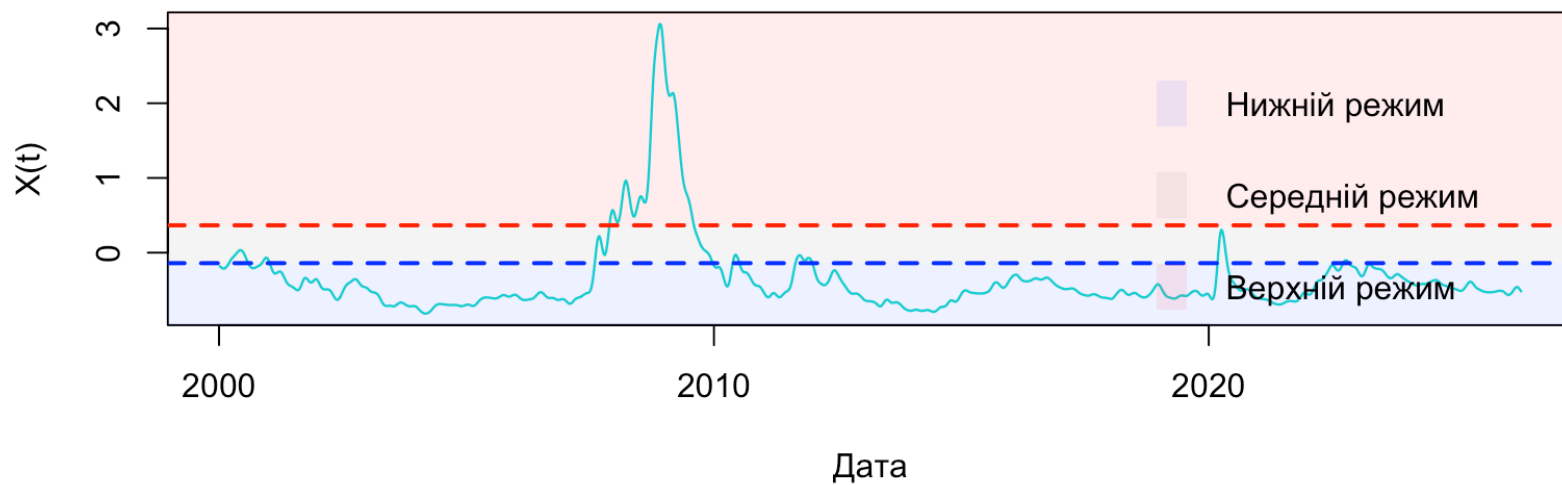
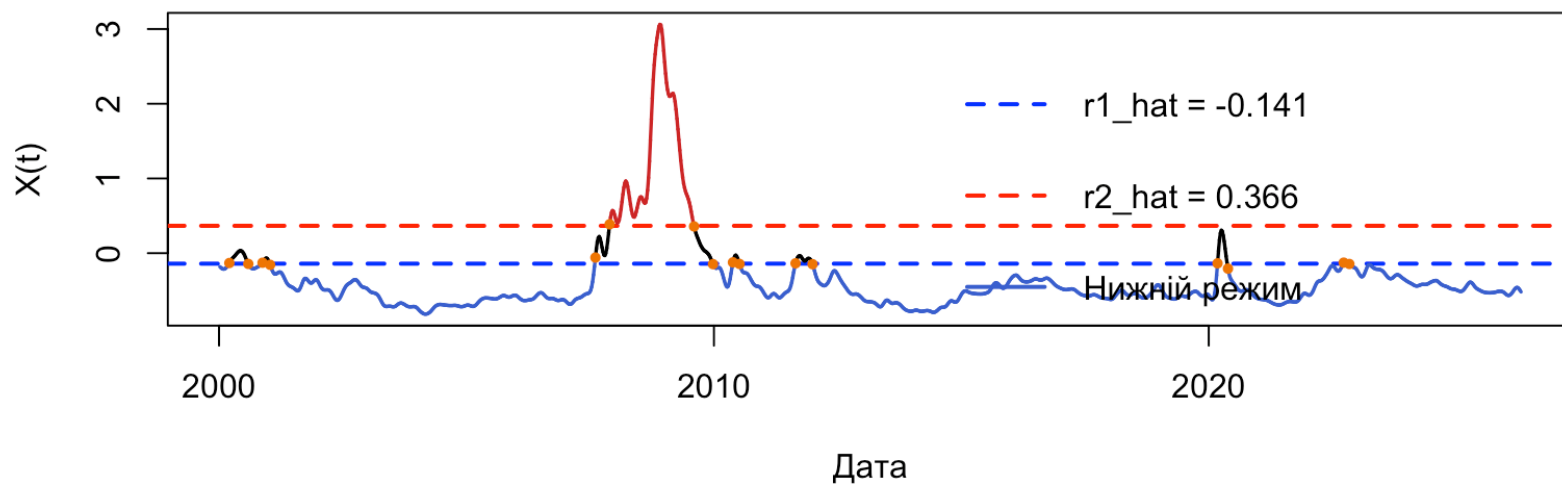


Отримані результати

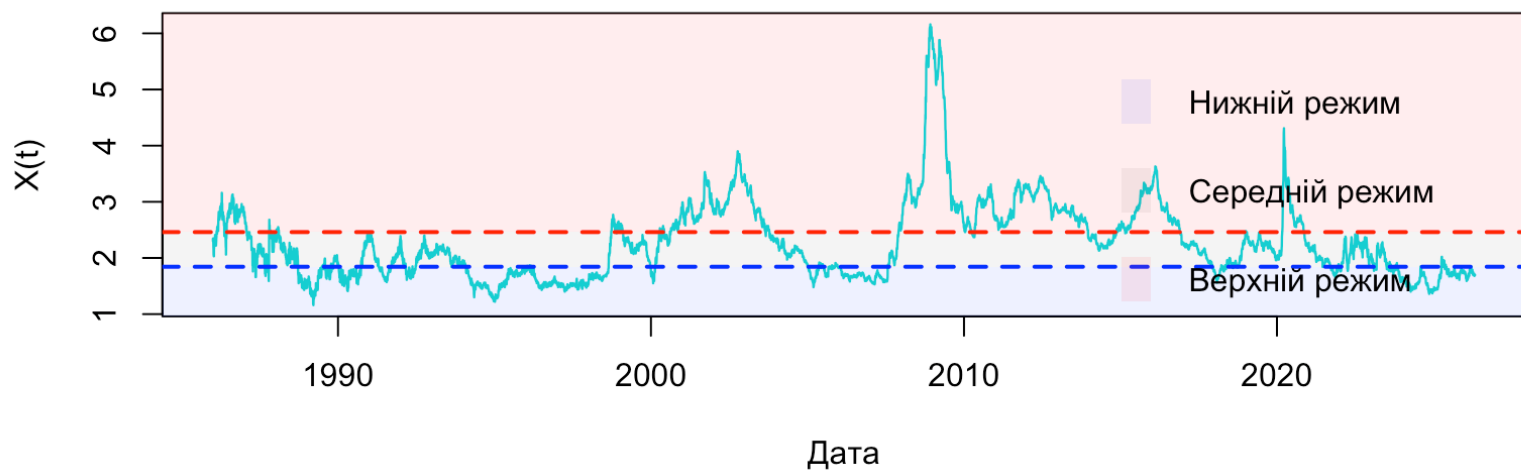
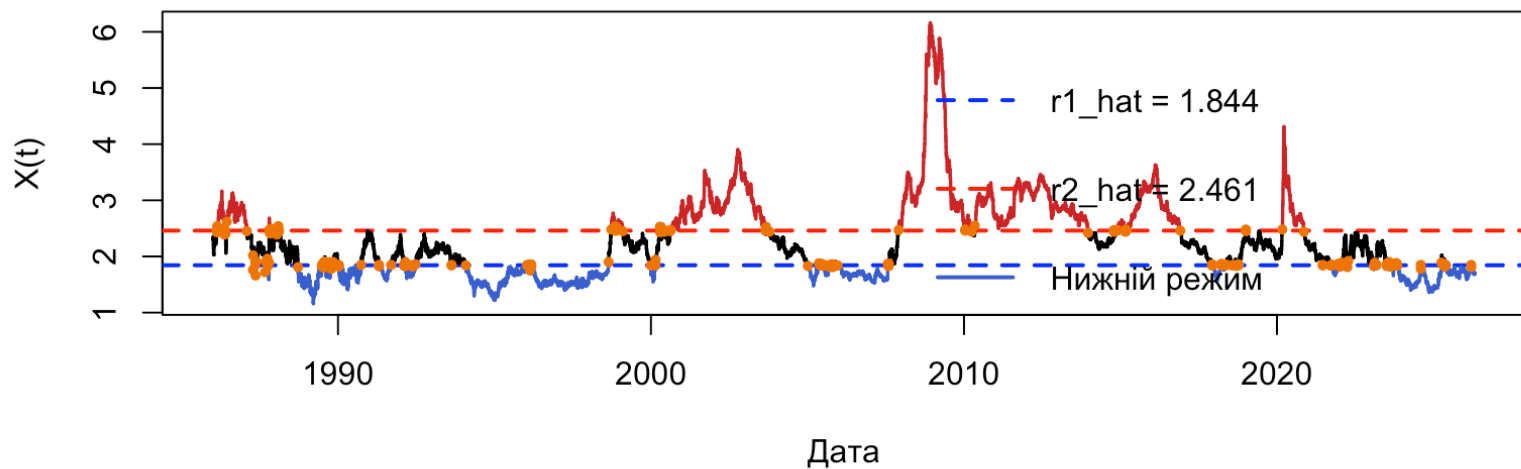
Набір даних	Період	r_1	r_2
T10Y3M	1982 - 2026	≈ 1.16	≈ 2.454
ВAМЛH0A0HУM2	2023 - 2025	≈ 2.926	≈ 3.307
T10Y2Y	2018 - 2026	≈ -0.022	≈ 0.347

```
df <- data.frame(  
  date = index(data),  
  value = as.numeric(data$T10Y2Y)  
)  
df <- df[df$date >= as.Date("2018-01-01") &  
        df$date <= as.Date("2026-04-17"), ]  
X <- df$value
```

Часовий ряд NFCI



Часовий ряд ВАА10У



Отримані результати

Набір даних	Період	r_1	r_2
NFCI	з кінця 1990-х років до останньої доступної дати (близько 2024–2025 року)	≈ -0.14	≈ 0.366
ВАА10У	з середини 1980-х років до останньої доступної дати (близько 2024-2025 року)	≈ 1.85	≈ 2.42

ВИСНОВКИ

В даній дисертаційній роботі було проведено теоретичне дослідження та побудовано математичну модель для оцінювання параметрів процесів на основі рівнянь Іто та Іто-Скорохода. На базі математичної моделі було розроблено алгоритм та програмний код. Проведено ряд тестувань алгоритму на синтетичних та реальних даних, що дало змогу оцінити його ефективність. Отримані результати підтвердили те, що запропонована методика оцінювання параметрів процесів, що моделюються за допомогою рівнянь Іто та Іто-Скорохода працездатна. Підхід, який описаний у роботі, розширює наявні дослідження в даній сфері, оскільки дає можливість аналізувати і оцінювати параметри двопорогових стохастичних процесів, що формують три режими динаміки поведінки на протязі визначеного періоду часу.

Дякую за увагу